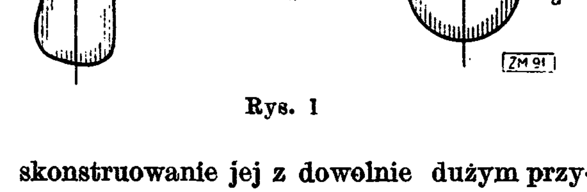
F. LEJA (Kraków)

KONSTRUKCJA FUNKCJI ODWZOROWUJĄCEJ KONFOREMNIE DOWOLNY OBSZAR PŁASKI JEDNOSPÓJNY NA KOŁO

1. Wstęp. Niech D będzie dowolnym obszarem płaskim jednospójnym o brzegu zawierającym więcej niż jeden punkt i $z=a$ dowolnym punktem tego obszaru. B. Riemann wypowiedział twierdzenie, że *istnieje funkcja*

$$w=g(z) \tag{1}$$

analityczna w obszarze D, odwzorowująca ten obszar konforemnie na koło[1] $K\{|w|<1\}$, *tak że punktowi $z=a$ odpowiada środek $w=g(a)=0$ koła K* (rys. 1). Funkcja odwzorowująca $g(z)$ jest dokładnie jedna, gdy żądamy, by jej pochodna $g'(z)$ miała w danym punkcie $z=a$ wartość rzeczywistą dodatnią.



Rys. 1

Twierdzenie to okazało się ważne zarówno dla teorii funkcji analitycznych, jak i w zastosowaniach matematyki w technice, toteż podano wiele dowodów istnienia funkcji odwzorowującej. W praktyce jest potrzebne wyznaczenie dla danego obszaru D i punktu $z=a$ funkcji $g(z)$ lub przynajmniej skonstruowanie jej z dowolnie dużym przybliżeniem. Znane jednak dowody twierdzenia Riemanna nie zawierają na ogół dogodnej dla celów praktycznych konstrukcji funkcji szukanej[2].

---

[1]) Tzn. wszelkim dwóm różnym punktom z_1 i z_2 obszaru D odpowiadają różne wartości $g(z_1)$ i $g(z_2)$, a zbiór wartości $w=g(z)$ pokrywa całe koło K. Odwzorowanie konforemne jest równokątne z zachowaniem zwrotu.

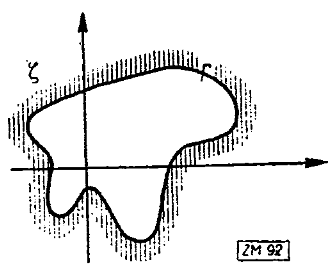
[2]) Oryginalny dowód Riemanna zawierał pewne luki. Pierwszy poprawny dowód podał Koebe [1], [2]. Kilka dowodów pochodzi od Carathéodory'ego [3] i innych.

W niniejszym artykule podam dla najogólniejszych obszarów[3]) opis dość prostej konstrukcji funkcji $g(z)$. Konstrukcja ta nadaje się, jak sądzę, do obliczeń praktycznych.

2. Punkty ekstremalne. Oznaczmy przez B brzeg danego obszaru D i tak przesuńmy układ współrzędnych, by dany punkt $z=a$ znalazł się w początku współrzędnych. Mamy więc $a=0$ (rys. 1). Przekształcenie

$$\zeta = \frac{1}{z} \tag{2}$$

odwzorowuje brzeg B obszaru D na brzeg Γ pewnego obszaru nieograniczonego G na płaszczyźnie zmiennej ζ (rys. 2). Brzeg Γ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, bo punkt $\zeta=\infty$ nie leży na Γ jako obraz punktu $z=0$ nie leżącego na B.



Rys. 2

Niech n będzie dowolną ustaloną liczbą naturalną $1,2,\ldots$ Obierzmy na Γ układ $n+1$ punktów dowolnych $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ i oznaczmy przez $V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ iloczyn wszystkich wzajemnych odległości tych punktów od siebie, tj.

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} |\zeta_i - \zeta_k| . \tag{3}$$

Gdy punkty $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ zmieniają się na Γ, iloczyn (3) również ulega zmianie i osiąga pewne maksimum. Niech układ punktów

$$\eta_{0n}, \eta_{1n}, \ldots, \eta_{nn} \tag{4}$$

zbioru Γ będzie taki, by iloczyn $V(\eta_{0n}, \eta_{1n}, \ldots, \eta_{nn})$ był możliwie największy, to jest by dla wszystkich układów $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ na Γ zachodziła nierówność

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \leqslant V(\eta_{0n}, \eta_{1n}, \ldots, \eta_{nn}) . \tag{5}$$

Układ punktów (4) spełniających warunek (5) nazwijmy n-tym *układem ekstremalnym* odpowiadającym obszarowi D, a poszczególne punkty (4) *punktami ekstremalnymi*. Punkty (4) leżą na Γ, więc punkty $1/\eta_{0n}$, $1/\eta_{1n}, \ldots, 1/\eta_{nn}$ leżą na brzegu B obszaru D[4]). Każdej liczbie naturalnej n odpowiada co najmniej jeden układ ekstremalny (4); gdy jest ich więcej,

---

[3]) Obszar D może być ograniczony (jak na rysunku 1) lub nie. Gdy nie jest ograniczony, może mieć punkty zewnętrzne lub nie.

[4]) Jeżeli obszar D nie jest ograniczony, to punkt $z=\infty$ może leżeć na brzegu B i wtedy Γ zawiera punkt $\zeta=0$. Jedna z liczb (4) może być wówczas równa zeru, a jej odwrotność $1/\eta_{kn}=\infty$.

wybieramy jeden z nich w sposób dowolny. Jeżeli zmienimy porządek punktów układu (4), układ pozostanie ekstremalny.

3. Funkcje aproksymacyjne. Mając dany układ ekstremalny (4) oznaczmy przez d_{kn} dla $k=0,1,\dots,n$ wyrażenie

$$(6)\qquad d_{kn}=|(\eta_{kn}-\eta_{0n})\dots(\eta_{kn}-\eta_{k-1,n})(\eta_{kn}-\eta_{k+1,n})\dots(\eta_{kn}-\eta_{nn})|^{1/n}.$$

Jest to średnia geometryczna wszystkich odległości punktu η_{kn} od pozostałych punktów (4). Możemy założyć, że punkty (4) są tak uporządkowane, by było

$$(7)\qquad d_{0n}\leqslant d_{1n}\leqslant\dots\leqslant d_{nn}.$$

Dowodzi się [5]), że ciągi $\{d_{0n}\}$ i $\{d_{nn}\}$ są zbieżne, oba do tej samej granicy dodatniej d:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} d_{0n}=\lim_{n\to\infty} d_{nn}=d>0.$$

Granica d zależy oczywiście od zbioru Γ (a przez to od brzegu B obszaru D) i nosi nazwę *rozwartości* lub *średnicy pozaskończonej* zbioru Γ. Wobec nierówności (7) każdy ciąg $\{d_{kn}\}$, gdzie k zależy od n i przybiera jedną z wartości $0,1,\dots,n$, jest również zbieżny do granicy d.

Oznaczmy przez $g_{kn}(z)$ dla $k=0,1,\dots,n$ funkcję analityczną określoną za pomocą punktów ekstremalnych (4) przez wzór

$$(9)\qquad g_{kn}(z)=\frac{z}{\sqrt[n]{(1-z\eta_{0n})\dots(1-z\eta_{k-1,n})(1-z\eta_{k+1,n})\dots(1-z\eta_{nn})}}\,d_{kn},$$

przy czym wartość mianownika w punkcie $z=0$ niech równa się 1. Przy tak unormowanym mianowniku każda funkcja (9) jest w obszarze D jednoznaczna, bo obszar jest jednospójny. Funkcje (9) są przybliżeniami szukanej funkcji odwzorowującej (1), można bowiem udowodnić

TWIERDZENIE [6]). *Ciąg $\{g_{0n}(z)\}$ jest zbieżny w obszarze D do funkcji analitycznej $g(z)$,*

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty} g_{0n}(z)=g(z),$$

która odwzorowuje obszar D na koło $|w|<1$, tak że $g(0)=0$ i $g'(0)>0$.

Zbieżność (10) *jest jednostajna w każdym obszarze domkniętym i ograniczonym, zawartym wewnątrz D.*

---

[5]) Por. J. Górski [4].

[6]) Dowód nie jest opublikowany, można go jednak otrzymać opierając się na pracach [5] i [6].

Z istnienia granic (8) i (10) łatwo wywnioskować, że każdy ciąg $\{g_{kn}(z)\}$, gdzie k zależy od n i przybiera jedną z wartości $0,1,\ldots,n$, jest również zbieżny w obszarze D do tej samej funkcji odwzorowującej [7]):

$$\lim_{n\to\infty} g_{kn}(z) = g(z). \tag{11}$$

Można przy tym okazać, że funkcje (9) spełniają przy wszelkich k i n nierówność

$$1 \leqslant |g_{kn}(z)| \tag{12}$$

na brzegu i zewnątrz obszaru D i że przy każdym ustalonym z najmniejszy z modułów $|g_{0n}(z)|, |g_{1n}(z)|, \ldots, |g_{nn}(z)|$ spełnia nierówność

$$\min_{(k)} |g_{kn}(z)| \leqslant \sqrt[n]{n+1} \tag{13}$$

na całej płaszczyźnie.

4. Wnioski i uwagi. Niech z_0 będzie dowolnym ustalonym punktem obszaru D. Aby obliczyć wartość funkcji odwzorowującej $g(z)$ dla $z=z_0$ z danym przybliżeniem, wystarczy wyznaczyć dla dostatecznie dużego wskaźnika n położenie punktów ekstremalnych (4) i następnie obliczyć wartość funkcji (9) dla $z=z_0$. Wielkość wskaźnika n zależy od żądanego przybliżenia; można go oszacować znając obszar D i odległość punktu z_0 od brzegu B.

Funkcja (9) jest dość prostego kształtu, więc obliczenie $g_{kn}(z_0)$ nie przedstawia trudności. Główna trudność polega na wyznaczeniu dla danego n punktów ekstremalnych (4). Położenie tych punktów na brzegu Γ można by, jak sądzę, wyznaczyć eksperymentalnie. W tym celu należałoby rozmieścić na Γ układ n punktów materialnych mogących się poruszać swobodnie po Γ i odpychających się z siłą odwrotnie proporcjonalną do odległości [8]). Położeniom układu w równowadze stałej odpowiadać będą układy ekstremalne.

Zauważmy, że funkcje (9) mają na brzegu obszaru D bieguny w punktach $1/\eta_{0n}, 1/\eta_{1n}, \ldots, 1/\eta_{nn}$. Mimo to, ciąg $\{\min_{(k)} |g_{kn}(z)|\}$ zmierza na brzegu B dość szybko do granicy 1, bo na mocy (12) i (13) mamy

$$1 \leqslant \min_{(k)} |g_{kn}(z)| \leqslant \sqrt[n]{n+1} \quad \text{dla} \quad z \in B.$$

[7]) Wynik ten utrzyma się, gdy we wzorze (9) czynnik d_{kn} zastąpimy przez czynnik stały $d = \lim_{n\to\infty} d_{kn}$.

[8]) Mamy nadzieję, że czytelnicy rozwiną myśl Autora podając projekty realizacji tego pomysłu (*Redakcja*).

Prace cytowane

[1] P. Koebe, *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I*, Journal für reine und angewandte Mathematik 145 (1914), str. 177-223.

[2] — *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung II*, Acta Mathematica 40 (1915), str. 251-290.

[3] C. Carathéodory, *Conformal representation*, London 1932.

[4] J. Górski, *Remarque sur le diamètre transfini des ensembles plans*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 23 (1950), str. 90-94.

[5] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 12 (1933), str. 57-71.

[6] — *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle*, Annales de la Soc. Polon. Math. 14 (1933), str. 116-134.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 30. 9. 1953 r.

Ф. ЛЕЯ (Краков)

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ОДНОСВЯЗНУЮ ОБЛАСТЬ В КРУГ

РЕЗЮМЕ

Пусть D произвольная односвязная область, которой граница B не сводится к единственной точке. Предполагая, что точка $z=0$ принадлежит к D, обозначим через Γ образ границы B при отображении $\zeta=1/z$. Пусть $\eta_{0n}, \eta_{1n}, \dots, \eta_{nn}$ система $n+1$ точек на Γ, при которых произведение

$$\prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} |\eta_{in}-\eta_{kn}|$$

принимает максимальное значение. Обозначим

$$d_{kn}=|(\eta_{kn}-\eta_{0n})\dots(\eta_{kn}-\eta_{k-1,n})(\eta_{kn}-\eta_{k+1,n})\dots(\eta_{kn}-\eta_{nn})|^{1/n}$$

и построим функции

$$g_{kn}(z)=\frac{z}{\sqrt[n]{(1-z\eta_{0n})\dots(1-z\eta_{k-1,n})(1-z\eta_{k+1,n})\dots(1-z\eta_{nn})}}d_{kn} \quad \text{для} \quad k=0,1,\dots,n.$$

В работе доказывается, что в области D существует предел

$$\lim_{n\to\infty} g_{kn}(z)=g(z)$$

не зависящий от индекса k (k может меняться вместе с n) и что функция $w=g(z)$ конформно и взаимооднозначно отображает область D в круг $|w|<1$, причем $g(0)=0$ и $g'(0)>0$.

F. LEJA (Kraków)

CONSTRUCTION OF THE FUNCTION MAPPING CONFORMALLY AN ARBITRARY SIMPLY CONNECTED DOMAIN UPON A CIRCLE

SUMMARY

Let D be an arbitrary simply connected domain, with the boundary B, containing more than one point. We assume that the point $z=0$ belongs to D and denote by Γ the image of the boundary in the transformation $\zeta=1/z$. Let $\eta_{0n},\eta_{1n},\ldots,\eta_{nn}$ be a system of $n+1$ points of Γ, which maximizes the product

$$\prod_{0\leqslant i<k\leqslant n}|\eta_{in}-\eta_{kn}|.$$

Let

$$d_{kn}=|(\eta_{kn}-\eta_{0n})\ldots(\eta_{kn}-\eta_{k-1,n})(\eta_{k-n}-\eta_{k+1,n})\ldots(\eta_{kn}-\eta_{nn})|^{1/n},$$

and let us construct the functions

$$g_{kn}(z)=\frac{z}{\sqrt[n]{(1-z\eta_{0n})\ldots(1-z\eta_{k-1,n})(1-z\eta_{k+1,n})\ldots(1-z\eta_{nn})}}\,d_{kn}\quad\text{for}\quad k=0,1,\ldots,n.$$

The paper shows the existence of the limit

$$\lim_{n\to\infty}g_{kn}(z)=g(z)$$

in the domain D and its independence of the index k (k may vary along with n), and that the function $w=g(z)$ maps conformally the domain D upon the circle $|w|<1$ in such a way that $g(0)=0$ and $g'(0)>0$.