S. PASZKOWSKI (Wrocław)

ZAGADNIENIA NUMERYCZNE APROKSYMACJI JEDNOSTAJNEJ (I)

(O alternansie wielomianów optymalnych)

W dalszym ciągu $\langle a, b\rangle$ oznacza przedział domknięty, (a, b) — przedział otwarty o końcach a i b, $\|\xi\|$ — normę funkcji ξ ciągłej w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, tj. liczbę $\max\limits_{|t|\leqslant 1}|\xi(t)|$, W_n — zbiór wszystkich wielomianów algebraicznych stopnia niewiększego niż n. Małe litery łacińskie oznaczają liczby, greckie — funkcje.

1. Pojęcia. Praca dotyczy pewnych własności aproksymacji jednostajnej, której podstawowe pojęcia przypominamy. Przez *błąd* aproksymacji funkcji ξ ciągłej w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ wielomianem ψ będziemy rozumieć liczbę $\|\xi-\psi\|$. Wielomian $\psi_n \epsilon W_n$, któremu odpowiada najmniejszy błąd aproksymacji, tj. taki wielomian, że $\|\xi-\psi_n\| = \min\limits_{\psi\epsilon W_n}\|\xi-\psi\|$, nazywamy *wielomianem optymalnym* dla funkcji ξ w klasie W_n (i w przedziale $\langle -1, 1\rangle$). Punkt $t\epsilon\langle -1, 1\rangle$ nazywamy (e)-punktem wielomianu ψ_n, jeżeli w t funkcja $|\xi-\psi_n|$ osiąga wartość maksymalną, równą $\|\xi-\psi_n\|$; w szczególności t jest $(+)$-punktem, jeśli $\xi(t)-\psi_n(t) = \|\xi-\psi_n\|$ i $(-)$-punktem, jeśli $\xi(t)-\psi_n(t) = -\|\xi-\psi_n\|$. Zbiór wszystkich (e)-punktów nazywamy *alternansem* wielomianu ψ_n (odpowiadającym funkcji ξ).

Własnością charakterystyczną wielomianu optymalnego jest istnienie $n+2$ (e)-punktów będących (przy ich uporządkowaniu według wielkości) na przemian $(+)$- i $(-)$-punktami.

2. Zagadnienia. Wielomian optymalny dla dowolnej funkcji ciągłej najłatwiej znaleźć metodą Remesa, czyli metodą wyrównywania maksimów ([2], [3]). W metodzie tej konstruuje się rekurencyjnie ciąg $\{\psi_{nm}\}$ wielomianów klasy W_n, zbieżny do ψ_n. Pierwszy wielomian tego ciągu (oraz liczbę e_{n1}) określa się układem równań liniowych względem jego współczynników:

$$\xi(u_{1k})-\psi_{n1}(u_{1k}) = (-1)^k e_{n1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1);$$

tu u_{1k} są dowolnymi liczbami spełniającymi warunek $-1 \leqslant u_{10} < u_{11} < \ldots < u_{1,n+1} \leqslant 1$. Znając już wielomian ψ_{nm} wyznacza się punkty $-1 \leqslant u_{m+1,0} < u_{m+1,1} < \ldots < u_{m+1,n+1} \leqslant 1$, w których funkcja $\xi - \psi_{nm}$ osiąga na przemian minimum i maksimum, i określa się wielomian $\psi_{n,m+1}$ (oraz liczbę $e_{n,m+1}$) za pomocą równań

$$\xi(u_{m+1,k}) - \psi_{n,m+1}(u_{m+1,k}) = (-1)^k e_{n,m+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Udowodniono, że $\lim\limits_{m\to\infty} \psi_{nm} = \psi_n$, $\lim\limits_{m\to\infty} |e_{nm}| = \|\xi - \psi_n\|$, a jeśli wielomian ψ_n ma dokładnie $n+2$ (e)-punkty $u_0 < u_1 < \ldots < u_{n+1}$, to również $\lim\limits_{m\to\infty} u_{mk} = u_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n+1$.

Metoda Remesa jest w każdym konkretnym przypadku tym użyteczniejsza, im lepiej pierwszy element ciągu $\{\psi_{nm}\}$ przybliża jego granicę, czyli szukany wielomian optymalny, innymi słowy, im punkty $u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{1,n+1}$ są bliższe (e)-punktów wielomianu optymalnego. Wybór punktów początkowych powinien obyć się bez rachunków numerycznych, więc praktycznie cenne są wszelkie informacje o rozkładzie (e)-punktów w przedziale przybliżania, które można uzyskać przed konstrukcją ciągu $\{\psi_{nm}\}$. Informacje te dotychczas wynikały tylko z jednego twierdzenia S. Bernsteina, cytowanego w § 3.2. W § 4 podajemy kilka nowych twierdzeń o (e)-punktach wielomianów optymalnych dla pewnych funkcji ciągłych, a w § 5 wyciągamy z nich wnioski praktyczne.

3. Uwagi pomocnicze. 3.1. p-tym wielomianem Czebyszewa nazywa się wielomian $T_p(t) = \cos(p \arccos t)$. Dla $t \in \langle -1, 1\rangle$ jest $|T_p(t)| \leqslant 1$, a ekstremalne wartości, równe -1 i 1, wielomian Czebyszewa przybiera w $p+1$ punktach

$$c_{pk} = \cos\big((p-k)\pi/p\big) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p) \tag{1}$$

uporządkowanych według wielkości (oznaczenie obowiązujące w całej pracy). W tych punktach

$$T_p(c_{pk}) = (-1)^{p-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

3.2. S. Bernstein udowodnił ([1], str. 85), że jeśli funkcja ξ ma $(n+1)$-szą pochodną i ta w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ ma stały znak, to wielomian ψ_n optymalny dla ξ w klasie W_n ma dokładnie $n+2$ (e)-punkty $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$ takie, że

$$-1 = u_0 = c_{n0} < u_1 < c_{n1} < u_2 < \ldots < c_{n,n-1} < u_n < c_{nn} = u_{n+1} = 1. \tag{2}$$

Przy tym, jeśli $\xi^{(n+1)}(t) > 0$, to 1 jest $(+)$-punktem, a jeśli $\xi^{(n+1)}(t) < 0$, to 1 jest $(-)$-punktem wielomianu ψ_n.

3.3. Jeśli p-ta pochodna funkcji ξ istnieje i ma stały, różny od zera znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to wszystkie wyznaczniki postaci

$$\begin{vmatrix} 1 & v_0 & \ldots & & \xi(v_0) \\ 1 & v_1 & \ldots & v_1^{p-1} & \xi(v_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & v_p & \ldots & v_p^{p-1} & \xi(v_p) \end{vmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad -1 \leqslant v_0 < v_1 < \ldots < v_p \leqslant 1, \tag{3}$$

są różne od zera i mają znak zgodny ze znakiem $\xi^{(p)}(t)$.

Istotnie, niech

$$\eta = \begin{vmatrix} 1 & v_0 & \ldots & v_0^{p-1} & \xi(v_0) \\ 1 & v_1 & \ldots & v_1^{p-1} & \xi(v_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & v_{p-1} & \ldots & v_{p-1}^{p-1} & \xi(v_{p-1}) \\ 1 & t & \ldots & t^{p-1} & \xi \end{vmatrix} = a\xi + a_0 + a_1 t + \ldots + a_{p-1} t^{p-1},$$

gdzie liczba a jest dodatnia jako wyznacznik Vandermonde'a punktów $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$. p-ta pochodna tej funkcji, równa $a\xi^{(p)}$, ma na mocy założenia stały znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, więc funkcja $\eta^{(p-k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, p-1$) może mieć w tym przedziale najwyżej k pierwiastków, a funkcja η może mieć najwyżej p pierwiastków, którymi są — jak łatwo spostrzec — liczby $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$. Pierwiastki funkcji $\eta', \ldots, \eta^{(p-1)}$ leżą zatem w przedziale (v_0, v_{p-1}), a dla $t > v_{p-1}$ funkcje $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(p-1)}, \eta^{(p)}$ mają stały znak. Niech np. $\eta(t) > 0$ dla $t > v_{p-1}$, a w szczególności $\eta(v_p) > 0$, tj. niech wyznacznik (3) będzie dodatni. Ponieważ $\eta(v_{p-1}) = 0$, więc co najmniej w jednym punkcie przedziału $(v_{p-1}, 1\rangle$ jest $\eta'(t) > 0$. Na mocy powyższych uwag nierówność ta zachodzi dla wszystkich $t > v_{p-1}$. Analogicznie, zastępując liczby $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ przez pierwiastki odpowiedniej pochodnej funkcji η, dowodzimy nierówności $\eta''(t) > 0$, $\ldots, \eta^{(p)}(t) > 0$ spełnionych (między innymi) dla $t > v_{p-1}$. Dla przypadku $\eta(v_p) < 0$ otrzymujemy układ przeciwnych nierówności. Oznacza to, że wyznacznik (3), równy $\eta(v_p)$, i funkcje $\eta^{(p)}(t) = a\xi^{(p)}(t)$ mają te same znaki, czego należało dowieść.

3.4. Jeśli w k-elementowym ciągu złożonym z zer i jedynek jest j par utworzonych przez sąsiadujące ze sobą jedynki, to w ciągu jest co najmniej $-[\frac{1}{2}(j+1-k)]$ zer ($[x]$ oznacza część całkowitą liczby x). Istotnie, oznaczmy przez z ilość zer w ciągu, liczbę jedynek poprzedzających pierwsze w ciągu zero przez y_0, liczbę jedynek leżących w ciągu między i-tym a $(i+1)$-szym zerem przez y_i ($i = 1, 2, \ldots, z-1$), liczbę jedynek następujących po ostatnim zerze przez y_z. Ponieważ y_i kolejnych jedynek tworzy co najmniej y_i-1 par, więc wobec $y_0+y_1+\ldots+y_z = k-z$ mamy nierówność

$$j \geqslant \sum_{i=0}^{z}(y_i-1) = k-z-(z+1) = k-2z-1,$$

skąd $z \geqslant (k-1-j)/2$ i $z \geqslant -[(j+1-k)/2]$, bo z jest liczbą całkowitą.

3.5. Aby uniknąć wielokrotnego powtarzania słów „co najmniej”, będziemy w dalszym ciągu używać zwrotu „funkcja δ ma r pierwiastków” oznaczającego, że δ ma ich co najmniej r (z uwzględnieniem krotności). Z tych samych powodów będziemy mówić, że t jest podwójnym pierwiastkiem funkcji δ, jeśli $\delta(t) = \delta'(t) = 0$, nawet przy $\delta''(t) = 0$.

4. Twierdzenia o alternansach. W całym niniejszym paragrafie ψ_n jest wielomianem optymalnym w klasie W_n i w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ dla funkcji ξ, o której mowa w twierdzeniach, a punkty $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$, takie że $u_0 < u_1 < \ldots < u_{n+1}$ są (e)-punktami ψ_n. Metoda dowodu twierdzeń 1-4 jest w zasadzie taka, jak cytowanego w § 3.2 twierdzenia Bernsteina, ale różni się wieloma szczegółami.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli $(n+1)$-sza i $(n+m)$-ta (gdzie $m > 1$) pochodna funkcji ξ istnieje i ma stały znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to w każdym przedziale domkniętym, którego końcami są różne (e)-punkty wielomianu ψ_n, leży co najmniej jedna z liczb $c_{n+m-1,0}, c_{n+m-1,1}, \ldots, c_{n+m-1,n+m-1}$.*

Dowód. W dowodzie będziemy dla prostoty opuszczać w symbolach $c_{n+m-1,k}$ pierwszy wskaźnik.

Ponieważ $c_0 = u_0 = -1$, $c_{n+m-1} = u_{n+1} = 1$, więc należy udowodnić, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$ istnieje takie l, że $u_k \leqslant c_l \leqslant u_{k+1}$. Wystarczy więc wykazać, że jest sprzeczne z założeniami twierdzenia istnienie takich k (gdzie $1 \leqslant k \leqslant n-1$) i l, dla których zachodziłaby nierówność

$$c_l < u_k < u_{k+1} < c_{l+1}. \tag{4}$$

Przyjmijmy $e_n = \|\xi-\psi_n\|$, $\delta^- = \xi-\psi_n-e_nT_{n+m-1}$, $\delta^+ = \xi-\psi_n+e_nT_{n+m-1}$. Mamy $(\delta^-)^{(n+m)} = (\delta^+)^{(n+m)} = \xi^{(n+m)}$, więc każda z funkcji δ^-, δ^+ może mieć najwyżej $n+m$ pierwiastków (z uwzględnieniem ich krotności) w przedziale $\langle -1, 1\rangle$. Niemożliwość nierówności (4) udowodnimy wykazując istnienie $n+m+1$ pierwiastków funkcji δ^- lub δ^+.

Przypuśćmy, że zachodzi np. nierówność

$$T_{n+m-1}(c_{l+1})\big(\xi(u_{k+1})-\psi_n(u_{k+1})\big) > 0 \tag{5}$$

i rozpatrzmy pod założeniem (4) i (5) funkcję δ^- (w przypadku przeciwnej nierówności — funkcję δ^+) oddzielnie w przedziałach (u_k, u_{k+1}), $(u_{k+1}, 1\rangle$, $\langle -1, u_k)$. Wykażemy trzy tezy: A, B, C.

A. *Funkcja δ^- ma jeden pierwiastek w przedziale* (u_k, u_{k+1}).

Istotnie, na mocy założenia (4) jest

$$|T_{n+m-1}(t)| < 1 \quad \text{dla} \quad t \in \langle u_k, u_{k+1} \rangle, \tag{6}$$

a funkcja $\xi - \psi_n$ ma w punktach u_k i u_{k+1} moduły równe e_n i różne znaki, skąd $\delta^-(u_k)\delta^-(u_{k+1}) < 0$.

B. *Funkcja δ^- ma $n+m-l-1$ pierwiastków w przedziale* $(u_{k+1}, 1\rangle$. Aby to udowodnić, zbadamy ciąg

$$\delta^-(c_{l+1}), \delta^-(c_{l+2}), \ldots, \delta^-(c_{n+m-2}), \delta^-(1) \tag{7}$$

złożony z $n+m-l-1$ liczb. Jeżeli element $\delta^-(c_i)$ tego ciągu jest przy $i < n+m-1$ równy zeru, to c_i jest pierwiastkiem podwójnym δ^-. Istotnie, mamy $|T_{n+m-1}(c_i)| = 1$, więc z równości $\delta^-(c_i) = 0$ wynika, że $|\xi(c_i) - \psi_n(c_i)| = e_n$, czyli c_i jest (e)-punktem, w którym funkcja $\xi - \psi_n$ osiąga ekstremum. Ponieważ c_i jest punktem wewnętrznym przedziału $\langle -1, 1\rangle$, więc $T'_{n+m-1}(c_i) = \xi'(c_i) - \psi'_n(c_i) = 0$, $\delta^{-\prime}(c_i) = 0$. Jeśli dwie sąsiednie liczby w ciągu (7), np. $\delta^-(c_i)$, $\delta^-(c_{i+1})$, są różne od zera, to w przedziale (c_i, c_{i+1}) leży pierwiastek funkcji δ^-. Istotnie, jeśli

$$\delta^-(c_i) = \xi(c_i) - \psi_n(c_i) - e_n T_{n+m-1}(c_i) = \xi(c_i) - \psi_n(c_i) + (-1)^{n+m-i} e_n \neq 0,$$

$$\delta^-(c_{i+1}) = \xi(c_{i+1}) - \psi_n(c_{i+1}) + (-1)^{n+m-i-1} e_n \neq 0,$$

to z nierówności $|\xi(c_i) - \psi_n(c_i)| \leqslant e_n$, $|\xi(c_{i+1}) - \psi_n(c_{i+1})| \leqslant e_n$ wynika, że liczby $\delta^-(c_i)$ i $\delta^-(c_{i+1})$ mają różne znaki.

Tak więc każdemu elementowi zerowemu (z wyjątkiem ostatniego) w ciągu (7) odpowiada podwójny pierwiastek funkcji δ^-, a każdej parze sąsiednich elementów różnych od zera — jeden pierwiastek tejże funkcji. Jeśli wspomnianych par jest j, to na mocy § 3.4 funkcja δ^- ma w przedziale $\langle c_{l+1}, 1\rangle$ następującą liczbę pierwiastków:

$$j - 2\left[\frac{j+1-(n+m-l-1)}{2}\right], \quad \text{jeśli} \quad \delta^-(1) \neq 0, \tag{8}$$

$$j - 2\left[\frac{j+1-(n+m-l-2)}{2}\right] + 1, \quad \text{jeśli} \quad \delta^-(1) = 0. \tag{9}$$

Liczba (8) jest równa $n+m-l-2$ albo $n+m-l-1$, w zależności od tego, czy $j-n-m+l$ jest parzyste, czy też nieparzyste. Podobnie liczba (9) jest równa $n+m-l-2$ albo $n+m-l-1$, tj. funkcja δ^- ma w przedziale $\langle c_{l+1}, 1\rangle$ co najmniej $n+m-l-2$ pierwiastków. Zupełnie tak samo dowodzi się, że δ^- ma w przedziale $\langle c_{l+2}, 1\rangle$ (oczywiście, jeśli $l+2 \leqslant n+m-1$) co najmniej $n+m-l-3$ pierwiastków.

Rozważymy teraz osobno dwa podprzypadki:

B$_1$. $\delta^-(c_{l+1}) \neq 0$. Na mocy tej nierówności, nierówności (6) dla $t = u_{k+1}$ i (5) funkcja δ^- ma różne znaki w punktach u_{k+1} i c_{l+1}, więc ma pierwiastek w przedziale (u_{k+1}, c_{l+1}). Poza tym funkcja δ^- ma $n+m-l-2$ pierwiastków w przedziale $\langle c_{l+1}, 1\rangle$, więc teza B jest spełniona.

B_2. $\delta^-(c_{l+1}) = 0$. Jeśli $l+1 = n+m-1$, czyli $c_{l+1} = 1$, to funkcja δ^- ma pierwiastek c_{l+1} i teza B jest spełniona, ponieważ wtedy $1 = n+m-(n+m-1) = n+m-l-1$. Jeśli $l+1 < n+m-1$, czyli $c_{l+1} < 1$, to c_{l+1} jest pierwiastkiem podwójnym funkcji δ^-. Ponieważ funkcja δ^- ma $n+m-l-3$ pierwiastków w przedziale $\langle c_{l+2}, 1\rangle$, więc ma $n+m-l-1$ pierwiastków w przedziale $\langle c_{l+1}, 1\rangle$, a to implikuje tezę B.

C. Analogicznie dowodzi się, że *funkcja δ^- ma $l+1$ pierwiastków w przedziale $\langle -1, u_k)$* (w B ilość pierwiastków była równa ilości tych liczb spośród $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m-1}$, które są większe od u_{k+1}; podobnie tutaj ilość pierwiastków jest równa ilości tych liczb spośród $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m-1}$, które są mniejsze od u_k).

Konsekwencją tez A, B i C jest to, że funkcja δ^- ma $1+(n+m-l-1)+(l+1) = n+m+1$ pierwiastków w przedziale $\langle -1, 1\rangle$.

Następne dwa twierdzenia uzupełniają twierdzenie 1 dla różnych wartości m. W dowodzie twierdzenia 2 wykorzystujemy następujący

LEMAT. *Jeśli funkcje μ i ν ciągłe, określone w przedziale $\langle a, b\rangle$ spełniają następujące warunki:*

1° *istnieją punkty $a = a_{\mu 0} < a_{\mu 1} < \ldots < a_{\mu i} = b$, $a = a_{\nu 0} < a_{\nu 1} < \ldots < a_{\nu j} = b$ takie, że $a_{\mu k} \neq a_{\nu l}$ przy $k \equiv l (\mathrm{mod}\, 2)$, $0 < k < i$, $0 < l < j$, $\mu(a_{\mu k}) = (-1)^k$ dla $k = 0, 1, \ldots, i$, $\nu(a_{\nu l}) = (-1)^l$ dla $l = 0, 1, \ldots, j$.*

2° *$|\mu(t)| < 1$ dla $t \neq a_{\mu k}$, $|\nu(t)| < 1$ dla $t \neq a_{\nu l}$,*

to funkcja $\mu-\nu$ ma w przedziale (a, b) co najmniej

$$\tfrac{1}{2}(i+j)-1 \quad \text{dla} \quad i \equiv j \ (\mathrm{mod}\, 2), \tag{10}$$

$$\tfrac{1}{2}(i+j)-\tfrac{1}{2} \quad \text{dla} \quad i \not\equiv j \ (\mathrm{mod}\, 2) \tag{11}$$

różnych pierwiastków.

Dowód. Przypadek I: $i = j$, czyli $\frac{1}{2}(i+j)-1 = i-1$. Niech najpierw i będzie parzyste. Punkty $a_{\mu 1}, a_{\mu 3}, \ldots, a_{\mu, i-1}$ (w których $\mu(t) = -1$ i $\mu(t)-\nu(t) < 0$) oraz $a_{\nu 1}, a_{\nu 3}, \ldots, a_{\nu, i-1}$ (w których $\nu(t) = -1$ i $\mu(t)-\nu(t) > 0$) są na mocy założenia 1° wszystkie różne, więc można je uporządkować w i-elementowy ciąg. Między dowolnymi sąsiednimi elementami tego ciągu leży pierwiastek funkcji $\mu-\nu$. Istotnie, jeśli jeden z tych elementów należy do układu $\{a_{\mu k}\}$, a drugi do układu $\{a_{\nu l}\}$, to — jak już zauważyliśmy — funkcja $\mu-\nu$ ma w tych punktach różne znaki. Jeśli zaś np. liczby $a_{\mu 1}, a_{\mu 3}$ sąsiadują ze sobą po uporządkowaniu, to funkcja $\mu-\nu$ ma różne znaki w punktach $a_{\mu 1}, a_{\mu 2}$ oraz w punktach $a_{\mu 2}, a_{\mu 3}$. Zatem teza lematu jest przy i parzystym spełniona.

Niech teraz i będzie nieparzyste. $i-1$ punktów $a_{\mu 1}, a_{\mu 3}, \ldots, a_{\mu, i-2}$, $a_{\nu 1}, a_{\nu 3}, \ldots, a_{\nu, i-2}$ porządkujemy według wielkości, otrzymując układ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$. Również $i-1$ punktów $a_{\mu 2}, a_{\mu 4}, \ldots, a_{\mu, i-1}$, $a_{\nu 2}, a_{\nu 4}, \ldots$, $a_{\nu, i-1}$ porządkujemy, otrzymując układ $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$. Rozumowanie przeprowadzone dla parzystego i daje teraz następujący wynik: w każdym z przedziałów

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{i-2}, a_{i-1}), \tag{12}$$

$$(b_1, b_2), (b_2, b_3), \ldots, (b_{i-2}, b_{i-1}) \tag{13}$$

leży jeden pierwiastek funkcji $\mu-\nu$, a dwa pierwiastki, jeśli oba końce przedziału należą do tego samego układu spośród $\{a_{\mu k}\}$, $\{a_{\nu l}\}$. Dlatego teza jest oczywista w dwóch przypadkach: 1° jeśli istnieje przedział z grupy (12) rozłączny z przedziałem (b_1, b_{i-1}) lub przedział z grupy (13) rozłączny z przedziałem (a_1, a_{i-1}), co jest możliwe tylko wtedy, gdy

$$a_1 < a_2 \leqslant b_1 < b_2 \quad \text{lub} \quad a_{i-2} < a_{i-1} \leqslant b_{i-2} \leqslant b_{i-1}, \tag{14}$$

2° jeśli końce któregoś z przedziałów (12), (13) należą oba albo do układu $\{a_{\mu k}\}$, albo do układu $\{a_{\nu l}\}$.

Załóżmy zatem, że nie zachodzi 1° ani 2°. Z zaprzeczenia 2° wynikają związki

$$a_1 = \min\{a_{\mu 1}, a_{\nu 1}\}, \qquad a_2 = \max\{a_{\mu 1}, a_{\nu 1}\},$$

$$b_1 = \min\{a_{\mu 2}, a_{\nu 2}\}, \qquad b_2 = \max\{a_{\mu 2}, a_{\nu 2}\}.$$

Ponieważ pierwszą z nierówności (14) można napisać w postaci

$$\max\{a_{\mu 1}, a_{\nu 1}\} \leqslant \min\{a_{\mu 2}, a_{\nu 2}\},$$

czyli

$$a_{\mu 1} \leqslant a_{\mu 2}, \qquad a_{\mu 1} \leqslant a_{\nu 2}, \qquad a_{\nu 1} \leqslant a_{\mu 2}, \qquad a_{\nu 1} \leqslant a_{\nu 2},$$

więc negacja tej nierówności oznacza, że $a_{\nu 2} < a_{\mu 1}$ lub $a_{\mu 2} < a_{\nu 1}$. Przypuśćmy np., że $a_{\nu 2} < a_{\mu 1}$. Wtedy mamy $a_{\nu 1} < a_{\nu 2} < a_{\mu 1} < a_{\mu 2}$, czyli $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$. Dlatego funkcja $\mu-\nu$ ma oprócz $i-2$ pierwiastków leżących w przedziałach (13) $(i-1)$-szy pierwiastek w przedziale $(a_{\nu 1}, a_{\nu 2}) = (a_1, b_1)$, na którego krańcach funkcja ta ma wartości o różnych znakach.

Przypadek II: $i \equiv j \pmod 2$, $i \neq j$. Rola liczb i, j jest symetryczna, więc niech np. $i > j$. Jest prawie oczywiste, że ilość różnych pierwiastków funkcji $\mu-\nu$ w przedziale (a, b) wynosi co najmniej $i-2$. Istotnie, różnica $\mu-\nu$ ma po jednym pierwiastku w każdym z $i-2$ przedziałów $(a_{\mu 1}, a_{\mu 2}), \ldots, (a_{\mu, i-2}, a_{\mu, i-1})$, ponieważ na krańcach tych przedziałów ma różne znaki. Z założenia przypadku II wynika, że $i \geqslant j+2$, skąd $i-2 \geqslant \frac{1}{2}(i+j+2)-2 = \frac{1}{2}(i+j)-1$.

Przypadek III. $i \not\equiv j \pmod 2$. Przypuśćmy znów, że $i > j$. Wtedy funkcja $\mu - \nu$ ma po jednym pierwiastku w każdym z $i-1$ przedziałów $(a_{\mu 1}, a_{\mu 2}), \ldots, (a_{\mu, i-2}, a_{\mu, i-1}), (a_{\mu, i-1}, a_{\mu, i}) = (a_{\mu, i-1}, b)$. Twierdząc to o ostatnim przedziale, korzystamy z tego, że wobec $i \not\equiv j \pmod 2$ mamy $\mu(b) = -\nu(b)$, tj. $\mu(b) - \nu(b) \neq 0$. Ponieważ $i \geqslant j+1$, więc $i-1 \geqslant \frac{1}{2}(i+j+1) - 1 = \frac{1}{2}(i+j) - \frac{1}{2}$, czego należało dowieść.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli $(n+1)$-sza i $(n+2)$-ga pochodna funkcji ξ istnieją i mają stałe znaki w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to przy $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) < 0$ zachodzą nierówności*

$$-1 = u_0 = c_{n+1,0} < u_1 < c_{n+1,1} < u_2 < \ldots < u_n < c_{n+1,n} < u_{n+1} = c_{n+1,n+1} = 1, \tag{15}$$

a przy $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+1)}(t) > 0$ zachodzą nierówności

$$-1 = c_{n+1,0} = u_0 < c_{n+1,1} < u_1 < c_{n+1,2} < \ldots < c_{n+1,n} < u_n < c_{n+1,n+1} = u_{n+1} = 1. \tag{16}$$

Dowód składa się z dwóch części. W części a) wykażemy, że

$$c_i \neq u_j \quad \text{dla} \quad 0 < i,\ j < n+1, \tag{17}$$

$$\text{gdzie } c_i \equiv c_{n+1,i} = \cos\frac{(n+1-i)\pi}{n+1},$$

w części b) za pomocą twierdzenia 1 i nierówności (17) udowodnimy związki (15) i (16). Przy tym założymy — co nie zmniejsza ogólności rozważań — że $\operatorname{sign}\big(\xi(1) - \psi_n(1)\big) = 1 = T_{n+1}(1)$, tj. założymy (zobacz § 3.2), że $\xi^{(n+1)}(t) > 0$. Na mocy określenia punktów c_k i u_k pociąga to za sobą równości

$$(-1)^{n+1-k} = T_{n+1}(c_k) = \operatorname{sign}\big(\xi(u_k) - \psi_n(u_k)\big) \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{18}$$

a) Rozważmy funkcje $\delta^- = \xi - \psi_n - e_n T_{n+1}$, $\delta^+ = \xi - \psi_n + e_n T_{n+1}$, gdzie $e_n = \|\xi - \psi_n\|$.

a$_1$) Najpierw, badając funkcję δ^-, wykażemy, że zachodzą nierówności

$$c_i \neq u_j \quad \text{dla} \quad 0 < i, j < n+1, \quad i \equiv j \pmod 2. \tag{19}$$

Na mocy (18), definicji liczby e_n i równości $u_0 = c_0 = -1$, $u_{n+1} = c_{n+1} = 1$, liczby -1 i 1 są pierwiastkami funkcji δ^-. Punkt c_i dla $0 < i < n+1$ jest pierwiastkiem tej funkcji tylko wtedy, gdy $c_i = u_j$, gdzie $i \equiv j \pmod 2$. Wtedy $c_i = u_j$ jest pierwiastkiem podwójnym funkcji δ^-, ponieważ w tym punkcie przedziału $(-1, 1)$ funkcje T_{n+1} i $\xi - \psi_n$ osiągają ekstremum.

Wbrew (19) przypuśćmy, że istnieje $l > 0$ punktów

(20) $$c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_l}, \quad \text{gdzie} \quad 0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_l < n+1,$$

takich, że $c_{i_1} = u_{j_1}, c_{i_2} = u_{j_2}, \ldots, c_{i_l} = u_{j_l}, i_k \equiv j_k \pmod 2$. Jeśli przyjmiemy dodatkowo $i_0 = j_0 = 0$, $i_{l+1} = j_{l+1} = n+1$, czyli $c_{i_0} = u_{j_0} = -1$, $c_{i_{l+1}} = u_{j_{l+1}} = 1$, to $i_{k+1} - i_k \equiv j_{k+1} - j_k \pmod 2$ dla $k = 0, 1, \ldots, l$. Na mocy lematu (nierówność (10)) funkcja δ^- w każdym z przedziałów otwartych $(c_{i_k}, c_{i_{k+1}})$ $(k = 0, 1, \ldots, l)$ ma $\frac{1}{2}(i_{k+1} - i_k) + (j_{k+1} - j_k) - 1$ pierwiastków. Ponieważ $\delta^-(-1) = \delta^-(1) = 0$ i ponieważ na mocy przypuszczenia funkcja δ^- ma l pierwiastków podwójnych (20), więc liczba jej pierwiastków w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ jest niemniejsza od

$$2 + 2l + \sum_{k=0}^{l} \left(\tfrac{1}{2}(i_{k+1} - i_k) + (j_{k+1} - j_k) - 1 \right) = 2 + 2l + (n+1) - (l+1) =$$
$$= n + l + 2 \geqslant n+3.$$

Mamy jednak $(\delta^-)^{(n+2)} = \xi^{(n+2)}$, więc z założenia o stałości znaku $\xi^{(n+2)}(t)$ wynika, że funkcja δ^- nie może mieć $n+3$ pierwiastków. W ten sposób wykazaliśmy nierówność (19).

a_2) Teraz, badając funkcję δ^+, udowodnimy, że

(21) $$c_i \neq u_j \quad \text{dla} \quad 0 < i, j < n+1, \quad i \not\equiv j \pmod 2.$$

Punkty $c_0 = -1$ i $c_{n+1} = 1$ nie są pierwiastkami funkcji δ^+. Punkt c_i dla $0 < i < n+1$ jest pierwiastkiem tej funkcji tylko wtedy, gdy $c_i = u_j$, gdzie $i \not\equiv j \pmod 2$, i jest wtedy pierwiastkiem podwójnym. Wbrew (21) przypuśćmy, że istnieje $l > 0$ takich punktów i przyjmijmy dla nich dawne oznaczenia (20). Oznaczając też, jak poprzednio, $c_{i_1} = u_{j_1}, c_{i_2} = u_{j_2}, \ldots, c_{i_l} = u_{j_l}$, $i_0 = j_0 = 0$, $i_{l+1} = j_{l+1} = n+1$, otrzymujemy $i_0 \equiv j_0 \pmod 2$, $i_k \not\equiv j_k \pmod 2$ dla $k = 1, 2, \ldots, l$, $i_{l+1} \equiv j_{l+1} \pmod 2$, skąd

$$i_1 - i_0 \not\equiv j_1 - j_0 \pmod 2, \quad i_{l+1} - i_l \not\equiv j_{l+1} - j_l \pmod 2,$$
$$i_{k+1} - i_k \equiv j_{k+1} - j_k \pmod 2 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, l-1.$$

Oznaczając przez r_k liczbę pierwiastków funkcji δ^+ w przedziale $(c_{i_k}, c_{i_{k+1}})$ otrzymujemy

$$r_0 \geqslant \tfrac{1}{2}\big((i_1 - i_0) + (j_1 - j_0)\big) - \tfrac{1}{2}, \quad r_l \geqslant \tfrac{1}{2}\big((i_{l+1} - i_l) + (j_{l+1} - j_l)\big) - \tfrac{1}{2}$$
(z nierówności (11)),

$$r_k \geqslant \tfrac{1}{2}\big((i_{k+1} - i_k) + (j_{k+1} - j_k)\big) - 1 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, l-1$$
(z nierówności (10)).

Zatem jeśli r jest liczbą pierwiastków funkcji δ^+ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to

$$r \geqslant 2l + \sum_{k=0}^{l} r_k \geqslant 2l + \sum_{k=0}^{l} \tfrac{1}{2}\big((i_{k+1}-i_k)+(j_{k+1}-j_k)\big) - l = n+l+1 \geqslant n+2.$$

Jest to sprzeczne z założeniami twierdzenia. Istotnie, nierówność $r \geqslant n+3$ jest sprzeczna z założeniem stałości znaku $\xi^{(n+2)}(t)$, a z równości $r = n+2$ wynikałoby, że $\operatorname{sign}\delta^+(-1) = (-1)^{n+2}\operatorname{sign}\delta^+(1)$, co jest sprzeczne z tym, że

$$\operatorname{sign}\delta^+(-1) = \operatorname{sign}\big(\xi(-1)-\psi_n(-1)\big), \qquad \operatorname{sign}\delta^+(1) = \operatorname{sign}\big(\xi(1)-\psi_n(1)\big),$$
$$\operatorname{sign}\big(\xi(-1)-\psi_n(-1)\big) = (-1)^{n+1}\operatorname{sign}\big(\xi(1)-\psi_n(1)\big).$$

W ten sposób wykazaliśmy nierówności (21), które razem z (19) dają związki (17).

b. Na podstawie twierdzenia 1 i nierówności (17) w każdym z $n-1$ przedziałów otwartych

(22) $$(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_{n-1}, u_n)$$

leży co najmniej jeden z n punktów $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Wykażemy najpierw, że w żadnym z przedziałów (22) nie mogą leżeć dwa punkty c_i, c_j, czyli wykażemy, że albo $c_1 \epsilon (u_0, u_1) = (-1, u_1)$, albo $c_n \epsilon (u_n, u_{n+1}) = (u_n, 1)$. Przypuśćmy, że jest inaczej. Ponieważ w żadnym spośród przedziałów (22) nie może leżeć więcej niż dwa punkty spośród $c_1, c_2, \ldots, c_n$, bo wtedy w innym przedziale tych punktów by nie było, więc dla pewnego k musi być $c_1 \epsilon (u_1, u_2), \ldots, c_{k-1} \epsilon (u_{k-1}, u_k)$, $c_k \epsilon (u_k, u_{k+1})$ i $c_{k+1} \epsilon (u_k, u_{k+1})$, czyli

$$u_k < c_k < c_{k+1} < u_{k+1}, \qquad c_{k+2} \epsilon (u_{k+1}, u_{k+2}), \ldots, c_n \epsilon (u_{n-1}, u_n).$$

Wtedy na mocy (18) funkcja δ^- ma po jednym pierwiastku w każdym z $n+1$ przedziałów $(u_1, c_1), \ldots, (u_k, c_k), (c_k, c_{k+1}), (c_{k+1}, u_{k+1}), \ldots, (u_n, c_n)$ oraz ma pierwiastki w punktach -1 i 1, razem ma więc $n+3$ pierwiastki — wbrew założeniu.

Z tego, co udowodniliśmy dotąd w części b, wynika, że zachodzi jedna z dwóch nierówności

(23) $$-1 < u_1 < c_1 < u_2 < c_2 < \ldots < u_n < c_n < 1,$$

(24) $$-1 < c_1 < u_1 < c_2 < u_2 < \ldots < c_n < u_n < 1.$$

Rozpatrzmy przypadek (23) i funkcję $\delta = \delta^-/e_n = \xi/e_n - (\psi_n/e_n + T_{n+1})$. W punktach $u_1, u_2, \ldots, u_n$ znak funkcji δ jest zgodny ze znakiem funkcji $\xi - \psi_n$, więc na mocy (18) mamy $\operatorname{sign}\delta(u_k) = (-1)^{n+1-k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Poza tym mamy $\delta(-1) = \delta(1) = 0$, $\operatorname{sign}\delta(c_n) = -\operatorname{sign}T_{n+1}(c_n) = 1$, więc oznaczając $\omega = -(\psi_n/e_n + T_{n+1})$ otrzymujemy układ $n+3$ równości liniowych względem liczby e_n^{-1} oraz $n+2$ współczynników wielomianu $\omega \in W_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\omega(-1)+\xi(-1)e_n^{-1} &= 0,\\
\omega(u_k)+\xi(u_k)e_n^{-1} &= (-1)^{n+1-k}|\delta(u_k)| \quad (k=1,2,\dots,n),\\
\omega(c_n)+\xi(c_n)e_n^{-1} &= |\delta(c_n)|,\\
\omega(1)+\xi(1)e_n^{-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Z tego układu wynika równość

$$e^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^{n+1} & 0 \\ 1 & u_1 & \dots & u_1^{n+1} & (-1)^{n+1}|\delta(u_1)| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_n & \dots & u_n^{n+1} & -|\delta(u_n)| \\ 1 & c_n & \dots & c_n^{n+1} & |\delta(c_n)| \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^{n+1} & \xi(-1) \\ 1 & u_1 & \dots & u_1^{n+1} & \xi(u_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_n & \dots & u_n^{n+1} & \xi(u_n) \\ 1 & c_n & \dots & c_n^{n+1} & \xi(c_n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \xi(1) \end{vmatrix}.$$

Z nierówności (23) i z postaci ostatniej kolumny wyznacznika stojącego w liczniku wynika, że jest on ujemny. Cały iloraz, równy e_n^{-1}, jest dodatni, więc wyznacznik stojący w mianowniku jest ujemny. Na mocy (23) i § 3.3 dla $p = n+2$ oznacza to, że $\xi^{(n+2)}(t) < 0$ i $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) < 0$.

W analogiczny sposób otrzymujemy w przypadku (24) nierówność $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) > 0$. Otrzymany rezultat można więc sformułować następująco: Jeśli $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) < 0$, to zachodzi (23), czyli (15), a jeśli $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) > 0$, to (24), czyli (16).

TWIERDZENIE 3. *Jeśli $(n+1)$-sza i $(n+m)$-ta, gdzie $m > 2$, pochodna funkcji ξ istnieje i ma stały znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to przy $\xi^{(n+1)}(t)\times\xi^{(n+m)}(t) < 0$ nie ma (e)-punktów wielomianu ψ_n w przedziale $(c_{n+m-1,n+m-2}, 1) = \big(\cos\pi/(n+m-1), 1\big)$, a przy $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+m)}(t) > 0$ nie ma ich w przedziale $(-1, c_{n+m-1,1}) = \big(-1, -\cos\pi/(n+m-1)\big)$.*

Dowód. Załóżmy np., że $\xi^{(n+m)}(t) < 0$ i $\xi^{(n+1)}(t) > 0$ (pozostałe trzy kombinacje znaków $\xi^{(n+m)}$ *i* $\xi^{(n+1)}$ rozpatruje się analogicznie). Stąd wynika (§ 3.2), iż $u_{n+1} = 1$ jest $(+)$-punktem ψ_n i 1 jest pierwiastkiem funkcji $\delta = (\xi-\psi_n)/e_n - T_{n+m-1}$, gdzie $e_n = \|\xi-\psi_n\|$. Wbrew tezie przypuśćmy, że w przedziale $(c_{n+m-2}, 1)$ (dla prostoty piszemy c_k zamiast $c_{n+m-1,k}$) leży (e)-punkt u_n wielomianu ψ_n, tj. $c_{n+m-2} < u_n < 1$. Ponieważ u_n jest $(-)$-punktem tego wielomianu, więc

$$\delta(u_n) = \big(\xi(u_n)-\psi_n(u_n)\big)/e_n - T_{n+m-1}(u_n) = -1-T_{n+m-1}(u_n),$$

a zatem $\delta(u_n) \leqslant 0$, czyli $\delta(u_n) = -|\delta(u_n)|$.

W punktach $-1 = c_0, c_1, \ldots, c_{n+m-2}$ mamy

$$\delta(c_k) = \big(\xi(c_k) - \psi_n(c_k)\big)/e_n - T_{n+m-1}(c_k) = \big(\xi(c_k) - \psi_n(c_k)\big)/e_n - (-1)^{n+m-1-k}$$

i ponieważ $|\xi(c_k) - \psi_n(c_k)| \leqslant e_n$, więc $\delta(c_k) = (-1)^{n+m-k}|\delta(c_k)|$ dla $k = 0, 1, \ldots, n+m-2$.

Zauważając jeszcze, że $\delta(1) = 0$ i oznaczając $\omega = -(\psi_n/e_n + T_{n+m-1}) \in W_{n+m-1}$, czyli $\delta = \xi e_n^{-1} + \omega$, otrzymujemy układ $n+m+1$ równości liniowych spełnionych przez liczbę e_n^{-1} i $n+m$ współczynników wielomianu ω:

$$\begin{aligned} \omega(c_k) + \xi(c_k)e_n^{-1} &= (-1)^{n+m-k}|\delta(c_k)| \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+m-2), \\ \omega(u_n) + \xi(u_n)e_n^{-1} &= -|\delta(u_n)|, \\ \omega(1) + \xi(1)e_n^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Podobnie, jak w twierdzeniu 2, wynika stąd równość

$$e_n^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & c_0 & \ldots & c_0^{n+m-1} & (-1)^{n+m}|\delta(c_0)| \\ 1 & c_1 & \ldots & c_1^{n+m-1} & (-1)^{n+m-1}|\delta(c_1)| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_{n+m-2} & \ldots & c_{n+m-2}^{n+m-1} & |\delta(c_{n+m-1})| \\ 1 & u_n & \ldots & u_n^{n+m-1} & -|\delta(u_n)| \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & c_0 & \ldots & c_0^{n+m-1} & \xi(c_0) \\ 1 & c_1 & \ldots & c_1^{n+m-1} & \xi(c_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_{n+m-2} & \ldots & c_{n+m-2}^{n+m-1} & \xi(c_{n+m-2}) \\ 1 & u_n & \ldots & u_n^{n+m-1} & \xi(u_n) \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & \xi(1) \end{vmatrix}.$$

Otrzymany iloraz jest dodatni, ponieważ $e_n > 0$. Dodatni jest także wyznacznik stojący w liczniku ułamka, co wynika z nierówności $c_0 < c_1 < \ldots < c_{n+m-2} < u_n < 1$ i z postaci ostatniej kolumny tego wyznacznika. Dlatego również mianownik powyższego ułamka jest dodatni, czyli (§ 3.3 i z założenia twierdzenia 3) $\xi^{(n+m)}(t) > 0$ wbrew przyjętemu założeniu. Twierdzenie jest więc udowodnione.

Ostatnie twierdzenie tego paragrafu różni się nieco tematem od poprzednich. Ustala ono mianowicie wzajemne położenie alternansów wielomianów optymalnych różnych stopni, odpowiadających tej samej funkcji przybliżanej.

TWIERDZENIE 4. *Dana jest funkcja ξ i wielomiany ψ_n i ψ_{n+1} optymalne dla ξ odpowiednio w klasach W_n i W_{n+1}. Jeśli $(n+1)$-sza i $(n+2)$-ga po-*

chodna funkcji ξ *istnieją i mają stały znak w przedziale* $\langle -1, 1\rangle$, $u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_{n+1}$ (*gdzie* $u_0 < u_1 < \ldots < u_{n+1}$) *są* (*e*)*-punktami wielomianu* ψ_n, *a* $v_0, v_1, \ldots, v_{n+2}$ (*gdzie* $v_0 < v_1 < \ldots < v_{n+2}$) *są* (*e*)*-punktami wielomianu* ψ_{n+1}, *to zachodzi nierówność*

$$-1 = v_0 = u_0 < v_1 < u_1 < v_2 < u_2 < \ldots < u_n < v_{n+1} < u_{n+1} = v_{n+2} = 1.$$

Dowód tego twierdzenia jest zupełnie analogiczny do dowodu twierdzenia Bernsteina — ściślej: po zamianie w tym ostatnim n na $n+1$. Różnica polega tylko na tym, że teraz pomocniczymi funkcjami, których pierwiastki się bada, są nie funkcje $\xi-\psi_{n+1}-\|\xi-\psi_{n+1}\|T_{n+1}$ i $\xi-\psi_{n+1}+$ $+\|\xi-\psi_{n+1}\|T_{n+1}$ ([1], str. 85, wzór (25)), ale funkcje $(\xi-\psi_{n+1})/\|\xi-\psi_{n+1}\|-$ $-(\xi-\psi_n)/\|\xi-\psi_n\|$ i $(\xi-\psi_{n+1})/\|\xi-\psi_{n+1}\|+(\xi-\psi_n)/\|\xi-\psi_n\|$.

5. Wnioski praktyczne. W praktyce ważne jest przede wszystkim twierdzenie 2, które w połączeniu z twierdzeniem Bernsteina (§ 3.2) daje następujący

WNIOSEK 1. *Jeśli* $(n+1)$*-sza i* $(n+2)$*-ga pochodna funkcji* ξ *istnieją i mają stały znak w przedziale* $\langle -1, 1\rangle$, *to przy* $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) < 0$ *zachodzą związki*

$$u_k \in (c_{n,k-1}, c_{n+1,k}) \quad dla \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{25}$$

a przy $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) > 0$ *związki*

$$u_k \in (c_{n+1,k}, c_{nk}) \quad dla \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wynika to wprost z twierdzenia Bernsteina, twierdzenia 2 i stąd, że

$$-1 = c_{n+1,0} = c_{n0} < c_{n+1,1} < c_{n1} < \ldots < c_{n,n-1} < c_{n+1,n} < c_{nn} = c_{n+1,n+1} = 1$$

Znaczenie praktyczne twierdzenia 3 polega na tym, że w pewnych przypadkach daje dodatkowe — w porównaniu z wnioskiem 1 — informacje o położeniu punktu u_1 albo u_n, tj. drugiego albo przedostatniego punktu alternansu. Przy założeniach wniosku 1 mamy mianowicie

WNIOSEK 2. *Jeśli* m *jest najmniejszą liczbą naturalną większą od* 2, *taką że pochodna* $\xi^{(n+m)}$ *istnieje oraz ma znak stały i różny od znaku* $\xi^{(n+2)}(t)$, *to*

$$\begin{aligned} &u_1 \in \langle c_{n+m-1,1}, c_{n+1,1}) && przy && \xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) < 0, \\ &u_n \in (c_{n+1,n}, c_{n+m-1,n+m-2}\rangle && przy && \xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Istotnie, jeśli np. $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t)<0$, to z (25) wynika, że $u_1 \in (c_{n0}, c_{n+1,1}) =$ $= (-1, c_{n+1,1})$, a z twierdzenia 3 wynika, że $u_1 \operatorname{non} \in (-1, c_{n+m-1,1})$; stąd otrzymuje się (26).

Przy spełnionych założeniach wniosku 2 o pochodnych $\xi^{(n+1)}$, $\xi^{(n+2)}$ i $\xi^{(n+m)}$ można oszacować z dołu odległość najbliższych (*e*)-punktów wielomianu ψ_n — co zresztą ma raczej teoretyczne niż praktyczne znaczenie. Zachodzi następujący

WNIOSEK 3. *Jeśli $(n+1)$-sza, $(n+2)$-ga i $(n+m)$-ta (gdzie $m > 2$) pochodna funkcji ξ istnieją i mają stały znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ oraz $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) < 0$, to odległość między dowolnymi różnymi (e)-punktami wielomianu ψ_n optymalnego dla funkcji ξ w klasie W_n jest niemniejsza od*

$$2\min\left\{\sin^2\frac{\pi}{2(n+m-1)},\ \sin\frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\right\}.$$

Dowód. Niech np. $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) < 0$. Wtedy na mocy poprzednio udowodnionych wniosków $u_0 = -1$, $u_1 \in \langle c_{n+m-1,1}, c_{n+1,1})$, $u_2 \in (c_{n1}, c_{n+1,2})$, ..., $u_n \in (c_{n,n-1}, c_{n+1,n})$, $u_{n+1} = 1 = c_{nn}$. Zatem odległość między sąsiednim (e)-punktami jest niemniejsza od najmniejszej z liczb

$$c_{n+m-1,1}+1,\ c_{n1}-c_{n+1,1},\ \ldots,\ c_{nn}-c_{n+1,n}. \tag{27}$$

Mamy

$$c_{n+m-1,1}+1 = \cos\frac{(n+m-2)\pi}{n+m-1}+1 = 2\sin^2\frac{\pi}{2(n+m-1)},$$

$$c_{nk}-c_{n+1,k} = \cos\frac{(n-k)\pi}{n}-\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1} =$$

$$= 2\sin\frac{k(2n+1)\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{k\pi}{2n(n+1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dla znalezienia najmniejszej z tych liczb przyjmijmy $x = k\pi/2n(n+1)$ (skąd $\pi/2n(n+1 \leqslant x \leqslant \pi/2(n+1))$, $\gamma(x) = c_{nk}-c_{n+1,k} = 2\sin(2n+1)x\sin x$. Ponieważ

$$\gamma'(x) = 2\cos(2n+1)x\cos x\big((2n+1)\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(2n+1)x\big)$$

i ponieważ γ' w przedziale $\langle\pi/2n(n+1), \pi/2(n+1)\rangle$ zmienia tylko raz znak: z dodatniego na ujemny, więc najmniejszą z liczb $c_{n1}-c_{n+1,1}, \ldots$ $\ldots, c_{nn}-c_{n+1,n}$ może być tylko jedna z liczb

$$c_{n1}-c_{n+1,1} = 2\sin\frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{\pi}{2n(n+1)},\qquad c_{nn}-c_{n+1,n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Ale łatwo zauważyć, że $c_{nn}-c_{n+1,n} > c_{n+m-1,1}+1$, więc najmniejszą z liczb (27) jest $\min\{c_{n+m-1,1}+1, c_{n1}-c_{n+1,1}\}$, co chcieliśmy wykazać.

Jeśli o funkcji ξ wiemy tylko, że $\xi^{(n+1)}(t)$ i $\xi^{(n+2)}(t)$ istnieją i mają stały znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to o położeniu (e)-punktów $v_0, v_1, \ldots, v_{n+2}$ wielomianu ψ_{n+1}, optymalnego dla funkcji ξ w klasie W_{n+1}, mówi tylko twierdzenie Bernsteina. Dalszych informacji dostarcza (na mocy twierdzenia 4) znajomość wielomianu ψ_n, optymalnego dla funkcji ξ w klasie W_n — a ściślej mówiąc znajomość jego (e)-punktów $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$. Fakt ten wyraża następujący

WNIOSEK 4. *Jeśli* $(n+1)$*-sza i* $(n+2)$*-ga pochodna funkcji* ξ *istnieją i mają stały znak w przedziale* $\langle -1, 1\rangle$, *to przy* $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) < 0$ *zachodzą związki*

$$v_k \in (c_{n+1,k-1}, u_k) \quad dla \quad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{28}$$

a przy $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) > 0$ *zachodzą związki*

$$v_k \in (u_{k-1}, c_{n+1,k}) \quad dla \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{29}$$

Dowód. Niezależnie od znaku iloczynu $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t)$ na mocy twierdzenia Bernsteina i twierdzenia 4 są spełnione związki $v_k \in (c_{n+1,k-1}, c_{n+1,k})$, $v_k \in (u_{k-1}, u_k)$ dla $k = 1, 2, \ldots, n+1$ i punkt v_k należy do części wspólnej przedziałów

$$(c_{n+1,k-1}, c_{n+1,k}), \quad (u_{k-1}, u_k). \tag{30}$$

Jeśli $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) < 0$, to z nierówności (15) twierdzenia 2 otrzymujemy $c_{n+1,k-1} > u_{k-1}$, $u_k < c_{n+1,k}$ i część wspólną przedziałów (30) stanowi przedział $(c_{n+1,k-1}, u_k)$ — stąd (28). Natomiast przy $\xi^{(n+1)}(t)\xi^{(n+2)}(t) > 0$ częścią wspólną przedziałów (30) jest $(u_{k-1}, c_{n+1,k})$ — stąd (29).

Na zakończenie dodajemy — co jest zresztą zupełnie oczywiste — że wszystkie rezultaty tej pracy można przenieść na aproksymację w dowolnym skończonym przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$. Należy tylko występujące w twierdzeniach liczby c_{pk} zastąpić przez $\frac{1}{2}(b-a)c_{pk}+\frac{1}{2}(a+b)$.

Prace cytowane

[1] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной*, ч. I, Ленинград-Москва 1937.

[2] Е. П. Новодворский, И. Ш. Пинскер, *Процесс уравнивания максимумов*, Успехи математических наук 6 (1951), str. 174-181.

[3] E. Remes, *Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebichef*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. 199 (1934), str. 337-340.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 19. 9. 1956

С. ПАШКОВСКИЙ (Вроцлав)

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ (I)

(Об альтернансе полиномов наилучшего приближения)

РЕЗЮМЕ

Скобки $\langle\ \rangle$ обозначают замкнутый интервал, скобки $(\ )$ — открытый интервал, W_n — множество всех алгебраических полиномов степени не выше n.

Для функции ξ, непрерывной в интервале $\langle -1, 1\rangle$, полиномом наилучшего приближения из класса W_n является такой полином φ_n, что

$$\max_{|t|\leqslant 1}|\xi(t)-\varphi_n(t)| = \min_{\varphi\epsilon W_n}\max_{|t|\leqslant 1}|\xi(t)-\varphi(t)|.$$

Точки интервала $\langle -1, 1\rangle$, в которых функция $|\xi-\varphi_n|$ имеет максимум, называются (e)-точками полинома φ_n. Известно, что существует по крайней мере $n+2$ (e)-точек, в которых разность $\xi(t)-\varphi_n(t)$ попеременно положительна и отрицательна.

Полиномы наилучшего приближения можно вычислить по методу Ремеза, т. е. по методу выравнивания максимумов ([2], [3]). Этот метод дает результаты тем лучше, чем лучше было известно распределение (e)-точек искомого полинома ещё до начала вычислений.

К распределению (e)-точек относилась до сих пор лишь следующая теорема Бернштейна ([1], стр. 85):

***Если производная порядка** $n+1$ **функции** ξ **существует и не меняет знака в интервале** $\langle -1, 1\rangle$, **то полином наилучшего приближения** φ_n **к функции** ξ **в классе** W_n **имеет точно** $n+2$ (e)**-точки** $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$, **которые удовлетворяют неравенству** (2) **при обозначениях** (1).*

Основные результаты этой работы, относящиеся к указанному вопросу, сопоставлены ниже в виде таблицы. При этом φ_n, φ_{n+1} суть полиномы наилучшего приближения к функции ξ соответственно в классах W_n и W_{n+1}; $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$ — (e)-точки полинома φ_n, а $v_0, v_1, \ldots, v_{n+2}$ — (e)-точки полинома φ_{n+1}. Условие D_p означает существование не меняющей знака в $\langle -1, 1\rangle$ производной порядка p функции ξ. Точки c_{pk} определены формулой (1). Предположения теорем даны в первой строке и первом столбце нижеследующей таблицы, следствия — внутри таблицы:

		$\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) < 0$	$\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) > 0$
D_{n+1}, D_{n+2}	$k = 1, 2, \ldots, n$	$u_k \epsilon (c_{n,k-1}, c_{n+1,k})$	$u_k \epsilon (c_{n+1,k}, c_{nk})$
	$k = 1, 2, \ldots, n+1$	$v_k \epsilon (c_{n+1,k-1}, u_k)$	$v_k \epsilon (u_{k-1}, c_{n+1,k})$
$D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+m}$ $(m > 2)$ $\xi^{(n+2)}(t)\,\xi^{(n+m)}(t) < 0$		$u_1 \epsilon \langle c_{n+m-1,1}, c_{n+1,1})$	$u_n \epsilon (c_{n+1,n}, c_{n+m-1,n+m-2}\rangle$

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

THE NUMERICAL PROBLEMS OF UNIFORM APPROXIMATION (I)

(On the (e)-points of polynomials of best approximation)

SUMMARY

The brackets $\langle\ \rangle$ denote a closed interval, the brackets $(\ )$ — an open one; W_n is the set of all algebraical polynomials of degree not greater that n.

For a function ξ continuous in the closed interval $\langle -1, 1\rangle$ a polynomial $\varphi_n \epsilon W_n$ such that

$$\max_{|t|\leqslant 1} |\xi(t) - \varphi_n(t)| = \min_{\varphi\epsilon W_n} \max_{|t|\leqslant 1} |\xi(t) - \varphi(t)|$$

is the polynomial of best approximation in the class W_n of all algebraical polynomials of degree not greater than n. The points of the interval $\langle -1, 1\rangle$ at which the function $|\xi - \varphi_n|$ has its maximum are termed the (e)-points of the polynomial φ_n. It is known that there exist at least $n+2$ (e)-points at which the difference $\xi(t) - \varphi_n(t)$ is in turn positive and negative.

Polynomials of best approximation can be found by the method of Remes, *i. e.*, the method of adjusting the maxima ([2], [3]). The results obtained by this method are the better the more accurately we know — before starting the calculation — the distribution of the (e)-points of the desired polynomial of best approximation in the interval $\langle -1, 1\rangle$.

So far we have had only the following theorem of Bernstein ([1], p. 85) on the distribution of (e)-points: if the $(n+1)$-th derivative of the function ξ exists and has a constant sign in the interval $\langle -1, 1\rangle$, then the polynomial φ_n which is of best approximation for the function ξ in the class W_n has exactly $n+2$ (e)-points $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$ satisfying inequality (2) with notation (1).

The main results of the present paper, concerning the above mentioned problem, are given below. The functions φ_n, φ_{n+1} are polynomials of best approximation for the function ξ in the classes W_n and W_{n+1} respectively; $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$ are the (e)-points of φ_n, and $v_0, v_1, \ldots, v_{n+2}$ are the (e)-points of φ_{n+1}. The condition D_p implies the existence and constancy of sign of the p-th derivative of the function ξ in the interval $\langle -1, 1\rangle$. The points c_{pk} are defined by formula (1). The assumptions are given in the first line and in the first column of the table, the assertions — inside the table:

		$\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) < 0$	$\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) > 0$
D_{n+1}, D_{n+2}	$k = 1, 2, \ldots, n$	$u_k \epsilon (c_{n,k-1}, c_{n+1,k})$	$u_k \epsilon (c_{n+1,k}, c_{nk})$
	$k = 1, 2, \ldots, n+1$	$v_k \epsilon (c_{n+1,k-1}, u_k)$	$v_k \epsilon (u_{k-1}, c_{n+1,k})$
$D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+m}$ $(m > 2)$ $\xi^{(n+2)}(t)\,\xi^{(n+m)}(t) < 0$		$u_1 \epsilon \langle c_{n+m-1,1}, c_{n+1,1})$	$u_n \epsilon (c_{n+1,n}, c_{n+m-1,n+m-2}\rangle$