ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVII, 4 (1983)

ALGORITHM 87

M. SZYSZKOWICZ (Wrocław)

A PROCEDURE REALIZING A FOURTH ORDER ONE-STEP METHOD FOR SOLVING A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

1. Procedure declaration. Procedure *diffsystrkb4* solves the initial value problem of the form

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k\big(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big), \tag{1}$$

$$y_k(x_0) = y_{0k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

at the points $x_1, x_2, \ldots$

Data:

x — the value of x_0 in (2);
x1 — the value of the argument for which we solve the problem;
eps — the relative error, the given tolerance;
eta — the number which is used instead of 0 if the obtained solution is 0 or near to 0; this number is used for evaluation of the relative error;
hmin — the least admissible absolute value of the step length;
n — the number of differential equations in (1)-(2);
y[1 : n] — the values of the right-hand sides of (2).

Results:

x — the value of *x1*;
y[1 : n] — the values of the approximate solution $y_k(x1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Additional parameters:

steph — label outside of the body of procedure *diffsystrkb4* to which a jump is made if the absolute value of the step length is smaller than *hmin*. After the jump, *x* is equal to the value of $\tilde{x}$ ($\tilde{x} < x1$) for which the approximate solution has a relative error equal to the given *eps* and *y[1 : n]* contains the values of this approximate solution.

f — identifier of the procedure which computes the values of the right-hand sides of (1), puts them in $d[1:n]$, and has the following heading: **procedure** $f(x, n, y, d)$; **value** x, n; **real** x; **integer** n; **array** y, d;

2. Method used. We use a fourth order method (given by Bobkov [2], p. 32-38) of the form

$$\eta^2_{n+1/4} = \eta^5_n + \frac{h}{4} f^5_n, \qquad \eta^3_{n+1/3} = \eta^5_n + \frac{h}{9}(f^5_n + 2f^2_{n+1/4}),$$

$$\eta^4_{n+1/2} = \eta^5_n + \frac{h}{8}(f^5_n + 3f^3_{n+1/3}), \qquad \eta^4_{n+1} = \eta^5_n + \frac{h}{2}(f^5_n - 3f^3_{n+1/3} + 4f^4_{n+1/2}),$$

$$\eta^5_{n+1} = \eta^5_n + \frac{h}{6}(f^5_n + 4f^4_{n+1/2} + f_{n+1}),$$

where η^k_{n+a} is the approximate value of the solution of (1)-(2) at the point $x_n + ah$ with obtained local error $O(h^k)$, and $f^k_{n+a} = f(x_n + ah, \eta^k_{n+a})$.

Twofold application of this method with step $h/2$ allows us to obtain the values with step h without evaluation of the function f.

In this algorithm, 9 evaluations of f in one step are made, whereas in a standard fourth order method (see [3]) 12 evaluations of f are required.

The method of control of the step of integration described in [1] is used.

3. Certification. Procedure *diffsystrkb4* has been verified on the Odra 1204 computer for many examples of the initial value problem. Some of them are presented here.

Examples.

(A) $y_1' = 1/y_2$, $y_1(0) = 1$, $y_2' = -1/y_1$, $y_2(0) = 1$ with the exact solution $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$.

(B) $y_1' = 10\cos 10x$, $y_1(0) = 0$ with the exact solution $y_1(x) = \sin 10x$.

(C) $y_1' = 10\,\mathrm{sgn}(\sin 20x)y_2$, $y_1(0) = 0$, $y_2' = -10\,\mathrm{sgn}(\sin 20x)y_1$, and $y_1(0) = 1$ with the exact solution $y_1(x) = |\sin 10x|$, $y_2(x) = |\cos 10x|$.

The results given in the sequel were obtained for *eps* = *eta* and *hmin* = $_{10}{-15}$. As initial values, the exact solutions at the points 0.5, 1.0, and 1.5 were used.

The relative errors and the numbers of evaluations of the function f (denoted by $[f]$) are given below.

```
procedure diffsystrkb4(x,x1,eps,eta,hmin,n,y,steph,f);
 value x1,eps,eta,hmin,n;
 real x,x1,eps,eta,hmin;
 integer n;
 array y;
 label steph;
 procedure f;
 begin
  real h,hh,w,w1,w2,w3;
  integer i;
  Boolean last;
  array d,d1,d2,d3,y2,y3[1:n];
  procedure steprkb4(x,d,y,yp);
   value x;
   real x;
   array d,y,yp;
   begin
    w2:=hh×.25;
    w1:=2.0;
    for i:=1 step 1 until n do
     yp[i]:=y[i]+w2×d[i];
    for w:=hh×.111111111111,hh×.125 do
     begin
      f(x+w2,n,yp,d2);
      for i:=1 step 1 until n do
       yp[i]:=y[i]+w×(d[i]+w1×d2[i]);
      w2:=hh×.333333333333;
      w1:=3.0
     end w;
    w2:=hh×.5;
```

```
          w1:=-3.0;
          w3:=4.0;
          for w:=w2,hh×.166666666666 do
           begin
            f(x+w2,n,yp,d3);
            for i:=1 step 1 until n do
             begin
              w2:=d3[i];
              yp[i]:=y[i]+w×(d[i]+w1×d2[i]+w3×w2);
              d2[i]:=w2
             end i;
            w2:=hh;
            w1:=4.0;
            w3:=1.0
           end w
         end steprkb4;
        eps:=.033333333333/eps;
        h:=x1-x;
        last:=true;
        f(x,n,y,d);
      conth:
        hh:=h×.5;
        steprkb4(x,d,y,y2);
        for i:=1 step 1 until n do
         d1[i]:=d3[i];
        steprkb4(x+hh,d1,y2,y3);
        w:=.0;
        w3:=h×.166666666666;
        for i:=1 step 1 until n do
         begin
```

```
     w2:=y3[i];
     w1:=w2-y[i]-w3×(d[i]+4.0×d1[i]+d3[i]);
     w2:=y3[i]:=w2+.066666666666×w1;
     w2:=abs(w2);
     w1:=abs(w1);
     if w2<eta
      then w2:=eta;
     w2:=w1/w2;
     if w2>w
      then w:=w2
    end i;
  w:=if w=.0 then eta else 1.25×(w×eps)↑.2;
  hh:=h/w;
  if w>1.25
   then
   begin
    if abs(h)<hmin
     then go to steph;
    last:=false
   end w>1.25
   else
   begin
    x:=x+h;
    for i:=1 step 1 until n do
     y[i]:=y3[i];
    if last
     then go to endp;
    f(x,n,y,d);
    w:=x1-x;
    if (w-hh)×h<0
```

```
        then
        begin
         hh:=w;
         last:=true
        end(w-hh)×h<0
      end w<1.25;
    h:=hh;
    go to conth;
  endp:
   end diffsystrkb4
```

Results obtained for problem (A)

x	$eps = {}_{10}-3$	$[f]$	$eps = {}_{10}-6$	$[f]$	$eps = {}_{10}-9$	$[f]$
0.5	$6.3_{10}-6$	9	$1.2_{10}-6$	26	$6.3_{10}-9$	62
	$-3.3_{10}-6$		$-7.7_{10}-7$		$-5.6_{10}-9$	
1.0	$6.3_{10}-6$	9	$1.2_{10}-6$	26	$6.3_{10}-9$	62
	$-3.3_{10}-6$		$-7.7_{10}-7$		$-5.5_{10}-9$	
1.5	$6.3_{10}-6$	9	$1.2_{10}-6$	26	$6.4_{10}-9$	62
	$-3.3_{10}-6$		$-7.7_{10}-7$		$-5.7_{10}-9$	
10.0	$-1.7_{10}-2$	79	$-1.7_{10}-5$	223	$6.3_{10}-8$	817
	$2.8_{10}-2$		$2.8_{10}-5$		$-5.0_{10}-8$	

Results obtained for problem (B)

x	$eps = {}_{10}-3$	$[f]$	$eps = {}_{10}-6$	$[f]$	$eps = {}_{10}-9$	$[f]$
0.5	$-9.0_{10}-5$	35	$8.1_{10}-10$	123	$-4.5_{10}-11$	410
1.0	$2.5_{10}-4$	35	$4.0_{10}-10$	157	$1.3_{10}-10$	446
1.5	$-9.7_{10}-5$	43	$-1.0_{10}-8$	120	$2.4_{10}-10$	392
10.0	$1.0_{10}-1$	140	$1.3_{10}-7$	2,379	$-2.6_{10}-9$	7,027

Results obtained for problem (C)

x	$eps = {}_{10}-3$	$[f]$
0.5	$-2.2_{10}-5$	1,735
	$2.0_{10}-4$	
1.0	$9.4_{10}-5$	1,328
	$-4.5_{10}-5$	
1.5	$6.8_{10}-5$	1,638
	$-5.7_{10}-5$	
10.0	$-1.4_{10}-4$	28,585
	$-1.0_{10}-4$	

References

[1] J. Chomicz, A. Olejniczak and M. Szyszkowicz, *Dobór kroku obliczeń dla metod jednokrokowych i kwadratur*, Report N-35, Institute of Computer Science, University of Wrocław, 1978.

[2] V. I. Krylov, V. V. Bobkov and P. I. Monastyrnyĭ (В. И. Крылов, В. В. Бобков и П. И. Монастырный), *Вычислительные методы*, т. 2, Москва 1977.

[3] M. Szyszkowicz, *Trzy procedury realizujące metodę jednokrokową czwartego rzędu*, Report N-63, Institute of Computer Science, University of Wrocław, 1979.

INSTITUTE OF COMPUTER SCIENCE
UNIVERSITY OF WROCŁAW
51-151 WROCŁAW

Received on 18. 2. 1980

ALGORYTM 87

M. SZYSZKOWICZ (Wrocław)

PROCEDURA REALIZUJĄCA METODĘ JEDNOKROKOWĄ CZWARTEGO RZĘDU ROZWIĄZYWANIA UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

STRESZCZENIE

Procedura *diffsystrkb4* rozwiązuje zagadnienie początkowe postaci

$$y_k' = f_k(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)),$$

$$y_k(x_0) = y_{0k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

w danych punktach $x_1, x_2, \ldots$

Dane:

x — wartość x_0;

x1 — wartość, dla której chcemy rozwiązać zagadnienie;

eps — żądany błąd względny rozwiązania;

eta — wielkość służąca do obliczania błędu względnego; używa się jej, gdy otrzymana wartość rozwiązania jest równa lub bliska zeru;

hmin — najmniejsza dopuszczalna wartość kroku całkowania;

n — liczba równań;

y[1 : n] — wartości początkowe.

Wyniki:

x — wartość *x1*;

y[1 : n] — otrzymane rozwiązanie w punkcie *x1*.

Inne parametry:

steph — etykieta instrukcji (poza treścią procedury *diffsystrkb4*), do której następuje skok, gdy obliczony krok *h* jest co do modułu mniejszy od *hmin*. Po wykonaniu skoku, zmienna x ma wartość tej zmiennej $\tilde{x}$ ($\tilde{x} < x1$), dla której otrzymane przybliżone rozwiązanie jest dostatecznie dokładne, a tablica y zawiera to rozwiązanie.

f — nazwa procedury, która oblicza wartość prawych stron zagadnienia (1)-(2) i umieszcza je w tablicy $d[1:n]$. Procedura ma następujący nagłówek: **procedure** $f(x, n, y, d)$; **value** x, n; **real** x; **integer** n; **array** y, d;

Użyta metoda numeryczna pozwala prowadzić obliczenia z kontrolą kroku całkowania z 9 odwołaniami do funkcji f w jednym kroku. W standardowej metodzie czwartego rzędu wymaganych jest 12 odwołań do funkcji f.