

J. ODERFELD (Warszawa)

POWIERZCHNIE O WILGOTNOŚCI ŚREDNIEJ

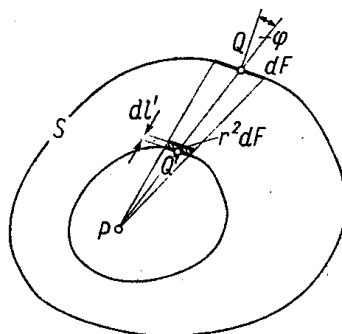
Współpracownicy Działu SKJP Instytutu Matematycznego PAN P. Mikulski, W. Rudzki i K. Wiśniewski w pracy [1] postawili następujące pytanie. Liście tytoniowe pakuje się w bele prostopadłościennie; wilgotność liści może być różna w różnych punktach beli. W których miejscach beli wilgotność lokalna jest zbliżona do średniej?

Praktycznym zastosowaniem rozwiązania byłoby wskazanie miejsca, z którego należy pobierać próbkę liści do określenia wilgotności beli.

Autorzy tego zadania nie poprzestali na jego sformułowaniu: zauważyli, że przy pewnych, wprawdzie bardzo szczegółowych, założeniach położenie miejsca o średniej wilgotności na linii prostej przechodzącej przez środek beli było znamienne stałe.

Ten wynik zachęcił mnie do bliższego zbadania sprawy w warunkach bardzo ogólnych.

Wewnątrz bryły wypukłej ograniczonej dowolną powierzchnią S (rys. 1) obierzmy stały punkt P i poprowadźmy z niego pęk półprostych. Oznaczmy przez l długość odcinka dowolnej półprostej od P aż do punktu Q — jej przecięcia z S . Obierzmy na tej półprostej dowolny punkt Q' i oznaczmy odległość PQ' przez l' , a l'/l przez r . Niech w każdym punkcie Q' będzie określona funkcja w zależna tylko od położenia Q' . Oznaczmy przez \bar{w} średnią wartość w we wnętrzu bryły.



ZM-294

Rys. 1

TWIERDZENIE. *Jeśli na każdej półprostej wartości w są określone przez tę samą funkcję $w = f(r)$, to*

1° *powierzchnie stałej wartości w są jednokładne z powierzchnią S ze środkiem jednokładności w P ,*

2° *średnią wartość \bar{w} określa wzór*

$$\bar{w} = 3 \int_0^1 r^2 f(r) dr.$$

Dowód. Teza 1° wynika wprost z definicji jednokładności. Mianowicie, odpowiadające sobie punkty powierzchni S i powierzchni stałego w leżą na promieniach przechodzących przez stały punkt P , a stosunek odpowiadających sobie odległości od P jest stały.

Do dowodu tezy 2° poprowadzimy z P elementarny stożek wycinający z S element powierzchni o polu dF ; objętość stożka $dV = \frac{1}{3}ldF\cos\varphi$, gdzie φ oznacza kąt między wektorem \vec{l} a normalną do S w punkcie Q . Obliczmy średnią wartość μ funkcji w we wnętrzu stożka elementarnego

$$\mu = \frac{1}{dV} \int f(r)dF\cos\varphi r^2 dl',$$

przy czym całka jest rozciągnięta na cały stożek. Ale $dl' = ldr$, a l , dF oraz $\cos\varphi$ są dla stożka wielkościami stałymi. Wskutek tego

$$\mu = \frac{ldF\cos\varphi}{dV} \int_0^1 f(r)r^2 dr = 3 \int_0^1 f(r)r^2 dr.$$

Ponieważ z założenia całka występująca po prawej stronie tego wyrażenia jest taka sama dla każdego stożka, to

$$(1) \quad \bar{w} = 3 \int_0^1 f(r)r^2 dr, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Z udowodnionej tezy 2° wynika

WNIOSEK. Współczynnik \bar{r} charakteryzujący powierzchnię stałej wartości w , na której $w = \bar{w}$, jest pierwiastkiem równania

$$(2) \quad f(r) = 3 \int_0^1 f(r)r^2 dr.$$

Wróćmy teraz do bel tytoniu. Przede wszystkim nasuwa się pytanie, czy założenie twierdzenia ma w tym przypadku sens. Aby na to odpowiedzieć, można skonfrontować tezę 1° z rzeczywistością. Można to zrobić dwojako, przez rozważania o fizycznej naturze zjawiska lub przez porównanie z doświadczeniem.

Jeśli założenie twierdzenia jest prawdziwe, to powierzchniami stałej wilgotności w belach tytoniu są powierzchnie prostopadłościennne, jednokładne z powierzchnią beli. Czy tak jest? Sądzę, że tak, przynajmniej w tym przypadku, gdy belę układano z liści o podobnej wilgotności i gdy warunki wysychania (lub nawilżania) były dla wszystkich ścian beli podobne. Jeśli w dodatku wpływ anizotropowości liści jest mało istotny, można się spodziewać, że wilgotność punktów wewnętrznych beli, poło-

zonych w jednakowej odległości od ściany, jest podobna. Przypuszczenia te nie dotyczą punktów beli położonych blisko naroży, bo tam oddziaływanie otoczenia jest intensywniejsze niż w punktach odległych od naroży. Łatwo jednak wykazać, że te anomalie dotyczą tylko nieznacznej części masy tytoniu. Przyjmijmy umownie, że „narożem fizycznym” jest czworoscian o długości krawędzi równych odpowiednio $1/10$ długości krawędzi beli. Wtedy w narożach fizycznych jest tylko $1/750$ masy całej beli i to co się w narożach dzieje nie ma praktycznie żadnego wpływu na wilgotność średnią.

Oczywiście zamiast tych rozważań lepiej byłoby przedstawić wyniki pomiarów, niestety jednak nimi nie dysponujemy. Możemy się tylko powołać na pewien eksperyment zaproponowany przez W. Rudzkiego. Polega on na zanurzeniu w atramencie bryłek kredy, przecinaniu ich i obserwowaniu linii odgraniczających na przekroju część zabarwioną od niezabarwionej. Okazuje się, że te linie są, przy zachowaniu pewnych warunków technicznych, jednokładne z konturem przekroju, i to dla bryłek o bardzo różnym kształcie.

Przejdźmy teraz do oszacowania pierwiastków równania (2). Postaramy się to zrobić przy możliwie słabych założeniach, aby jak najbardziej uniezależnić się od nieznanej historii bel tytoniowych.

Aby uprościć rozważania, zwróćmy uwagę, że pierwiastki \bar{r} równania (2) nie ulegną zmianie, gdy zamiast $f(r)$ przyjmiemy $af(r) + b$, gdzie a i b są stałe.

Możemy więc, nie zmniejszając ogólności, unormować funkcję $w = f(r)$ przyjmując, że $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. W tym celu wystarczy stosownie dobrać

1° znak a zależnie od tego, czy wilgotność jest większa czy też mniejsza w środku niż na powierzchniach;

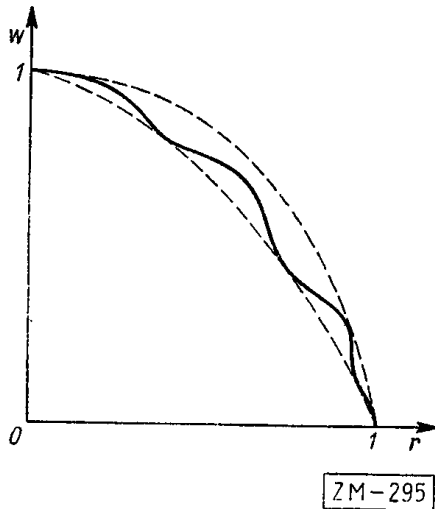
2° wielkość a zależnie od jednostki wilgotności;

3° wielkość b zależnie od początku skali wilgotności.

Szukając dalszych założeń formalnych ograniczymy się do pospolitego przypadku, gdy bela tytoniu w ciągu swej historii na ogół stopniowo wysycha, lub na ogół stopniowo się nawilża. Znaczy to, że jej wilgotność unormowana spełnia warunek $0 \leq f(r) \leq 1$.

Prawa rządzące ruchem cieczy w żywej tkance roślinnej są bardzo złożone. Wiadomo, że istotną rolę gra tu *osmoza* oraz przeciwne jej zjawisko zwane *turgorem* (hamowanie ruchu cieczy przez błony komórek, naprężające się pod wpływem cieczy przenikającej do wnętrza komórki). Oba te zjawiska, a prócz nich i inne, dają ostatecznie tzw. *siłę ssania*, która powoduje przepływ cieczy w kierunku malejącej wilgotności. Wiadomo, że siła ssania jest tym większa, im wilgotność komórki jest mniejsza

Ryzykowne byłoby budować na tych podstawach model ilościowy wysychania (lub nawilżania się) beli tytoniu, złożonej z liści martwych, jednakże wiadomo, że związek między siłą ssania a wilgotnością ma dla



Rys. 2

wszelkich ciał porowatych taki kierunek, jaki opisaliśmy. Znaczy to, że w naszym przypadku gradient wilgotności unormowanej rośnie na ogół (pomijając lokalne anomalie) ze zmienną r . Dotyczy to zarówno przypadku, gdy środek beli jest wilgotniejszy niż powierzchnia, jak przypadku przeciwnego. Wskutek tego unormowana funkcja $w = f(r)$ ma przebieg podobny do wykresu narysowanego grubą linią na rysunku 2, czyli że jest w ogólnym swoim przebiegu wypukła. Możemy to sformalizować zakładając, że nieznana funkcja w jest zawarta w obszarze ograniczonym dwiema

funkcjami $f_1(r)$ i $f_2(r)$, na przykład takimi, jakie pokazano liniami kreskowanymi na rysunku 2. Jednakże nie każda funkcja w spełniająca te warunki ma sens fizyczny. Zapewne niewiele odbiegniemy od rzeczywistości przyjmując, że unormowana wilgotność w jest nierosnącą funkcją r .

Aby coś więcej powiedzieć o $f(r)$, trzeba by było głębiej wniknąć w fizyczny proces ruchu wody w tytoniu i nieuchronnie w końcu oprzeć się na danych doświadczalnych. Otóż jedyne doświadczenie, o którym wiemy, było przeprowadzone przez J. Grochowinę w Łódzkiej Wytwórni Papierosów. Z tego doświadczenia wynika, że funkcja $f(r)$ badana wzdłuż głównej przekątnej beli ma po unormowaniu w przybliżeniu postać: $w = 1 - r^2$.

ZAŁOŻENIE 1. *Funkcja $w = f(r)$ jest nierosnąca i zawarta w domkniętym obszarze ograniczonym funkcjami*

$$(3) \quad f_1(r) = 1 - r^{n_1} \quad i \quad f_2(r) = 1 - r^{n_2},$$

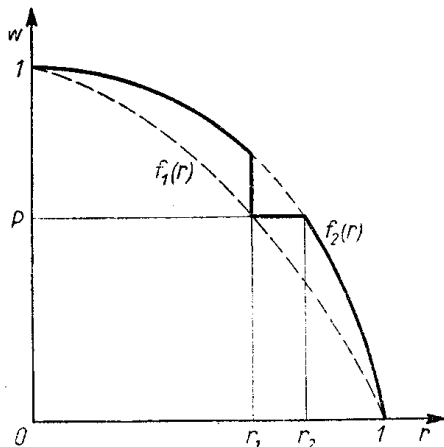
gdzie $n_1 \geq 1$, $n_2 > n_1$.

Jak zobaczymy, to słabe założenie pozwala na użyteczne oszacowanie pierwiastków \bar{r} równania (2).

W tym miejscu słuszne jest przyznać, że wybierając typ funkcji ograniczających kierowaliśmy się również względami na prostotę rachunków.

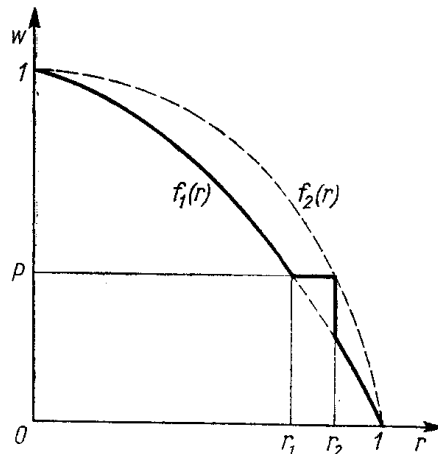
Zacniemy od oszacowania dolnego. Wśród wszystkich funkcji $w(r)$ spełniających założenie 1 znajdziemy funkcję $w_1(r)$, dla której rozwiązanie równania (2) jest najmniejsze.

Oznaczmy przez P prawą stronę równania (2). Dla wszelkiej ustalonej wartości P pierwiastek \bar{r} jest najmniejszy, gdy punkt o współrzędnych (\bar{r}, P) leży na krzywej $w = f_1(r)$. Spośród wszystkich takich punktów ten ma najmniejszą odciętą, dla którego P jest największe. To zaś, wobec założonej monotoniczności funkcji $w = f(r)$, dowodzi, że dolne oszacowanie \bar{r} znajdziemy przyjmawszy przebieg funkcji $w = f(r)$ pokazany grubą linią na rysunku 3. A więc dla ustalonej funkcji $f_1(r)$ i $f_2(r)$ dolnym oszacowaniem \bar{r} będzie wielkość r_1 z rysunku 3.



ZM-296

Rys. 3



ZM-297

Rys. 4

Rozumując analogicznie dochodzimy do wniosku, że dla ustalonych funkcji $f_1(r)$ i $f_2(r)$ górnym oszacowaniem \bar{r} będzie wielkość r_2 z rysunku 4.

Oznaczmy dla wygody

$$(4) \quad C(n, x) = 3 \int_0^x (1-r^n)r^2 dr = x^3 - \frac{3}{n+3} x^{n+3}.$$

Wówczas oszacowanie dolne r_1 spełnia układ równań

$$(5) \quad \begin{aligned} P &= 1 - r_1^{n_1}, & P &= 1 - r_2^{n_2}, \\ P &= C(n_2, 1) + C(n_2, r_1) - C(n_2, r_2) + P(r_2^3 - r_1^3). \end{aligned}$$

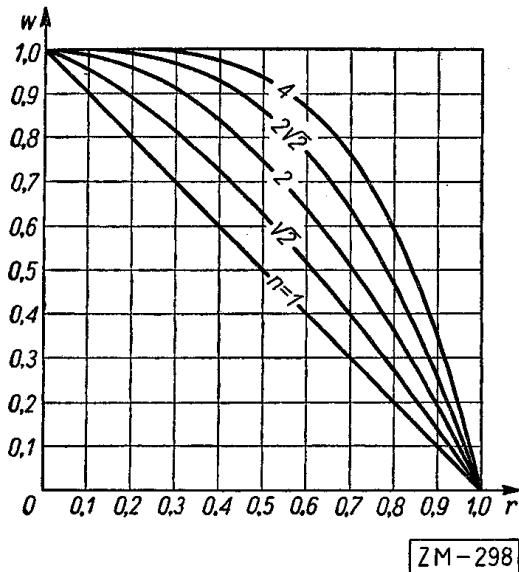
Oszacowanie górne r_2 spełnia układ równań

$$(6) \quad \begin{aligned} P &= 1 - r_1^{n_1}, & P &= 1 - r_2^{n_2}, \\ P &= C(n_1, 1) + C(n_1, r_1) - C(n_1, r_2) + P(r_2^3 - r_1^3). \end{aligned}$$

Na rysunku 5 pokazano wykresy funkcji ograniczających tak wybranych, żeby pasy między sąsiednimi wykresami miały mniej więcej jednakową szerokość. Prowadzi to do następującego ciągu:

$$(7) \quad n = 1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4.$$

Tylko doświadczenie może rozstrzygnąć, czy funkcje $w = f(r)$, charakteryzujące zmianę wilgotności w beli tytoniu w różnych warunkach,



Rys. 5

mieszczą się w pasach „pojedynczych” z rysunku 5, czy też ich kapryśny przebieg wymaga ograniczenia w pasie podwójnym, potrójnym, a może nawet poczwórnym.

Udowodnimy jednak, że w każdym z tych przypadków, czyli dla wszelkiej pary n_1, n_2 z ciągu (7), oszacowania dolne i górne są niezbyt od siebie odległe, a co ważniejsze — średnia arytmetyczna tych oszacowań mało zależy od wyboru n_1 i n_2 . W tym celu należy rozwiązać układy (5) i (6) dla wszystkich kombinacji n_1, n_2 . Każdy z tych układów daje się łatwo sprowadzić do równania algebraicznego z jedną niewiadomą, jednakże postać tego równania nie pozwala na rozwiązanie wyrazne. Dlatego wygodniejsze jest rozwiązywanie numeryczne. Jako przygotowanie obliczyliśmy⁽¹⁾ z dokładnością do 0,0001 wartości w^n oraz $C(n, w)$ dla parametrów n z ciągu (7), a ponadto dla wygody wartości w^3 . Zrobiono to dla argumentów $w = 0,40(0,01)1,00$.

Po tym przygotowaniu rozwiązywanie układów (5) i (6) dało się sprowadzić do iteracji, której skrócony schemat podajemy dla układu (5):

$$P_0, \quad r_1 = (1 - P_0)^{1/n_1}, \quad r_2 = (1 - P_0)^{1/n_2}, \\ C(n_2, 1), \quad C(n_2, r_1), \quad C(n_2, r_2), \quad r_2^3, \quad r_1^3, \quad P_0(r_2^3 - r_1^3), \quad P_1.$$

Schemat rozwiązywania układu (6) różnił się tylko tym, że parametrem funkcji C było nie n_2 , lecz n_1 .

Wyjaśnimy teraz, skąd braliśmy wartości P_0 w pierwszym kroku iteracji. Dla układu (5) był to pierwszy człon trzeciego równania, $P_0 =$

⁽¹⁾ Obliczenia wykonała K. Olsztyńska z Działu SKJP Instytutu Matematycznego PAN.

$= C(n_2, 1) = n_2/(n_2 + 3)$. Dla układu (6) przyjmowaliśmy $P_0 = C(n_1, 1) = n_1/(n_1 + 3)$. Można łatwo udowodnić, że te wartości P_0 odpowiadają dokładnie założeniu 1 osłabionemu przez pominięcie warunku, że funkcja $w = f(r)$ jest nierosnąca; można również łatwo wykazać, że prowadzi to do oszacowań luźniejszych niż przy założeniu 1, mianowicie oszacowania

$$(8) \quad \text{dolnego} \quad \left(\frac{3}{3+n_2}\right)^{\frac{1}{n_1}} \quad \text{i} \quad \text{górnego} \quad \left(\frac{3}{3+n_1}\right)^{\frac{1}{n_2}},$$

nie będziemy się jednak tym bliżej zajmowali.

Okazało się, że postępowanie iteracyjne jest szybko zbieżne do prawdziwych pierwiastków układów (5) i (6). Wyniki spisano w tabelicy 1.

TABLICA 1

Oszacowania \bar{r} przy założeniu 1. Liczby w oczkach tabelicy są w procentach. Pierwsza liczba jest oszacowaniem dolnym, druga — średnim, trzecia — górnym

$n_1 \backslash n_2/n_1$	$\sqrt{2}$			2			$2\sqrt{2}$			4		
1	68,6	75,0	81,3	62,9	74,2	85,6	58,1	73,5	88,9	54,2	72,9	91,6
$\sqrt{2}$	70,3	76,2	82,1	65,2	75,8	86,4	60,2	75,0	89,8			
2	72,2	77,5	82,8	67,8	77,3	86,8						
$2\sqrt{2}$	74,6	79,5	84,4									

Różnica między oszacowaniem górnym a dolnym zależy głównie od stosunku n_2/n_1 , nawet jednak dla stosunku 4 nie jest jeszcze dosyć duża, żeby odebrać oszacowaniom sens praktyczny. W tym miejscu proponujemy czytelnikowi wrócić do rysunku 5 i przekonać się, jaki słaby jest warunek zawierania się krzywej wilgotności między krzywymi o parametrach $n = 1$ i $n = 4$.

Dla ustalonego stosunku n_2/n_1 oszacowania, ich rozstęp i ich średnie arytmetyczne prawie nie zależą od wartości n_1 i n_2 . Widzimy stąd, że wybór liczb do ciągu (7) wykładników nie miał istotnego wpływu na nasze wnioski. Widzimy ponadto, i to jest wniosek najważniejszy, że średnie oszacowania przy bardzo słabym założeniu 1 są bardzo stałe: wahają się wokół okrągłej wartości $\frac{3}{4}$.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że nasze oszacowania dolne i górne są zapewne bardzo ostrożne, dotyczą bowiem skrajnych i mało realnych przypadków, gdy funkcja $w = f(r)$ ma niezbyt przyrodniczy charakter, zilustrowany rysunkami 3 i 4.

Bardzo nęcące byłoby wzmocnienie założenia 1 i poszukiwania lepszych oszacowań \bar{r} . Przyjmijmy więc nowe założenie.

ZAŁOŻENIE 2. *Funkcja $f(r)$ jest postaci $w = 1 - r^n$.*

Zwróćmy uwagę, że to założenie, którego ogólnej słuszności nie zamierzamy bronić, jest ciągle jeszcze słabsze od zacytowanego wyniku doświadczalnego J. Grochowiny, która w pewnym przypadku znalazła wprost $w = 1 - r^2$. Z równania (2) znajdujemy wówczas

$$(9) \quad \bar{r} = \left(\frac{3}{n+3} \right)^{1/n}.$$

Wyniki spisano w tabelicy 2.

TABLICA 2

Oszacowanie \bar{r} (w procentach)
przy założeniu 2

n	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4
\bar{r}	75	76	77	79	81

Oczywiście tym razem mamy przy każdej wartości n punktowe oszacowanie pierwiastka \bar{r} . Oszacowania dla różnych n mało się różnią między sobą i nieznacznie tylko przekraczają $\frac{3}{4}$.

Ostatecznie możemy zalecić pobieranie próbek pierwotnych z beli tytoniu na dowolnej linii przechodzącej przez środek beli, w odległości od powierzchni równej $\frac{1}{8}$ długości odcinka przebicia.

Ze względów praktycznych w rachubę wchodzi tu trzy osie symetrii prostopadle do ścian i cztery przekątne główne. Lepsze wydają się osie symetrii, bo w okolicy naroży prawo zmian wilgotności może być, jak już wiemy, obarczone pewnymi anomaliami.

Na zakończenie przypomnimy Czytelnikowi, że wartość \bar{r} służy tylko do zlokalizowania miejsca, z którego należy pobrać próbkę do badania wilgotności. Sądzymy, że w wielu przypadkach wybiera się to miejsce w sposób o wiele bardziej bez troski, niż myśmy to uczynili.

Uwaga. Nasze rozważania nie ograniczają się ani do kostki prostopadłościennej, ani do tytoniu. Dotyczą one pewnej własności dowolnej wypukłej bryły ośrodka ciągłego.

Praca cytowana

[1] P. Mikulski, W. Rudzki, K. Wiśniewski, *Badanie właściwości średnich towarów bezkształtnych pakowanych w prostopadłościenne bele*, Zastosowania Matematyki 4 (1959), str. 332-340.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 28. 5. 1958

Я. ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

ПОВЕРХНОСТИ СРЕДНЕЙ ВЛАЖНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Пусть w — некоторая функция определенная в каждой точке Q' выпуклого тела произвольной формы, зависящая только от положения точки. Обозначим через P постоянную точку внутри тела, через Q точку пересечения поверхности тела полупрямой PQ' и, наконец, через \bar{r} отношение PQ'/PQ .

Предположим, что на каждой полупрямой определяется w при помощи одной и той же функции $w = f(r)$. Доказываем тогда, что поверхности постоянных значений w являются гомотетическим преобразованием поверхности тела, причем центр гомотетического преобразования лежит в точке P ; далее доказывается, что поверхность такого же постоянного значения w как среднее значение для всего тела характеризуется параметром \bar{r} удовлетворяющим уравнению (2).

Для оценки \bar{r} предполагаем, что функция $w = f(r)$ невозрастающая и находится в замкнутом отрезке, ограниченном функциями вида (3) и (4). Оказывается, что изменяя в очень широких границах параметры ограничивающих функций, получаем всегда среднюю оценку \bar{r} близкую $\frac{3}{4}$.

Эти результаты применяются при нахождении в табачной кипе мест, локальная влажность которых в приближении равна средней влажности целой кипы. Это дает возможность указания наилучшего места откуда следует pobирать выборки табачных листьев для определения влажности всей кипы.

J. ODERFELD (Warszawa)

SURFACES OF MEAN HUMIDITY

SUMMARY

Let w denote a certain function defined at every point Q' of a convex solid of an arbitrary shape and dependent only on the position of the point. Denote by P a fixed point inside the solid, by Q the point at which the surface of the solid is pierced by a half-line PQ' and by \bar{r} the ratio PQ'/PQ .

We assume that on every half-line w is defined by the same function $w = f(r)$. Then we prove that the surfaces $w = \text{const}$ are homothetical with the surface of the solid, the homothety centre being at P , and that a surface with the same constant value w as the mean value for the whole solid is characterized by a parameter \bar{r} satisfying equation (2).

In order to estimate \bar{r} we make a weak assumption that the function $w = f(r)$ is non-increasing and contained in a closed interval bounded by functions of the shapes (3) and (4). It turns out that changing within a very wide range the parameters of the bounding functions we always obtain the mean estimate of \bar{r} close to $\frac{3}{4}$.

We apply the above results in determining those places in a bale of tobacco where local humidity is approximately equal to mean humidity. This enables us to indicate the optimal place from which a sample of tobacco leaves should be drawn for determining the humidity of the bale.