H. STEINHAUS (Wrocław)

LICZBY ZŁOTE I ŻELAZNE

Wstęp. Przy tak zwanym złotym podziale odcinka jednostkowego na dwie części z i $1-z$, to znaczy takim, żeby było $1:z = z:(1-z)$, długość z większej części wynosi $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Jest

$$(1)\qquad z = 0{,}61803398875+\varepsilon, \quad \text{przy czym} \quad |\varepsilon| < 5\cdot 10^{-12}.$$

Wyrazy ciągu $\{nz\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazwiemy *liczbami złotymi*, wyrazy ciągu $\{nz-[nz]\}$ *mantysami* liczb złotych, a wyrazy ciągu $[nz]$ *cechami* liczb złotych (przez $[r]$ oznaczamy część całkowitą liczby r). Długość $1-z$ krótszej części odcinka jednostkowego wynosi $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. Jest

$$(2)\qquad s = 1-z = 0{,}38196601125\ldots$$

z dokładnością taką jak (1). Wyrazy ciągu $\{ns\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazwiemy *liczbami srebrnymi*, a ich cechy i mantysy określimy analogicznie jak poprzednio. Rozwinięcie łańcuchowe liczby z jest

$$(3)\qquad z = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

Liczba z jest niewymierna i — jak wszystkie liczby niewymierne v — mą własność ekwipartycji: Jeżeli K jest kołem o obwodzie 1, Q dowolnym punktem na K, a $P_n(v)$ punktem końcowym łuku o długości nv, którego początek jest w Q, a który odkładamy na K w kierunku ustalonym (np. przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), to ciąg $\{P_n\}$ pokrywa koło K równomiernie. Wyraźniej: Dla dowolnego łuku J na kole K liczba $L(n)$ tych k, które spełniają warunki $P_k \epsilon J$, $0 < k \leqslant n$, ma własność graniczną

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty} L(n)/n = |J| \quad (\text{gdzie } |J| \text{ oznacza długość łuku } J).$$

W. Sierpiński [3] należał do pierwszych, którzy udowodnili to ogólne twierdzenie. A. Ostrowski [1] wykazał, że dla liczb v, których rozwinięcie łańcuchowe ma same mianowniki nie przewyższające liczby M, zachodzi dla $n \geqslant 10$ nierówność

$$|L(n)-n|J|| \leqslant 36\, M \log n. \tag{5}$$

Ponieważ — w myśl wzoru (3) — dla z można wziąć za M jedność, więc twierdzenie Ostrowskiego (które zaostrza ogólne twierdzenie o ekwipartycji dla pewnej klasy liczb niewymiernych) daje dla z więcej, niż dla jakiejkolwiek innej liczby. Nie można jednak wnosić stąd, jakoby żadna liczba nie miała takiej dobrej ekwipartycji, jak z — liczba s określona we wzorze (2) nie ustępuje pod tym względem liczbie z, co jest widoczne z tego, że podstawiając w naszym geometrycznym obrazie za v liczbę s, otrzymujemy ciąg $\{P_n\}$ na kole K, symetryczny względem średnicy przechodzącej przez punkt Q do ciągu otrzymanego przy $v = z$. Jest jednak wysoce prawdopodobne, że te dwie liczby (powstające przy złotym podziale odcinka 1) mają wyższy stopień ekwipartycji niż jakiekolwiek inne. Trudność sformułowania tej tezy jest, jak się zdaje, niemała i dlatego przedwczesna jest troska o jej dowód.

Empiryczne badanie ciągu $\{P_n(v)\}$ dla $v = z$ doprowadziło J. Oderfelda i C. Rajskiego do wykrycia kilku ciekawych jego własności:

1° przy każdym ustalonym n punkty $P_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dzielą koło K na n łuków, które mają co najwyżej 3 różne długości;

2° punkt $P_{n+1}(z)$ dzieli łuk, w który wpada, sposobem złotym, tj. w stosunku $z:s$.

Nie wymieniam tu innych spostrzeżeń J. Oderfelda i C. Rajskiego. Powiadomiony o nich zauważyłem, że własność 1° przypada każdemu ciągowi $P_n(v)$, byle v było liczbą niewymierną, a także tę samą ogólność mają dwa zjawiska:

3° punkt $P_{n+1}(v)$ pada zawsze w najdłuższy z łuków wyznaczonych przez układ $P_k(v)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

4° jeżeli trzy długości łuków wyznaczonych przez ten układ oznaczymy przez $D_1 > D_2 > D_3$, to $D_1 = D_2 + D_3$.

Moje spostrzeżenia poglądowe zamienił S. Świerczkowski na twierdzenia, dając na nie dowody [4].

Przypomnijmy tu jeszcze twierdzenie

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(kv), \tag{6}$$

ważne dla każdej funkcji $f(x)$ o okresie 1, całkowalnej R w przedziale $(0, 1)$ i określonej w przedziale $(0, \infty)$ (tutaj v jest dodatnie i niewymierne). To twierdzenie (używane przez praktyków od dawna, np. przy obliczaniu średniego stanu wody w portach) wynika z twierdzenia o ekwipartycji.

1. Tablica liczb złotych (TAu). Ta tablica jest po prostu listą wielokrotności naturalnych nz liczby z i ma służyć do kwadratury mechanicznej w myśl wzoru (6). Do celów praktycznych wystarczy obliczyć liczby złote dla n od 1 do 500 z dokładnością do 4 miejsc dziesiętnych. Nastawiając na maszynie zaokrągloną wartość $z = 0{,}618034$ i dodając ją do siebie 500 razy, otrzymamy po zaokrągleniu do 4 znaku mantys tablicę, o której mowa (tablica 1). W ostatniej kolumnie podaliśmy liczby srebrne — można je uzyskać jako dopełnienia do n liczb złotych; oznaczmy tę drugą tablicę przez TAr. Oto przykład użycia tablicy 1:

Przy rafinacji cukru używa się kwasu węglowego do strącania wapna. Należy zbadać, czy ciśnienie CO_2 w kolumnie rafinacyjnej utrzymuje się we właściwych granicach. Bierzemy dobę za jednostkę i odczytujemy indykator ciśnienia w momentach odpowiadających pierwszym 10 pozycjom TAu. Cechy wskazują dobę: widać, że ostatnie odczytanie nastąpi 7-ego dnia. Oznaczenie godzin i minut wymaga zamiany mantys na te jednostki; zbędne jest sporządzanie do tego celu osobnych tablic, gdyż Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego dodaje do każdego zeszytu taką tabliczkę na kartonie luźnym — krok tabliczki wynosi około kwadransa, co wystarcza w praktycznym przykładzie tu podanym. Jeżeli obliczymy średnią

TABLICA 1

n	nz	ns
1	0,6180	0,3820
2	1,2361	0,7639
3	1,8541	1,1459
4	2,4721	1,5279
5	3,0902	1,9098
6	3,7082	2,2918
7	4,3262	2,6738
8	4,9443	3,0557
9	5,5623	3,4377
10	6,1803	3,8197
. . . . .	. . . . .	. . . . .
500	309,0170	190,9830

$$\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i \tag{7}$$

z 10 obserwacji tak uzyskanych, otrzymamy — w przybliżeniu, jak uczy wzór (6) — średni stan ciśnienia w ciągu tygodnia; jeżeli obliczymy także średnią

$$\overline{y^2} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i^2$$

z kwadratów obserwacji, to uzyskamy w postaci $\sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}$ ocenę wahań ciśnienia, w myśl tego samego wzoru (6).

Czytelnikowi nasuną się zapewne dwa pytania:

1° Dlaczego nie odczytujemy indykatora o stałych godzinach?

2° Dlaczego powołujemy się na wzór (6), ważny tylko dla funkcji periodycznych?

Wyobraźmy sobie, że odczytujemy ciśnienie codziennie o 8^h00^m oraz 20^h00^m. Jeżeli proces ma okres dobowy, to nawet kilkadziesiąt odczytań nie da nam lepszego przybliżenia do prawdziwej średniej niż pierwsze dwie, natomiast rozmieszczanie momentów według TAu gwarantuje nam coraz dokładniejszą informację o prawdziwej średniej dzięki doskonałej ekwipartycji ciągu liczb złotych. To jest odpowiedź na pytanie 1°, gdy zachodzi okresowość dobowa. Jeżeli jednak jej nie ma, to średnią można traktować jako klasyczną kwadraturę przy podziale na równe części przedziału objętego obserwacjami. Wtedy rozłożenie ich na cały tydzień uwzględnia różnice w toku procesu między różnymi dobami (np. depresję poniedziałkową), a także między porami dnia. Przy periodyczności dobowej (dostatecznie pewnej) można skrócić odstępy między odczytywaniami używając kolumny *ns* (czyli TAr): ostatnia obserwacja wypadnie już czwartego dnia. Przy założeniu periodyczności można mianowicie zrezygnować ze śledzenia różnic między dobami, a 10 obserwacji funkcji o okresie 1 rozstawionych według TAr ($n = 1, 2, \ldots, 10$) daje teoretycznie to samo, co 10 obserwacji rozstawionych według TAu ($n = 1, 2, \ldots, 10$), gdyż mantysy pierwszych tworzą w przedziale $(0, 1)$ układ punktów symetrycznych do układu mantys drugich.

Istotną zaletą TAu (i TAr) jest to, że umożliwia przedłużanie ciągu obserwacji. Tej zalety nie mają sposoby klasyczne. Przypuśćmy, że — w przykładzie rafinacji cukru — mamy indykator automatyczny, który zapisuje krzywą ciśnienia nad osią czasu. Możemy wtedy sięgać dowolnie daleko wstecz i uzyskiwać coraz dokładniejsze oszacowanie średniego ciśnienia i jego wahania. Różnica między sposobami klasycznymi a tą metodą objawia się jednak najwyraźniej, gdy ograniczymy się do jednej doby. Użyjemy do tego mantys TAu. Dają one 10 momentów czasowych w przedziale $(0,1)$ (jednostką jest doba), $t_1, t_2, \ldots, t_{10}$. W tych punktach zmierzymy rzędne wykresu i obliczymy średnią (7). Jeżeli później zechcemy obliczyć średnią dokładniej, np. z 12 rzędnych, to wystarczy wziąć t_{11} i t_{12} jako dwie następne mantysy TAu. Klasyczny sposób każe dzielić $(0, 1)$ na 10 równych przedziałów i brać momenty t_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$) w ich środkach; gdy potem trzeba wstawić nowe dwa punkty, otrzymujemy jaskrawą niejednostajność rozstawienia, co sprawia, że średnia z 12 obserwacyj będzie niewiele lepsza niż z 10. Doskonałość ekwipartycji ciągu liczb złotych zapobiega tej niedogodności. Może to mieć znaczenie np. w meteorologii: Jeżeli przyjmie się umowę o używaniu TAu do wyboru momentów obserwacyjnych, będzie można w razie potrzeby porównania średnej, uzyskanej z krzywej dobowej w 10 punktach, ze średnią uzyskaną tejże doby w innym obserwatorium z 15 punktów, dodać 5 punktów czasowych na pierwszym diagramie, co byłoby niemożliwe przy klasycznym sposobie.

2. Tablica liczb żelaznych (TFe). Gdy liczby kolumny n tablicy 1 przestawimy tak, żeby odpowiadające im mantysy TAu uszykowały się rosnąco, to otrzymamy dla pierwszych 10 pozycji szyk

$$5, 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8. \tag{8}$$

Już tu możemy zauważyć, że co druga liczba należy do grupy 1-5, tak że na przemian występują liczby niewiększe i większe od 5, i że suma pierwszych pięciu liczb jest niemal równa sumie pozostałych: 28, 27. Jeżeli TAu przedłużymy aż do $n = 10\,000$ i postąpimy podobnie jak przed chwilą, to otrzymamy permutację liczb naturalnych od 1 do 10000 włącznie. Tak powstanie tablica liczb żelaznych (TFe); nazwa ta jest nieścisła, bo tablica obejmuje liczby naturalne od 1 do 10000 (każdą raz i tylko raz), tak że nazwa oznacza tu tylko proces permutacji tu określony. W TFe piszemy jedynkę jako 0001, dwójkę jako 0002, itd., a 10000 jako 0000. W pełnej tablicy TFe relatywna kolejność liczb 0001, 0002, ..., 0010 jest zgodna z szykiem (8).

L. Zubrzycka z Grupy Zastosowań Przyrodniczych i Gospodarczych Instytutu Matematycznego PAN wykonała plan tu naszkicowany, co wymagało efektywnego przedłużenia TAu, napisania każdej mantysy na osobnej karcie wraz z odpowiadającą jej liczbą n i uszykowania kart według rosnących mantys. Było to praktycznie możliwe dzięki temu, że kolejność dowolnych kart nie zmienia się przez dodanie nowych, które wstawia się zawsze między karty już ustawione. Warto zauważyć, że przy użyciu TAr zamiast TAu otrzymalibyśmy zamiast TFe tablicę uszykowaną przeciwnie (co można łatwo sprawdzić na przykładzie (8)). TFe jest napisana na 25 stronicach, które należy czytać sposobem książkowym, to jest wiersz za wierszem, wracając po przeczytaniu ostatniej liczby na dole stronicy 25 do pierwszej liczby pierwszego wiersza stronicy 1 — taka interpretacja TFe ułatwia nie tylko jej użytek, ale także uwidocznia jej własności. Podajemy stronicę 13 i 14 TFe (str. 56-57).

Wyobraźmy sobie mianowicie na kole K punkty P_n, o których była mowa w § 1. Wtedy widać natychmiast, że TFe jest następstwem liczb n takim, jak następstwo indeksów n punktów P na kole K. Weźmy 100 kolejnych liczb TFe, zaczynając w dowolnym miejscu i w razie potrzeby — korzystając z cyklicznego sposobu czytania TFe. Tym liczbom odpowiada na K sto punktów P_n. Przy ustalonym kierunku (antyzegarowym) niech A będzie pierwszym, a B ostatnim punktem owej setki na K. W łuku $\widehat{AB}$ nie ma zatem innych indeksów n, jak owa setka liczb wybranych w TFe i stojących w tablicy w zwartym szyku od liczby a do liczby b, przy czym $P_a = A$, $P_b = B$. Własność ekwipartycji daje wniosek, że długość łuku $\widehat{AB}$ jest bliska 0,01, bo $100:10\,000 = 0{,}01$. Weźmy teraz dla przykładu dwie liczby czterocyfrowe różniące się o 1500, np. 3457

13

9298	2533	6714	4130	8311	1546	5727	9908	3143	7324
0559	4740	8921	2156	6337	3753	7934	1169	5350	9531
2766	6947	0182	4363	8544	1779	5960	3376	7557	0792
4973	9154	2389	6570	3986	8167	1402	5583	9764	2999

7180	0415	4596	8777	2012	6193	3609	7790	1025	5206
9387	2622	6803	0038	4219	8400	1635	5816	9997	3232
7413	0648	4829	9010	2245	6426	3842	8023	1258	5439
9620	2855	7036	0271	4452	8633	1868	6049	3465	7646

0881	5062	9243	2478	6659	4075	8256	1491	5672	9853
3088	7269	0504	4685	8866	2101	6282	3698	7879	1114
5295	9476	2711	6892	0127	4308	8489	1724	5905	3321
7502	0737	4918	9099	2334	6515	3931	8112	1347	5528

9709	2944	7125	0360	4541	8722	1957	6138	3554	7735
0970	5151	9332	2567	6748	4164	8345	1580	5761	9942
3177	7358	0593	4774	8955	2190	6371	3787	7968	1203
5384	9565	2800	6981	0216	4397	8578	1813	5994	3410

7591	0826	5007	9188	2423	6604	4020	8201	1436	5617
9798	3033	7214	0449	4630	8811	2046	6227	3643	7824
1059	5240	9421	2656	6837	0072	4253	8434	1669	5850
3266	7447	0682	4863	9044	2279	6460	3876	8057	1292

5473	9654	2889	7070	0305	4486	8667	1902	6083	3499
7680	0915	5096	9277	2512	6693	4109	8290	1525	5706
9887	3122	7303	0538	4719	8900	2135	6316	3732	7913
1148	5329	9510	2745	6926	0161	4342	8523	1758	5939

3355	7536	0771	4952	9133	2368	6549	3965	8146	1381
5562	9743	2978	7159	0394	4575	8756	1991	6172	3588
7769	1004	5185	9366	2601	6782	0017	4198	8379	1614
5795	9976	3211	7392	0627	4808	8989	2224	6405	3821

8002	1237	5418	9599	2834	7015	0250	4431	8612	1847
6028	3444	7625	0860	5041	9222	2457	6638	4054	8235
1470	5651	9832	3067	7248	0483	4664	8845	2080	6261
3677	7858	1093	5274	9455	2690	6871	0106	4287	8468

1703	5884	3300	7481	0716	4897	9078	2313	6494	3910
8091	1326	5507	9688	2923	7104	0339	4520	8701	1936
6117	3533	7714	0949	5130	9311	2546	6727	4143	8324
1559	5740	9921	3156	7337	0572	4753	8934	2169	6350

3766	7947	1182	5363	9544	2779	6960	0195	4376	8557
1792	5973	3389	7570	0805	4986	9167	2402	6583	3999
8180	1415	5596	9777	3012	7193	0428	4609	8790	2025
6206	3622	7803	1038	5219	9400	2635	6816	0051	4232

14

8413	1648	5829	3245	7426	0661	4842	9023	2258	6439
3855	8036	1271	5452	9633	2868	7049	0284	4465	8646
1881	6062	3478	7659	0894	5075	9256	2491	6672	4088
8269	1504	5685	9866	3101	7282	0517	4698	8879	2114
6295	3711	7892	1127	5308	9489	2724	6905	0140	4321
8502	1737	5918	3334	7515	0750	4931	9112	2347	6528
3944	8125	1360	5541	9722	2957	7138	0373	4554	8735
1970	6151	3567	7748	0983	5164	9345	2580	6761	4177
8358	1593	5774	9955	3190	7371	0606	4787	8968	2203
6384	3800	7981	1216	5397	9578	2813	6994	0229	4410
8591	1826	6007	3423	7604	0839	5020	9201	2436	6617
4033	8214	1449	5630	9811	3046	7227	0462	4643	8824
2059	6240	3656	7837	1072	5253	9434	2669	6850	0085
4266	8447	1682	5863	3279	7460	0695	4876	9057	2292
6473	3889	8070	1305	5486	9667	2902	7083	0318	4499
8680	1915	6096	3512	7693	0928	5109	9290	2525	6706
4122	8303	1538	5719	9900	3135	7316	0551	4732	8913
2148	6329	3745	7926	1161	5342	9523	2758	6939	0174
4355	8536	1771	5952	3368	7549	0784	4965	9146	2381
6562	3978	8159	1394	5575	9756	2991	7172	0407	4588
8769	2004	6185	3601	7782	1017	5198	9379	2614	6795
0030	4211	8392	1627	5808	9989	3224	7405	0640	4821
9002	2237	6418	3834	8015	1250	5431	9612	2847	7028
0263	4444	8625	1860	6041	3457	7638	0873	5054	9235
2470	6651	8248	4067	1483	5664	9845	3080	7261	0496
4677	8858	2093	6274	3690	7871	1106	5287	9468	2703
6884	0119	4300	8481	1716	5897	3313	7494	0729	4910
9091	2326	6507	3923	8104	1339	5520	9701	2936	7117
0352	4533	8714	1949	6130	3546	7727	0962	5143	9324
2559	6740	4156	8337	1572	5753	9934	3169	7350	0585
4766	8947	2182	6363	3779	7960	1195	5376	9557	2792
6973	0208	4389	8570	1805	5986	3402	7583	0818	4999
9180	2415	6596	4012	8193	1428	5609	9790	3025	7206
0441	4622	8803	2038	6219	3635	7816	1051	5232	9413
2648	6829	0064	4245	8426	1661	5842	3258	7439	0674
4855	9036	2271	6452	3868	8049	1284	5465	9646	2881
7062	0297	4478	8659	1894	6075	3491	7672	0907	5088
9269	2504	6685	4101	8282	1517	5698	9879	3114	7295
0530	4711	8892	2127	6308	3724	7905	1140	5321	9502
2737	6918	0153	4334	8515	1750	5931	3347	7528	0763

i 4957, i zapytajmy, ile spośród tych stu liczb n odczytanych z TFe spełnia nierówność $3457 < n < 4957$?

Można to samo pytanie sformułować inaczej: Ile punktów ciągu $\{P_n\}$ $(3457 \leqslant n < 4957)$ pada na kole K w łuk $\widehat{AB}$? Ponieważ łuk ten jest setną częścią koła K, więc — w myśl zasady ekwipartycji — około jedna setna spośród 1500 punktów pada w ten łuk, a ponieważ punktów P_n było ogółem 1500, więc około 15 padnie w $\widehat{AB}$. Z tego wynika, że próbka stu liczb TFe wziętych kolejno, zaczynając od dowolnego miejsca tablicy, reprezentuje odpowiednio, to jest około piętnastu numerami, tę część partii numerowanej od 1 do 10000, która ma numery od 3457 do 4957. Ten przykład ujawnia zatem główną własność TFe, to jest własność *proporcjonalnej reprezentacji*, czyli własność rozstawiania kolejnych liczb TFe po wszelkich przedziałach $c \leqslant n < d$ proporcjonalnie do długości $d-c$ tych przedziałów. Powołaliśmy się przed chwilą na ekwipartycję skończonego ciągu $\{P_n\}$ $(3457 \leqslant n < 4957)$ na K; otóż ekwipartycję sformułowaliśmy dla ciągu zaczynającego się od P_1; żeby ją przenieść na ciąg o innym punkcie początkowym, wystarczy zauważyć, że ciąg $P_1, P_2, \ldots, P_{1500}$ przechodzi w ciąg jak wyżej przez obrót całej konfiguracji o $3456z$ w kierunku dodatnim i oczywiście obrót zachowuje własność ekwipartycji.

Oznaczmy i-tą liczbę TFe przez f_i. Jest $f_1 = 4181$, $f_2 = 8362, \ldots,$ $f_{10000} = 6765$. Różnice $f_{i+1} - f_i = r_i$ przybierają tylko trzy wartości. Jest $r_1 = 4181$, $r_2 = -6765$, $r_3 = 4181$, $r_4 = 4181$, $r_5 = -6765$, $r_6 = 4181$, $r_7 = -6765$, $r_8 = 4181$, $r_9 = 4181$, $r_{10} = -6765$, $r_{11} = -2584, \ldots, r_{9999} = 4181$, $r_{10000} = -2584$. Z trzech wartości 4181, -2584, -6765 pierwsza powtarza się najczęściej, druga najrzadziej. Widać też, że druga jest sumą pierwszej i trzeciej.

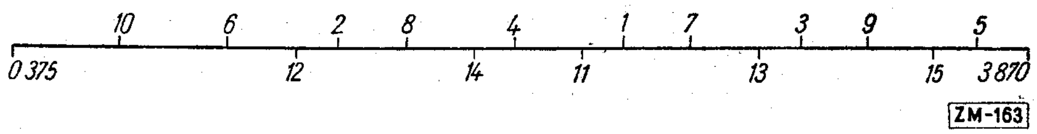
Aby pokazać, jak spełnia się zasadnicza własność TFe, która orzeka, że spośród k kolejnych jej liczb pada w odcinek obejmujący L kolejnych liczb naturalnych (którego końce leżą w przedziale od 1 do 10000) R liczb, przy czym

$$R \approx kL/10000, \tag{9}$$

weźmy np. wiersz 13 stronicy 13 TFe. Znajdujemy tam 10 liczb, po jednej z każdego przedziału $\langle 1, 1000\rangle$, $\langle 1001, 2000\rangle$, ..., $\langle 9001, 10000\rangle$. Z 20 liczb składających się na dwa ostatnie wiersze tejże stronicy 13 TFe powinno się znaleźć według (9) po jednej w każdej z 20 pięćsetek 1-500, 501-1000, ..., 9501-10000. W rzeczywistości jest tak począwszy od piątej pięćsetki: reguła (9) jest spełniona dokładnie w 16 odcinkach; w pierwszą i trzecią pięćsetkę padają po dwie liczby, a żadna nie pada w drugą ani w czwartą.

Nie można się dziwić, że własność (9) nie da się zamienić na ścisłą relację; spełnia się ona tym dokładniej, im większe są k i L w przykładzie przed chwilą podanym. Gdybyśmy zamiast 20 pięćsetek wzięli odcinki po tysiąc (1-1000, 1001-2000, ..., 9001-10000), reguła (9) zamieniłaby się w równość ścisłą.

Wyobraźmy sobie partię z 3496 sztuk numerowanych od 0375 do 3870. Chcemy z niej wybrać 10 sztuk w celu statystycznej wyceny wartości partii. Otwieramy gdziekolwiek TFe, np. na stronicy 13-ej i zaczynamy czytać ją od dowolnego miejsca, np. od 4-ego wyrazu 9-ego wiersza z góry, pomijając przy tym pozycje mniejsze od 0375 i większe od 3870. Tak otrzymujemy: 2478, 1491, 3088, 2101, 3698, 1114, 2711, 1724, 3321, 0737. Zbadajmy graficznie rozstawienie tych numerów w przedziale od 0378 do 3870; na podziałce, w której centymetr oznacza 200 sztuk, otrzymamy taki obraz (górne kreseczki oznaczają numery odczytane):



Rozstawienie jest zadowalające. W praktyce nie będziemy tego sprawdzali — zaufamy tablicy. Jeżeli w wycenie są zainteresowane dwie strony, a umowa o dostawę i odbiór przewiduje wycenę antagonistyczną, może się zdarzyć, że jedna ze stron, niezadowolona z wyniku próbki, zechce zbadać jeszcze na własny koszt wartości 5 sztuk. Jeżeli przewidziano posługiwanie się tablicą TFe, należało także wstawić klauzulę, że w takim razie strona niezadowolona musi odczytać z TFe numery następujące bezpośrednio po ostatnim już odczytanym. Na stronicy 13-tej TFe po 0737 czytamy: 2334, 1347, 2944, 1957, 3554. Na podziałce odpowiednie punkty oznaczono kreseczkami dolnymi; wszystkie punkty otrzymały numerację kolejną od 1 do 15. Widać, że nowe pozycje padły w dłuższe odcinki, a z nich tylko dwa lewe nie uległy podziałowi. W praktyce to postępowanie zaleca się przy założeniu, że producent numeruje sztuki według kolejności produkcji i że istnieje korelacja między jakością sztuk a ich kolejnością. Przez rozstawienie sztuk próbnych po całym zasięgu partii unika się skupień próbki w pewnych przedziałach numeracji; takie skupienia podwyższają niepewność wyceny. Na podanej podziałce widać, że pobranie dalszych 5 sztuk prawdopodobnie poprawi wycenę opartą na 10 sztukach pierwotnie pobranych (dla uniknięcia nieporozumień zaznaczamy, że poprawiona wycena opiera się na wszystkich 15 sztukach, a nie tylko na 5 nowych).

Jeszcze jeden przykład, typowy dla zastosowań TFe. Komisja Antropometryczna postanowiła zbadać po 100 osób w 25 zakładach pracy.

Później powstała potrzeba dodatkowego zbadania 50 osób spośród 2500 zbadanych, w celu uwzględnienia pewnej cechy pominiętej w pierwszym badaniu. Karty pomiarowe są ułożone w paczkach i w każdej paczce są numerowane od 1 do 100 według kolejności badań; paczek jest tyle, ile zakładów, tj. 25. TFe rozwiązuje te zagadnienia następująco:

Wybieramy dowolne miejsce w tablicy (np. pierwszy wyraz pierwszego wiersza stronicy 14-ej) i zaczynając od niego wynotowujemy 50 liczb z ograniczeniem do przedziału 0101-2600; pierwsze dwie cyfry dadzą nam numer paczki, a drugie dwie numer karty wewnątrz tej paczki. Gdybyśmy przypadkiem trafili na 2600 (nie zdarzy się to przy wyborze, jak poprzednio, miejsca początkowego), będziemy to rozumieli jako 2500+100, a więc jako kartę ostatniego pracownika w ostatnim zakładzie. Takie postępowanie jest równoważne z ponumerowaniem wszystkich 2500 pracowników w kolejności kart poczynając od karty nr 1 w paczce nr 1, a kończąc na karcie nr 100 w paczce nr 25.

Przy efektywnym wykonaniu zadania okazało się, że każdy zakład otrzymał reprezentację w próbce, a mianowicie 17 zakładów otrzymało po dwóch przedstawicieli, 4 po jednym, a 4 po trzech. Tam gdzie było dwóch reprezentantów, ich numery różniły się co najmniej o 34, gdzie było trzech, zawsze jeden należał do pierwszej dziesiątki w setce, a jeden do ostatniej. Ponadto w zakładach mających po 2 przedstawicieli, należeli oni w 16 przypadkach do różnych pięćdziesiątek, a tylko w jednym nie.

Widać na tym przykładzie w całej pełni zalety TFe. Reprezentacyjność próbki jest zdumiewająca, zwłaszcza, że osiągnięto ją automatycznie. Jeżeli w każdym zakładzie jest $10^0/_0$ pracowników umysłowych, którzy — dla zachęty — pierwsi poddali się badaniu, to w próbce wystąpią oni też w $10^0/_0$: dokładnie 5 zakładów ma po 1 przedstawicielu z pierwszej dziesiątki, a 20 nie ma ich wcale.

Gdy trzeba znaleźć reprezentację populacji o liczności większej niż 10000, np. 15000, a należy pobrać (np.) 20 sztuk, postępuje się tak, jak przy pobieraniu dwudziestosztukowej próbki z populacji numerowanej od 1 do 7500; z 20 liczb odczytanych z TFe 10 pierwszych pozostawia się bez zmiany, a 10 następnych powiększa się o 7500. Nie podajemy tu innych wariantów tej metody — praktyk znajdzie je sam bez trudu.

TFe nie jest tablicą liczb przypadkowych. Chcemy przez to powiedzieć, że jest pozbawiona co najmniej jednej cechy, której żąda się od takich tablic, a mianowicie tak zwanej niezależności wyrazów. W tablicach liczb przypadkowych żąda się (między innymi), żeby ostatnie cyfry dwóch po sobie następujących wyrazów przyjmowały z częstością mniej więcej jednakową wartości 00, 01, ..., 99; tej własności oczywiście TFe nie ma, bo różnice kolejnych wyrazów mają tylko trzy wartości, tak że po 0 może nastąpić tylko 1, 5 lub 6, po 1 tylko 2, 5 lub 7 itd. Ze stu par pojawi się łącznie tylko 30. TFe nie jest także tablicą liczb systematycznych: taką tablicą byłby np. ciąg reszt *modulo* 10000 liczb $4567n$ ($n = 1, 2, \ldots, 10000$). Tablica liczb przypadkowych, jeżeli ma imitować grę przypadku, musi wykazywać od czasu do czasu zgęszczenia, to jest serie liczb bliskich, i rozrzedzenia, to jest serie liczb dalekich od siebie — dlatego taka tablica nie nadaje się do pobierania próbek tam, gdzie zachodzi domniemanie, że sztuki bliskie co do numeracji są do siebie podobne. Tablica liczb systematycznych może łatwo wykazać rytm, który może wejść w rezonans z okresami występującymi w partii — tak np. liczby $4567n$ są na przemian parzyste i nieparzyste; nietrudno skonstruować przykład, w którym ta okoliczność może spowodować fałszywą ocenę dyspersji cechy badanej wyrywkowo. Natomiast TFe ma w najwyższej mierze własność reprezentacji proporcjonalnej każdej z części partii badanej.

Weźmy dowolne miejsce w TFe za początkowe i k kolejnych pozycji tablicy; ile będzie wsród nich podzielnych przez 7? Jak wiadomo, obrazy liczb TFe na kole K, czyli punkty P_n, tworzą zbiór 10000 punktów na K, a obraz wybranych k kolejnych liczb jest to część owego zbioru 10000 punktów wycięta przez końce A i B pewnego łuku, którego długość wynosi $k/10000$. Jeżeli z całej tablicy TFe zachowamy tylko liczby n podzielne przez 7, to jest liczby kształtu $n = 7m$ ($m = 1, 2, \ldots, 1428$), to powstanie nowa tablica zawierająca 1428 liczb; odpowiednikami tych liczb na K będą punkty P_{7m}. Otóż te punkty są odległe od P_0 o $7mz$, a ponieważ $7z = v$ jest liczbą niewymierną, więc punkty P_{7m}, które możemy oznaczyć przez Q_m, utworzą na kole K zbiór ekwipartycyjny Q, powstały przez odkładanie od P_0 łuków mv — ich końce dają Q_m. Ponieważ jest ich 1428, więc w AB znajdzie się z nich — w przybliżeniu — $1428 \times$ długość AB, czyli $1428 \times k/10000 = k/7$. Tak dowiedliśmy, że — w przybliżeniu — w każdym wycinku pierwotnej tablicy TFe $\frac{1}{7}$ liczb jest podzielnych przez 7. Nietrudno wykazać, że w takim wycinku jest około $\frac{1}{7}$ liczb kształtu $7m+1$. Otóż zbiór wszystkich P_n, takich że $n = 7n+1$, otrzymuje się z punktu Q przez przesunięcie go o z na kole K: stąd wynika, że ów zbiór jest też ekwipartycyjny i dalszy ciąg wnioskowania jest powtórzeniem poprzedniego wywodu. Oczywiście zamiast reszty 1 mod 7 można wziąć dowolną resztę r. Niniejsze twierdzenie można uogólnić na przypadek pobierania z TFe kolejnych k liczb z ograniczeniem do warunku $c \leqslant n < d$. Wśród nich także wszystkie klasy reszt mod 7 są w przybliżeniu jednakowo reprezentowane — wystarczy zauważyć, że warunek $c \leqslant n < d$ wyjmuje z TFe tablicę częściową o własnościach analogicznych do pierwotnej TFe — gdy do tej tablicy zastosujemy argumentację poprzednią, otrzymamy zapowiedziany wniosek. Jasne jest także, że siódemka nie odgrywa tu roli specjalnej: Każda liczba, byle niewielka w porównaniu z licznością k próbki, ma własność wyżej opisaną.

Jaki jest cel powyższych rozważań? Jest nim skonstatowanie tego, że TFe jest wolna od rezonansu z ewentualnymi okresami występującymi w populacji. Jaśniej: Jeżeli populacja jest ponumerowana kolejno i wybieram z niej k sztuk, jako próbkę biorąc k numerów kolejnych z TFe, z ograniczeniem do tych numerów, które występują w partii, np. od c do d, to nie ma obawy, że okres występujący w partii, np. objawiający się tym, że co siódma sztuka ma pewną cechę, której inne sztuki są pozbawione, wpłynie szkodliwie na reprezentacyjność próbki — proporcjonalność reprezentacji obejmie także owe specjalne sztuki.

Dlaczego nie poprzestaliśmy na TAu? Ta tablica też ma własność ekwipartycji. Po pierwsze dlatego, że postęp arytmetyczny, który ją określa, może wejść w rezonans z rytmem zjawiska badanego (używamy TAu tam, gdzie — jak w meteorologii — rytm jest znany i niewspółmierny z liczbą z), po wtóre dlatego, że TAu nie zawiera wszystkich liczb, a niektóre wielokrotnie — przy pobieraniu próbek dla celów kontroli jakości produktów przemysłowych jest to wada niemała. Te rozważania skłoniły nas do przeznaczenia odrębnych ról dla obu tablic.

Może zainteresuje czytelnika uwaga, że własność trzech różnic, którą wykazuje TFe, ma charakter ogólny, to znaczy przypada każdej tablicy powstałej z liczby niewymiernej dowolnej v, tak jak TFe powstała z liczby złotej z.

Oto dowód tego twierdzenia:

Niech na kole K punkty P_i i P_k następują bezpośrednio po sobie w kolejności antyzegarowej (to znaczy, że idąc od P_i do P_k, przeciwnie do biegu wskazówki zegara, nie trafimy na żaden inny punkt ciągu P_n). Odróżnimy dwa przypadki: 1° Idąc po łuku $\widehat{P_iP_k}$ w sposób wyżej określony, natrafimy na punkt Q; 2° idąc jak wyżej *nie* trafimy na Q.

Załóżmy 1°. Wobec tego, że P_k następuje bezpośrednio po P_i (w tablicy sporządzonej analogicznie do TFe), liczba k następuje bezpośrednio po liczbie i. Odległość QP_k jest równa $kv-[kv]$, odległość $\widehat{QP_i}$ jest równa $iv-[iv]$. Stąd wynika, że długość łuku $\widehat{P_iP_k}$ jest równa

$$(k-i)v-\big([kv]-[iv]\big)=D, \tag{10}$$

gdzie D oznacza jedną z trzech możliwych długości łuków dla $n=10\,000$ (zgodnie z twierdzeniem 1° wstępu). Jeżeli oznaczymy ogólnie $x-[x]$ przez $[\![x]\!]$, to jak łatwo sprawdzić, jest $[\![x-y]\!]=[\![x]\!]-[\![y]\!]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest $[\![x]\!]\geqslant[\![y]\!]$. W przypadku 1° jest jednak $[\![kv]\!]>[\![iv]\!]$, jak widać z wzajemnej sytuacji punktów Q, P_i, P_k, więc wolno napisać zamiast (10) wzór

$$(k-i)v-[(k-i)v] = D. \tag{11}$$

Różnica $k-i$ jest zatem całkowitym rozwiązaniem równania $xv-[xv] = D$. Przypuśćmy, że ma ono rozwiązania całkowite m i p:

$$mv-[pv] = D, \quad pv-[pv] = D; \tag{12}$$

wobec $v \neq 0$ zależność (12) daje

$$m-p = ([mv]-[pv])/v. \tag{13}$$

Lewa strona równości (13) jest liczbą całkowitą; jeżeli nie jest zerem, to i licznik po prawej stronie jest różny od zera, a ponieważ jest całkowity, więc prawa strona jest niewymierna, co jest sprzeczne z całkowitością lewej. Stąd $m-p = 0$, $m = p$. Pokazuje się, że równanie $xv-[xv] = D$ może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie całkowite przy danym D. Ponieważ spełnia je różnica tablicowa $r = k-i$, więc r może mieć tylko tyle wartości, ile jest różnych D dla $n = 10000$, to jest **trzy**.

Załóżmy 2°. Wtedy długość łuku $\widehat{P_iP_k}$ jest sumą długości $\widehat{P_iQ}+\widehat{QP_k}$. Ale teraz $\widehat{P_iQ} = 1-(iv-[iv])$, $\widehat{QP_k} = kv-[kv]$, a więc długość $\widehat{P_iP_k}$ jest równa $(k-i)v-([kv]-[iv])+1 = D$. Tym razem jednak — wobec sytuacji punktów P_i, Q, P_k na kole K — jest $[kv] < [iv]$, a więc $[kv]-[iv] = [kv-iv]-1$, tak że znowu dochodzimy do równości (11). Otóż różnica $k-i$ w przypadku 2° jest różnicą między pierwszym a ostatnim wyrazem tablicy — okazało się, że ona też jest jedną z trzech różnic. Inaczej: prawo trzech różnic obejmuje także cykliczny sposób czytania tablicy.

Te trzy różnice r_1, r_2, r_3 spełniają równania

$$r_jv-[r_jv] = D_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

z których wobec twierdzenia 4° wstępu wynika od razu, że

$$(r_1-r_2-r_3)v = [r_1v]-[r_2v]-[r_3v]$$

jest liczbą całkowitą, a więc $r_1 = r_2+r_3$. A więc i ta własność TFe jest ogólna.

Prace cytowane

[1] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922), str. 77-98, 3 (1924), str. 250-251.

[2] W. Sadowski, *Tablice statystyczne* (w druku).

[3] W. Sierpiński, *Un théorème sur les nombres irrationnels*, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences, série A, 1909, str. 725-727.

[4] S. Świerczkowski (praca ukaże się w Colloquium Mathematicum).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 3. 10. 1955

Г. ШТАЙНХАУЗ (Вроцлав)

ЗОЛОТЫЕ И ЖЕЛЕЗНЫЕ ЧИСЛА

РЕЗЮМЕ

Если z — один из корней уравнения $z^2+z = 1$, то $\{nz\}$ является *золотой* или *серебряной* (для меньшего из корней) последовательностью. Так как эквипартиция последовательности $\{nz-[nz]\}$ в интервале $\langle 0,1\rangle$ лучшая из возможных, поэтому золотая последовательность допускает соответственный выбор абсцисс при механической квадратуре функции в периодической аппроксимации о единичном периоде. Это случай метеорологических наблюдений, когда в качестве единицы принимаются 24 *h*.

Избирая точку Q на окружности, длина которой равна 1, и обозначая через P_n точку определённую зависимостью $QP_n = nZ-[nZ]$ $(n = 1, 2, \ldots, 10000)$ получим на окружности 10000 разных точек. Читая числа n в той последовательности, в которой проходит по ним точка движущаяся по окружности от Q до Q, получаем *железную таблицу*, содержащую все натуральные числа от 0000 до 9999. Эта таблица печатается в работе [2]. Её преимущество состоит в том, что она дает репрезентативную выборку.

Пусть напр. даная совокупность L состоящая из 1000 элементов пронумерованных от 2351 до 3350 включительно; прочтем в произвольном месте железной таблицы 20 последовательных чисел (пропуская числа таблицы меньшие чем 2351 или большие чем 3350). Получим 20 чисел очень равномерно распределённых в совокупности L.

H. STEINHAUS (Wrocław)

ON GOLDEN AND IRON NUMBERS

SUMMARY

If one of the roots of the equation $z^2+z = 1$ is z, then $\{nz\}$ is the *golden* or (for the smaller root) the *silver* sequence. As the equipartition of the sequence $\{nz-[nz]\}$ in $\langle 0, 1\rangle$ is the best possible, the golden sequence permits an appropriate choice of the abscissae for the mechanical quadrature of approximately periodical function of unit period — such is the case for meteorological observations of temperature, the unit being 24 h.

Choosing a point Q on a circle of length 1 and denoting by P_n the point defined by $QP_n = nz-[nz]$ $(n = 1, 2, \ldots, 10000)$ we get 10000 different points on the circle. Reading the numbers n in the order in which the points P_n are passed by a mobile point running over the circle from Q to Q, we get the *iron table* of numbers containing all naturals from 0000 to 9999. This table will be printed [2]. It has the advantage of giving a representative sample. For instance, let L be the set of 1000 elements numbered from 2351 to 3350; let us take at any place of the iron table 20 consecutive numbers (disregarding those numbers of the table which are less than 2351 or greater than 3350): we shall obtain 20 numbers fairly uniformly distributed in the set L.