ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XI, 2 (1970)

W. OKTABA i H. MIKOS (Lublin)

MODELE MATEMATYCZNE DLA DANYCH PROPORCJONALNYCH

1. Streszczenie. Jak wiadomo, metody opracowywania danych z równymi liczebnościami w podklasach są raczej proste, a metody takie przy nieproporcjonalnych liczebnościach są uciążliwe i z reguły wymagają użycia maszyn elektronowych. Interesujący jest przypadek pośredni, gdy w podklasach występują proporcjonalne liczebności obserwacji.

Z ostatnim zagadnieniem wiążą się m. in. publikacje Manna [3], Bankiera i Walpole'a [1], Placketta [8], Smitha [11], Snedecora [12], Snedecora i Coxa [14], Yatesa [17] i Oktaby [4]. W niektórych podręcznikach autorzy podają lakonicznie, że metoda opracowania danych proporcjonalnych pokrywa się z metodą dla danych ortogonalnych, tj. dla danych z równymi liczebnościami obserwacji w podklasach. Inni, jak np. Wilk i Kempthorne [15], nie sugerują wyraźnie obiektywnego wyboru metody. Scheffé [10], zamieszczając krótką wzmiankę o modelu dla danych proporcjonalnych, koncentruje uwagę na modelu ogólniejszym z danymi nieortogonalnymi, tj. z nieproporcjonalnymi liczebnościami w podklasach.

W pracy niniejszej rozważa się modele stałe dla danych proporcjonalnych podwójnej klasyfikacji krzyżowej z nieskorelowanymi błędami, model podwójnej klasyfikacji hierarchicznej i model losowy z nieskorelowanymi efektami losowymi. Jak wiadomo, estymacja parametrów modelu i weryfikowanie hipotez statystycznych, a więc i wnioskowanie, zależy od dwu rodzajów definicji efektów głównych i interakcyjnych. Rodzaje te są uwarunkowane wykorzystaniem lub niewykorzystaniem liczebności w podklasach. W konsekwencji z tych definicji wynikają odpowiednio ważone lub nieważone liniowe restrykcje wiążące parametry modelu. Wyboru restrykcji należy dokonywać na podstawie informacji *a priori* o modelu populacji.

Ponieważ estymacja, weryfikacja hipotez i wnioskowanie zależą nie tylko od typu restrykcji, lecz i od występowania lub niewystępowania interakcji, rozważa się cztery typy stałych modeli z interakcją i bez niej, z restrykcjami ważonymi i nieważonymi. Przedstawia się

efektywne estymatory efektów głównych i interakcyjnych (§ 2 i 3). Podano odpowiednie sumy kwadratów, wartości oczekiwane średnich kwadratów i funkcje testowe F dla weryfikacji hipotez efektów głównych i interakcyjnych czterech modeli. Przedyskutowano weryfikację hipotezy odnośnie do efektów głównych w przypadku istotnej interakcji. Przedstawiono dowód odmienny niż Scheffégo na wyznaczenie sumy kwadratów dla efektów głównych w przypadku istotnej interakcji i ogólnych wag. Okazuje się, że przy braku interakcji mimo różnych estymatorów efektów głównych i różnych restrykcji uzyskuje się metodą dopasowania stałych jednakowe efektywne estymatory i testy istotności dla porównań efektów głównych.

W przypadku istnienia interakcji otrzymuje się dwie różne analizy wariancji, zależne od typu restrykcji. Stąd testy istotności F dla weryfikacji różnic efektów głównych są różne. Przy restrykcjach ważonych i niepustych podklasach otrzymuje się analizę podobną do analizy dla danych ortogonalnych (Scheffé [10]), a przy nieważonych — podobną do analizy dla danych nieortogonalnych (Yates [17]). Różnice między ocenami i testami istotności w przypadku restrykcji ważonych i nieważonych oraz istotnej interakcji zilustrowano przykładem liczbowym z danymi o stałej proporcjonalności (§ 9).

Oddzielnie omówiono stałe modele typu $a\times 2$ i 2×2. Podano *explicite* przedziały ufności Scheffégo dla porównań głównych efektów przy istotnej interakcji oraz restrykcjach ważonych i nieważonych (§ 6).

Dla stałego modelu podwójnej klasyfikacji hierarchicznej w przypadku restrykcji nieważonych podano definicje parametrów (§ 7), wyznaczono ich estymatory i podano analizę wariancji (tablica 1) wraz z wartościami oczekiwanymi średnich kwadratów. Przypadek restrykcji ważonych rozważali Bankier i Walpole [1].

W § 8 wyprowadzono wartości oczekiwane średnich kwadratów dla efektów głównych i interakcyjnych w przypadku modelu losowego opartego na podwójnej klasyfikacji krzyżowej przy restrykcjach nieważonych.

2. Stałe modele podwójnej klasyfikacji krzyżowej. Niech stały model matematyczny podwójnej klasyfikacji krzyżowej $A\times B$ o a poziomach klasyfikacji A i b poziomach klasyfikacji B i n_{ij} obserwacjach w podklasie (i,j), $i=1,\ldots,a$, $j=1,\ldots,b$ ma postać

$$(1)\qquad y_{ijk} = \underbrace{\mu+a_i+\beta_j+(a\beta)_{ij}}_{\text{stałe}}+e_{ijk}, \qquad k=1,\ldots,n_{ij},$$

w której składniki po prawej stronie poza losowym błędem e_{ijk} są stałe.

Zakładamy, że błąd e_{ijk} związany z k-tą obserwacją y_{ijk} występującą w podklasie (i,j) ma rozkład normalny ze średnią równą zeru i wariancją σ^2

oraz że błędy są nie skorelowane. Symbol μ oznacza średnią ogólną w populacji, a_i — i-ty efekt klasyfikacji A, β_i — j-ty efekt klasyfikacji B, $(a\beta)_{ij}$ — efekt interakcyjny związany z podklasą (i,j). Jak wiadomo, dane liczbowe odpowiadające takiemu modelowi nazywamy *proporcjonalnymi*, gdy liczebności obserwacji n_{ij} podklasy (i,j) wyrażają się w formie

$$n_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n} = p_i s_j,$$

gdzie $n_{i.} = \sum_j^b n_{ij}$ jest liczbą obserwacji i-tego poziomu klasyfikacji A, $n_{.j} = \sum_i^a n_{ij}$ — liczbą obserwacji j-tego poziomu klasyfikacji B, a $n = \sum_i n_{i.} = \sum_j n_{.j}$ — liczbą wszystkich obserwacji. Można np. przyjąć $p_i = n_{i.}/n$ i $s_j = n_{.j}$. Parametry a_i, β_j oraz $(a\beta)_{ij}$ modelu (1) mogą podlegać dwu rodzajom liniowych warunków ograniczających, tzw. restrykcjom, a mianowicie *restrykcjom ważonym*

$$\sum_i p_i a_i = \sum_j s_j \beta_j = \sum_i p_i s_j (a\beta)_{ij} = \sum_j p_i s_j (a\beta)_{ij} = 0 \tag{2}$$

oraz *restrykcjom nieważonym*

$$\sum_i a_i = \sum_j \beta_j = \sum_i (a\beta)_{ij} = \sum_j (a\beta)_{ij} = 0. \tag{3}$$

Ponieważ ponadto mogą zajść dwa przypadki: 1) interakcja $(a\beta)_{ij}$ jest istotna i 2) interakcja $(a\beta)_{ij}$ jest nieistotna, więc zestawiając typy restrykcji z wymienionymi rodzajami interakcji, obserwujemy cztery odpowiednie modele matematyczne.

Restrykcje są konsekwencją przyjętych definicji parametrów modelu (por. Scheffé [10]). Parametry μ, a_i, β_j, $(a\beta)_{ij}$ określa się przy użyciu wag

$$v_i = \frac{p_i}{p.}, \quad w_j = \frac{s_j}{s.} \tag{4}$$

lub bez nich jako funkcje liniowe średnich w populacji

$$\mu_{ij} = \mu + a_i + \beta_j + (a\beta)_{ij} \tag{5}$$

dla podklas (i,j), gdzie $p. = \sum_i p_i$, $s. = \sum_j s_j$.

3. Estymatory. Jak wiadomo, w modelu z interakcją i przy ważonych restrykcjach estymatorami metodą najmniejszych kwadratów parametrów μ_{ij}, μ, a_i, β_j, $(a\beta)_{ij}$ odpowiednio są

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{ij} = \frac{1}{p_i s_j}\sum_k y_{ijk}, \quad \hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j p_i s_j \bar{y}_{ij}, \tag{6}$$

$$\hat{a}_i = \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}, \quad \hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}, \quad \widehat{(a\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y},$$

gdzie

$$(7) \qquad \bar{y}_{i.} = \frac{1}{s.}\sum_j s_j \bar{y}_{ij}, \qquad \bar{y}_{.j} = \frac{1}{p.}\sum_i p_i \bar{y}_{ij}.$$

W przypadku restrykcji nieważonych i przy interakcji estymatorami są

$$(8) \qquad \tilde{\mu} = \frac{1}{ab}\sum_i\sum_j \bar{y}_{ij} = \tilde{y}, \qquad \tilde{\alpha}_i = \tilde{y}_{i.} - \tilde{y}, \qquad \tilde{\beta}_j = \tilde{y}_{.j} - \tilde{y},$$

$$\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij} - \tilde{y}_{i.} - \tilde{y}_{.j} + \tilde{y},$$

gdzie

$$(9) \qquad \tilde{y}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_j \bar{y}_{ij}, \qquad \tilde{y}_{.j} = \frac{1}{a}\sum_i \bar{y}_{ij}.$$

Estymatory te uzyskujemy, operując średnimi podklas tak, jak gdyby nie było różnych liczebności w podklasach.

W przypadku trzeciego modelu, gdy nie ma interakcji, tj. $(\alpha\beta)_{ij} = 0$, i restrykcje są ważone, estymatorami według najmniejszych kwadratów są wielkości $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}_i$ oraz $\hat{\beta}_j$ wymienione w (6).

Za czwarty model uważamy model bez interakcji z nieważonymi restrykcjami, tj.

$$(10) \qquad y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} = \delta + \alpha_i' + \beta_j' + e_{ijk}.$$

Efektywnymi estymatorami parametrów δ, α_i' oraz β_j' uzyskanymi z równań normalnych są

$$(11) \qquad \tilde{\delta} = \bar{\bar{y}}_A + \bar{\bar{y}}_B - \bar{y}, \qquad \tilde{\alpha}_i' = \bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_A, \qquad \tilde{\beta}_j' = \bar{y}_{.j} - \bar{\bar{y}}_B,$$

gdzie

$$(12) \qquad \bar{\bar{y}}_A = \frac{1}{a}\sum_i \bar{y}_{i.}, \qquad \bar{\bar{y}}_B = \frac{1}{b}\sum_j \bar{y}_{.j}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}.$$

Znaczenie symboli $\bar{y}_{i.}$ oraz $\bar{y}_{.j}$ podano w (7).

Z porównania estymatorów $\hat{\mu}$, α_i oraz $\hat{\beta}_j$ w (6) i (11), uzyskanych odpowiednio przy restrykcjach ważonych i nieważonych w przypadku braku interakcji, jest widoczne, że

$$(13) \qquad \tilde{\alpha}_i' - \tilde{\alpha}_m' = \hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_m = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{m.}, \qquad i, m = 1, 2, \ldots, a, \qquad i \neq m,$$

tj. że różnice między efektami głównymi α są identyczne, jakkolwiek same estymatory są różne. Oczywiście ta sama uwaga odnosi się do estymatorów $\hat{\beta}'$ i $\tilde{\beta}$, (por. Scheffé [10], str. 93).

UWAGA. Zauważmy, że przy obecności interakcji i restrykcjach nieważonych różnice między $\tilde{y}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_j \bar{y}_{ij}$, aczkolwiek są nieobciążonymi estymatorami przeciętnych efektów klasyfikacji A $\left(\tilde{a}_i = \tilde{y}_{i.} - \tilde{y} = \frac{1}{b}\sum_j \bar{y}_{ij} - \frac{1}{ab}\sum_i\sum_j \bar{y}_{ij}\right)$, to nie są już efektywnymi estymatorami, gdyż $\tilde{y}_{i.}$ nie są rozwiązaniami równań normalnych. Oznacza to, że efekty główne zdefiniowane tak, że dają restrykcje nieważone przy obecności interakcji, nie pokrywają się z efektami głównymi przy braku interakcji. Definiujemy bowiem w przypadku interakcji

$$a_i^* = \mu_{i.}^* - \mu^* = \frac{1}{b}\sum_j \mu_{ij} - \frac{1}{ab}\sum_i\sum_j \mu_{ij}, \tag{14}$$

a przy braku interakcji

$$a_i = \mu_{i.} - \mu_A' = \frac{1}{s.}\sum_j s_j\mu_{ij} - \frac{1}{s.a}\sum_i\sum_j s_j\mu_{ij}. \tag{15}$$

Podobnie określa się efekty główne β_i^* i β_i.

Oczywiście dla wszystkich rozważanych czterech modeli estymatorem wariancji $\sigma_e^2 = \sigma^2$ jest średni kwadrat dla błędu (wewnątrz podklas)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-ab}\sum_i\sum_j\sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 \tag{16}$$

przy $n-ab$ stopniach swobody.

4. Weryfikacja hipotez. W przypadku braku interakcji sumy kwadratów w analizie wariancji są takie same przy restrykcjach ważonych i nieważonych, natomiast postaci wartości oczekiwanych średnich kwadratów są różne. Analiza wariancji opiera się na tożsamości podobnej do tożsamości dla danych ortogonalnych.

$$SS_A + SS_B + SS_e = SS_y = \sum_i\sum_j\sum_k (y_{ijk} - \bar{y})^2. \tag{17}$$

Otóż sumami kwadratów dla klasyfikacji A i B są odpowiednio

$$SS_A = s.\sum_i p_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2 \quad \text{i} \quad SS_B = p.\sum_j s_j(\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2, \tag{18}$$

a wartościami oczekiwanymi średnich kwadratów są

1) Dla restrykcji ważonych

$$E(V_A) = \sigma_e^2 + \frac{s.}{a-1}\sum_i^a p_i a_i^2, \tag{19}$$

2) Dla restrykcji nieważonych

$$(20)\qquad E(V_A) = \sigma_e^2 + \frac{s.}{a-1}\sum_{i=1}^{a} p_i\left(a_i - \frac{1}{p.}\sum_i p_i a_i\right)^2.$$

Hipotezę, że wszystkie $a_i = 0$, weryfikuje się w oparciu o funkcję testową

$$F_A^0 = \frac{SS_A}{a-1} : \hat{\sigma}^2.$$

3) Przejdźmy do modeli z istotną interakcją. Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE. *Suma kwadratów w analizie wariancji dla efektów głównych a w przypadku istotnej interakcji i modelu statystycznego* (1) *jest*

$$(21)\qquad SS_A = \sum_{i=1}^{a} W_i(\hat{A}_i - \bar{A})^2,$$

gdzie

$$(22)\qquad \hat{A}_i = \sum_{j=1}^{b} w_j \bar{y}_{ij}, \quad \bar{A} = \frac{\sum_i W_i A_i}{\sum_i W_i},$$

przy czym

$$(23)\qquad W_i = \left[\sum_j \frac{w_j^2}{n_{ij}}\right]^{-1},$$

gdzie w_j *są dowolnymi wagami spełniającymi warunek* $\sum_j w_j = 1$.

D o w ó d. Skorzystamy z twierdzenia Yatesa [17]: *Jeżeli wielkości* u_i $(i = 1, 2, \ldots, a)$, *będące kombinacjami liniowymi niezależnych y-ów o wariancji* σ^2, *mają wariancję* σ^2/W_i, *to estymatorem wariancji* σ^2 *jest*

$$(24)\qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum W_i(u_i - \bar{u})^2}{a-1},$$

gdzie $\bar{u} = \sum W_i u_i / \sum W_i$, W_i *nazywamy wagami*. Obliczmy wariancję $\hat{A}_i$, tj. wariancję średniej ważonej średnich podklas $\bar{y}_{ij}$ i-tego wiersza podwójnej klasyfikacji krzyżowej $A \times B$

$$\mathrm{Var}(\hat{A}_i) = \mathrm{Var}\left(\sum_j^b w_j \bar{y}_{ij}\right) = \sum_j^b w_j^2 \mathrm{Var}(\bar{y}_{ij}) = \sum_j^b w_j^2 \frac{\sigma^2}{n_{ij}} = \frac{\sigma^2}{W_i},$$

gdzie W_i jest określone w (23). Z twierdzenia Yatesa wynika wprost, że estymatorem wariancji σ^2 jest

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum W_i(\hat{A}_i - \bar{A})^2}{a-1},$$

a stąd, że sumą kwadratów dla efektów a jest (21).

Twierdzenie to metodą inną, a mianowicie metodą unormowanych maksymalnych porównań, udowodnił Scheffé [10].

Rozważmy dwa przypadki wag w_j, które będą prowadziły do restrykcji ważonych i nieważonych.

Przypadek pierwszy — restrykcje ważone. Niech $w_j = n_{.j}/n$. Wtedy wobec $n_{ij} = p_i s_j$ mamy $n_{.j} = p.s_j$, a z (23) otrzymujemy wprost $W_i = s.p_i$. Stąd sumą kwadratów dla efektów a jest (21), czyli

$$SS_A = s.\sum_{i=1}^{a} p_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2 \tag{25}$$

przy $\nu = a-1$ stopniach swobody. W podobny sposób dowodzi się, że sumą kwadratów dla efektów β jest

$$SS_B = p.\sum_{j=1}^{b} s_j(\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2 \tag{26}$$

przy $\nu = b-1$ stopniach swobody. Metodą reduktów (por. Kempthorne [2]) można wykazać, że sumą kwadratów dla interakcji AB jest

$$SS_{AB} = \sum_i\sum_j p_i s_j(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y})^2 \tag{27}$$

przy $\nu = (a-1)(b-1)$ stopniach swobody. Podobnie jak dla danych ortogonalnych otrzymujemy tu znaną tożsamość (por. Bankier i Walpole [1])

$$SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_e = SS_y, \tag{28}$$

gdzie SS_e jest sumą kwadratów „wewnątrz podklas", a SS_y — sumą kwadratów odchyleń indywidualnych wyników y od ich średniej. Wartością oczekiwaną średniego kwadratu dla A jest (19), a dla interakcji AB

$$E(V_{AB}) = \sigma_e^2 + \frac{1}{(a-1)(b-1)}\sum_i\sum_j p_i s_j(\alpha\beta)_{ij}^2.$$

Przypadek drugi — restrykcje nieważone. Niech $w_j = 1/b$. Wtedy szczególnym przypadkiem metody Scheffégo unormowanych porównań okazuje się metoda Yatesa ważonych kwadratów średnich. Zgodnie z (21), (22) i (23) sumą kwadratów dla efektów a przy istotnej interakcji jest

$$SS_A^* = bH_s\sum_i p_i(\tilde{y}_{i.} - \tilde{y}_A)^2, \tag{29}$$

gdzie

$$H_s = \left[\frac{1}{b}\sum_j\frac{1}{s_j}\right]^{-1}$$

jest średnią harmoniczną s-ów,

$$\tilde{y}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_j \bar{y}_{ij}, \quad \tilde{y}_A = \frac{1}{p.}\sum_i p_i \tilde{y}_{i.}.$$

Podobną postać otrzymujemy na sumę kwadratów SS_B^* dla efektów β

$$SS_B^* = aH_p \sum_j s_j(\tilde{y}_{.j} - \tilde{y}_B)^2, \tag{30}$$

gdzie

$$H_p = \left[\frac{1}{a}\sum_i \frac{1}{p_i}\right]^{-1}$$

jest średnią harmoniczną p-ów,

$$\tilde{y}_{.j} = \frac{1}{a}\sum_i \bar{y}_{ij}, \quad \tilde{y}_B = \frac{1}{s.}\sum_j s_j \tilde{y}_{.j}.$$

Sumy kwadratów SS_{AB}, SS_e i SS_y mają postaci poprzednio zdefiniowane. W rozważanym przypadku nieważonych restrykcji przy interakcji nie ma odpowiedniej tożsamości do (28). Tu

$$SS_A^* + SS_B^* + SS_{AB} + SS_e \neq SS_y. \tag{31}$$

Wynika to stąd, że na skutek różnych definicji efektów głównych przy restrykcjach ważonych i nieważonych sumy kwadratów dla efektów głównych α i β w obu przypadkach definiuje się różnie. Stąd postaci funkcji testowych F dla weryfikacji hipotez dla α i β są przy istotnych interakcjach inne niż przy restrykcjach ważonych.

Równość w (31) zachodzi dla danych ortogonalnych, tj. gdy $n_{ij} = k = \text{const}$. A oto wartości oczekiwane dla średnich kwadratów w metodzie ważonych kwadratów Yatesa

$$E(V_A^*) = \sigma_e^2 + \frac{H_s b}{a-1}\sum_i p_i\left(a_i - \frac{1}{p.}\sum_i p_i a_i\right)^2,$$

$$E(V_{AB}) = \sigma_e^2 + \frac{1}{(a-1)(b-1)}\sum_i\sum_j p_i s_j[(\alpha\beta)_{ij} - (\alpha\beta)_{i.} - (\alpha\beta)_{.j} + (\alpha\beta)_{..}]^2,$$

gdzie

$$(\alpha\beta)_{i.} = \frac{1}{s.}\sum_j s_j(\alpha\beta)_{ij}, \quad (\alpha\beta)_{.j} = \frac{1}{p.}\sum_i p_i(\alpha\beta)_{ij},$$

$$(\alpha\beta)_{..} = \frac{1}{p.s.}\sum_i\sum_j p_i s_j(\alpha\beta)_{ij}.$$

Weryfikacja hipotezy, że nie ma interakcji, opiera się na funkcji testowej postaci $F = V_{AB}/V_e$, a weryfikacja hipotezy, że efekty α nie różnią się między sobą i że efekty β nie różnią się między sobą, opierają się

1) przy restrykcjach ważonych odpowiednio na funkcjach testowych

$$F_A = \frac{V_A}{V_e} \quad \text{i} \quad F_B = \frac{V_B}{V_e}, \tag{32}$$

2) przy restrykcjach nieważonych na funkcjach

$$F_A^* = \frac{V_A^*}{V_e} \quad \text{i} \quad F_B^* = \frac{V_B^*}{V_e}, \tag{33}$$

gdzie $V_e = \hat{\sigma}^2$ (por. (16)), $V_A = SS_A/(a-1)$, $V_B = SS_B/(b-1)$, $V_A^* = SS_A^*/(a-1)$, $V_B^* = SS_B^*/(b-1)$.

W zasadzie dla uzyskania dokładnych testów istotności i przedziałów ufności dla głównych efektów na ogół należy przyjmować, że interakcji nie ma.

W przypadku istotności interakcji AB postępujemy dwojako, zależnie od tego, czy w interakcji

$$(\alpha\beta)_{ij} = (\mu_{ij}-\mu_{i.})-(\mu_{.j}-\mu)$$

składniki $\mu_{ij}-\mu_{i.}$ oraz $\mu_{.j}-\mu$ są 1) przeciwnego znaku, czy też 2) jednakowego znaku.

W przypadku 1) nie weryfikujemy hipotezy H_A, że nie ma różnic między efektami α, i hipotezy H_B, że nie ma różnic między efektami β, lecz hipotezę, że nie ma różnic między a klasami klasyfikacji A dla ustalonego j-tego poziomu klasyfikacji B, tj. (por. Rao [9])

$$H_{A,B_j}: \mu_{1j} = \mu_{2j} = \ldots = \mu_{aj}.$$

W przypadku restrykcji ważonych i istotnej interakcji odpowiednią funkcją testową jest

$$F^0 = \frac{V_{A,B_j}}{V_e}$$

przy $\nu_1 = a-1$ i $\nu_e = n-ab$ stopniach swobody, gdzie V_e jest średnim kwadratem „wewnątrz podklas”, a

$$V_{A,B_j} = \frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a} p_i s_j(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{.j})^2 = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{ij}^2}{p_i s_j} - \frac{Y_{.j}^2}{s_j p.}\right],$$

gdzie $p. = \sum_i p_i$, $Y_{ij} = \sum_k y_{ijk}$, $Y = \sum_i\sum_j Y_{ij}$.

Można wykazać, że

$$E(V_{A,B_j}) = \sigma_e^2 + \frac{s_j}{a-1} \sum_i p_i[a_i + (\alpha\beta)_{ij}]^2 = \sigma_e^2 + \frac{s_j}{a-1} \sum_i p_i(\mu_{ij} - \mu_{.j})^2.$$

dla ustalonego $j = 1, \ldots, b$.

W przypadku 2), gdy składniki są znaku zgodnego, mamy podstawę weryfikować hipotezy H_A i H_B. Postępujemy jak w 3) przy restrykcjach ważonych lub nieważonych. Funkcje testowe podano w (32) i (33).

Porównywanie efektów głównych, gdy interakcja jest istotna, oznacza porównywanie różnic między klasami klasyfikacji A, gdy bierze się ich przeciętne po klasach klasyfikacji B. Może się zdarzyć, że hipoteza H_{AB} zostaje odrzucona, a hipotezy H_A i H_B — nieodrzucone. Na ogół konsekwencją istotności interakcji $\alpha\beta$ jest istotność efektów głównych α i β.

5. Modele typu $a \times 2$ i 2×2. Podamy postaci sum kwadratów analizy wariancji i wartości oczekiwane średnich kwadratów dla modeli typu $a \times 2$ i 2×2 tak, jak to się czyni dla danych nieortogonalnych, gdyż uzyskuje się tu widoczne uproszczenia.

1° Model $a \times 2$ z nieistotną interakcją. Dla dowolnych restrykcji mamy sumę kwadratów dla B

$$SS_B = \frac{p_{.}H_s}{2}(\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2})^2$$

i wartość oczekiwaną średniego kwadratu dla B

$$E(V_B) = \sigma_e^2 - \frac{p_{.}H_s}{2}(\beta_1 - \beta_2)^2$$

przy $\nu = 1$ stopniu swobody, oraz dla interakcji AB

$$SS_{AB} = \frac{H_s}{2} \sum_i p_i[(\bar{y}_{i1} - \bar{y}_{i2}) - (\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2})]^2,$$

$$E(V_{AB}) = \sigma_e^2 + \frac{H_s}{2(a-1)} \sum_i p_i[(\alpha\beta)_{i1} - (\alpha\beta)_{i2}]^2,$$

gdzie

$$H_s = \frac{2}{s_1^{-1} + s_2^{-1}}.$$

Zauważmy, że dla danych nieortogonalnych, przy braku interakcji i restrykcjach ważonych, zachodzi relacja

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{a} H_i(\bar{y}_{i1} - \bar{y}_{i2})}{\sum_i H_i} \neq \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2},$$

gdzie

$$H_i = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{i1}} + \frac{1}{n_{i2}}\right)\right]^{-1}$$

jest średnią harmoniczną liczebności i-tego wiersza. Natomiast w przypadku danych proporcjonalnych wobec $H_i = H_s p_i$ oraz $\bar{y}_{.j} = \frac{1}{p.}\sum_i p_i \bar{y}_{ij}$ mamy

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{a} p_i(\bar{y}_{i1} - \bar{y}_{i2})}{p.} = \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2,$$

a to jest estymator głównego efektu β. W przypadku danych nieortogonalnych D nie jest estymatorem efektu β.

2° Model $a \times 2$ z interakcją istotną. Przy restrykcjach nieważonych (metoda ważonych kwadratów średnich Yatesa) mamy

$$SS_B = \frac{aH_p H_s}{2}(\tilde{y}_{.1} - \tilde{y}_{.2})^2 \quad \text{i} \quad E(V_B) = \sigma_e^2 + \frac{aH_p H_s}{2}(\beta_1 - \beta_2)^2,$$

gdzie

$$\tilde{y}_{.j} = \frac{1}{a}\sum_i \bar{y}_{ij}, \qquad H_p = \frac{a}{\sum_i p_i^{-1}}.$$

3° Model 2×2 z interakcją istotną. Mamy dla dowolnych restrykcji.

$$SS_{AB} = \frac{H_s H_p}{4}(\bar{y}_{11} - \bar{y}_{12} - \bar{y}_{21} + \bar{y}_{22})^2$$

oraz

$$E(V_{AB}) = \sigma_e^2 + \frac{H_s H_p}{4}[(\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{12} - (\alpha\beta)_{21} + (\alpha\beta)_{22}]^2.$$

4° Model 2×2 z interakcją nieistotną. Można wykazać, że dla danych nieortogonalnych efektywnym estymatorem efektu α metodą dopasowania stałych jest

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_j H_{.j}(\bar{y}_{1j} - \bar{y}_{2j})}{\sum_j H_{.j}}$$

gdzie

Gdy dane są proporcjonalne, to

$$H_j = \left(\frac{1}{2s_j}\sum_i \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = s_j H_p$$

i efektywnym estymatorem efektu a jest (por. Yates [18])

$$\hat{a} = \frac{1}{s.}\sum_j s_j(\bar{y}_{1j}-\bar{y}_{2j}).$$

6. Przedziały ufności S Scheffégo dla porównań głównych efektów przy istotnej interakcji. Gdy hipoteza o braku różnic między głównymi efektami klasyfikacji A zostaje odrzucona, można przy istotnej interakcji stosować przedziały ufności S Scheffégo [10] dla porównań głównych efektów. Przedziały te mają różne postaci dla restrykcji ważonych i nieważonych.

Przedziały ufności T Tukeya nie mają tu zastosowania, ponieważ średnie $\bar{y}_{i.}$ oparte na nierównych liczebnościach mają różne wariancje.

I. Restrykcje ważone. Estymatorem porównania $\Psi = \sum_i c_i a_i$, gdzie $\sum_i c_i = 0$ jest

$$\hat{\Psi} = \sum_i c_i \hat{a}_i = \sum_i c_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}) = \sum_i c_i\bar{y}_{i.},$$

gdzie

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{s.}\sum_j s_j\bar{y}_{ij}.$$

Estymatorem wariancji tego porównania jest

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Psi}) = \frac{V_e}{s.}\sum_{i=1}^{a}\frac{c_i^2}{p_i}.$$

Wobec tego $(1-a)$-procentowy przedział ufności dla wszystkich jednoczesnych porównań Ψ między efektami $a_1, a_2, \ldots, a_a$ ma postać

$$\sum_i c_i\bar{y}_{i.} - \sqrt{(a-1)\cdot F_a\cdot\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Psi})} \leqslant \Psi \leqslant \sum_i c_i\bar{y}_{i.} + \sqrt{(a-1)\cdot F_a\cdot\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Psi})}, \tag{34}$$

gdzie F_a jest a-procentową wartością graniczną odczytaną z tablic F Snedecora przy $\nu_1 = a-1$ i $\nu_2 = n-ab$ stopniach swobody przy poziomie ufności a (np. $a = 0{,}05$).

II. Restrykcje nieważone. Estymatorem porównania Ψ jest

$$\hat{\Psi} = \sum_i c_i a_i^* = \sum_i c_i(\tilde{y}_{i.}-\tilde{y}) = \sum_i c_i\tilde{y}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_i c_i\sum_j \bar{y}_{ij} = \frac{1}{b}\sum_i c_i\tilde{Y}_{i.},$$

gdzie $\sum_i c_i = 0$ oraz $\tilde{Y}_{i.} = \sum_j \bar{y}_{ij}$.

Estymatorem wariancji porównania $\hat{\Psi}$ jest

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Psi}) = \frac{V_e}{b^2}\left(\sum_j^b \frac{1}{s_j}\right)\sum_i \frac{c_i^2}{p_i} = \frac{V_e}{bH_s}\sum_i^a \frac{c_i^2}{p_i},$$

gdzie

$$H_s = \left[\frac{1}{b}\sum_j^b \frac{1}{s_j}\right]^{-1}$$

Wobec tego jednoczesnym (wielokrotnym) przedziałem ufności S Scheffégo dla porównań Ψ między $a_1, a_2, \ldots, a_a$ jest

$$\hat{\Psi} \mp \sqrt{(a-1)\cdot F_a \cdot \hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Psi})}, \tag{35}$$

gdzie oznaczenia podano w I.

Przedziały ufności dla jednego porównania mają postać przedziałów t Studenta.

7. Stały model podwójnej klasyfikacji hierarchicznej. Bankier i Walpole [1] zajmują się modelem podwójnej klasyfikacji hierarchicznej w przypadku restrykcji ważonych. Omówmy tenże model w przypadku restrykcji nieważonych. Przypuśćmy, że mamy model klasyfikacji hierarchicznej B w A postaci

$$y_{ijk} = \mu_{j(i)} + e_{ijk}, \tag{36}$$

$$i = 1, \ldots, a, \quad j = 1, \ldots, b, \quad k = 1, \ldots, n_{ij}, \quad n_{ij} = p_i s_j,$$

gdzie $\mu_{j(i)}$ oznacza średnią j-tej klasy klasyfikacji B w i-tej klasie klasyfikacji A, y_{ijk} — k-tą obserwację j-tej klasy klasyfikacji B w i-tej klasie klasyfikacji A, e_{ijk} — błąd odpowiadający obserwacji y_{ijk}. Zakładamy, że e_{ijk} mają niezależne normalne rozkłady ze średnią zero i wspólną wariancją σ_e^2. Wprowadźmy kilka następujących definicji:

DEFINICJA 1. *Średnią i-tej klasy klasyfikacji A określamy jako średnią nieważoną postaci*

$$\mu_{i.} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \mu_{j(i)}. \tag{37}$$

DEFINICJA 2. *Średnią ogólną μ w populacji nazywamy średnią nieważoną postaci*

$$\mu = \frac{1}{a}\sum_i \mu_{i.} = \frac{1}{ab}\sum_i^a \sum_j^b \mu_{j(i)}. \tag{38}$$

DEFINICJA 3. *Efektem głównym j-tej klasy klasyfikacji B w i-tej klasie klasyfikacji A nazywamy*

$$\beta(a)_{j(i)} = \mu_{j(i)} - \mu_{i}. \tag{39}$$

DEFINICJA 4. *Efektem głównym i-tej klasy klasyfikacji A nazywamy*

$$a_i = \mu_{i.} - \mu. \tag{40}$$

Konsekwencją tych definicji jest

$$\mu_{j(i)} = \mu + a_i + \beta(a)_{j(i)} \tag{41}$$

oraz restrykcje nieważone

$$\sum_i a_i = \sum_j \beta(a)_{j(i)} = 0 \tag{42}$$

dla każdego i.

Estymatorami parametrów modelu μ, a_i, $\beta(a)_{j(i)}$ oraz σ^2 według metody najmniejszych kwadratów są

$$\begin{gathered} \hat{\mu} = \frac{1}{ab}\sum_i^a \sum_j^b \bar{y}_{ij} = \tilde{y}, \qquad \tilde{a}_i = \tilde{y}_{i.} - \tilde{y}, \\ \tilde{\beta(a)}_{j(i)} = \bar{y}_{ij} - \tilde{y}_{i.}, \qquad \hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n-ab}\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^{v_i s_j} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 = V_e, \end{gathered} \tag{43}$$

gdzie $\tilde{y}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_j^b \bar{y}_{ij}$.

Weryfikujemy dwie hipotezy:

$$H_1: \quad \beta(a)_{j(i)} = 0, \quad i = 1, \ldots, a, \quad j = 1, \ldots, b, \tag{44}$$

$$H_2: \quad a_i = 0, \quad i = 1, \ldots, a. \tag{45}$$

Korzystając odpowiednio z funkcji testowych (por. tablicę analizy wariancji)

$$F_1^0 = \frac{SS_{B(A)}}{a(b-1)} : V_e \tag{46}$$

przy $\nu_1 = a(b-1)$ i $\nu_2 = n-ab$ stopniach swobody,

$$F_2^0 = \frac{SS_A}{a-1} : V_e \tag{47}$$

przy $\nu_1 = a-1$ i $\nu_2 = n-ab$ stopniach swobody.

TABLICA 1. Analiza wariancji dla podwójnej klasyfikacji hierarchicznej w przypadku restrykcji nieważonych

Źródło zmienności	Stopnie swobody ν	Hipoteza H_i	Sumy kwadratów SS	Wartości oczekiwane średnich kwadratów $E(V)$
1. A	$a-1$	$a_i = 0$	$SS_A = bH_s \sum_i p_i(\tilde{y}_{i.} - \tilde{y}_A)^2$	$E(V_A) = \sigma_e^2 + \frac{bH_s}{a-1} \times \sum_i p_i (a_i - \frac{1}{p.} \sum_i p_i a_i)^2$
2. B w A	$a(b-1)$	$\beta(a)_{j(i)} = 0$	$SS_{B(A)} = \sum_i \sum_j p_i s_j (\bar{y}_{ij} - \tilde{y}_{i.})^2$	$E(V_{B(A)}) = \sigma_e^2 + \frac{1}{a(b-1)} \times \sum_i \sum_j p_i s_j \left[\beta(a)_{j(i)} - \frac{1}{s.} \sum_j s_j \beta(a)_{j(i)}\right]^2$
3. Wewnątrz podklas	$n-ab$	—	$SS_e = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$	$E(V_e) = \sigma_e^2$
Całość	$n-1$	—	$SS_y = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y})^2$	—

W tablicy 1

$$H_s = \left(\frac{1}{b} \sum_j \frac{1}{s_j}\right)^{-1}$$

oznacza średnią harmoniczną s-ów,

$$\tilde{y}_{i.} = \frac{1}{b} \sum_j^b \bar{y}_{ij}$$

oznacza średnią nieważoną średnich podklas w i-tej klasie klasyfikacji A,

$$\tilde{y}_A = \frac{1}{b} \sum_j \bar{y}_{.j},$$

gdzie $\bar{y}_{.j} = \sum_i \sum_k y_{ijk}/p.s_j$, jest średnią j-tej klasy klasyfikacji B.

Sumę kwadratów SS_A i średnią $\tilde{y}_A$ wyprowadza się bezpośrednio z podanego wyżej twierdzenia Yatesa.

8. Model losowy podwójnej klasyfikacji krzyżowej. Modelem skończonym (finite model) klasyfikacji krzyżowej z interakcjami zajmują się Wilk i Kempthorne [15]. Definiując sumy kwadratów w analizie wariancji jak dla restrykcji ważonych (por. (25), (26) i (27)), wyznaczają wartości oczekiwane średnich kwadratów. Nadto podają wartości oczekiwane średnich kwadratów, korzystając z przybliżonej metody Yatesa nieważonych średnich. Z wyników tych można uzyskać tablicę analizy wariancji dla modelu losowego z restrykcjami ważonymi.

Zajmijmy się innym losowym modelem, przez nich nie omówionym, a mianowicie losowym modelem podwójnej klasyfikacji krzyżowej z interakcją przy restrykcjach nieważonych.

Zakładamy, że główne efekty losowe a_i, β_j, interakcyjne efekty losowe $(a\beta)_{ij}$ oraz błędy e_{ijk} z modelu (1) są niezależne i mają średnie równe zeru i wariancje odpowiednio równe σ_A^2, σ_B^2, σ_{AB}^2 i σ_e^2.

Sumy kwadratów dla efektów głównych SS_A^* i SS_B^* postaci (29) i (30) uzyskuje się metodą Yatesa [17] ważonych kwadratów średnich. Sumą kwadratów dla interakcji jest (28), a sumą kwadratów „wewnątrz podklas” $SS_e = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$. Wartości oczekiwane średnich kwadratów $E(V)$, obliczone na podstawie twierdzenia B Bankiera i Walpole'a [1], mają postać

$$E(V_A) = \frac{bH_sP}{a-1}\sigma_A^2 + \frac{H_sP}{a-1}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2,$$

$$E(V_B) = \frac{aH_pS}{b-1}\sigma_B^2 + \frac{H_pS}{b-1}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2,$$

$$E(V_{AB}) = \frac{SP}{(a-1)(b-1)}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2, \qquad E(V_e) = \sigma_e^2,$$

gdzie

$$P = p. - \frac{1}{p.}\sum_i p_i^2, \qquad S = s. - \frac{1}{s.}\sum_j s_j^2;$$

średnie harmoniczne H_s i H_p były zdefiniowane w § 4.

9. Zastosowania. Przykłady. G. W. Snedecor [13] podaje metodę opracowywania danych, gdy w podklasach występują liczebności nieproporcjonalne. Jest to tzw. *metoda oczekiwanych proporcjonalnych liczebności* (por. W. Oktaba [5]). Przyjmuje się w niej, że liczebności w podklasach populacji są proporcjonalne. Snedecor zamieszcza odpowiedni przykład liczbowy z przechowywaniem jaj, korzystając z modelu podwójnej klasyfikacji krzyżowej.

Przykłady dla danych proporcjonalnych występują w nielicznych publikacjach. W czwartym wydaniu swej książki Snedecor [12] rozpatruje model podwójnej klasyfikacji krzyżowej typu 5×2 przy restrykcjach ważonych. Dane obejmują tuczniki obojga płci należące do pięciu ras. Cechą badaną jest wartość rzeźna tucznika. Interakcja rasy $\times$ płeć okazała się nieistotna.

Analogiczny model typu 3×3 wykorzystuje Ostle [6]. Dane liczbowe dotyczą plonów trzech odmian owsa poddanych trzech różnym nawożeniom.

W pracy niniejszej zwróciliśmy uwagę na różnice w opracowywaniu danych proporcjonalnych w przypadku istotnej interakcji i restrykcji ważonych i nieważonych nałożonych na parametry modelu.

Uzyskuje się różne oceny efektów głównych i interakcyjnych oraz różne analizy wariancji, a stąd ewentualnie różne wnioski z weryfikacji hipotez statystycznych (por. tablice 3 i 4). Dla ilustracji wykorzystujemy część proporcjonalnych danych liczbowych uzyskanych przez Pełczyńską [7] w Katedrze Higieny Produktów Zwierzęcych Wydziału Weterynarii WSR w Lublinie. W badaniach chodziło m. in. o określenie zawartości tkanki łącznej (y) w kiełbasie jednego gatunku, produkowanej według tej samej receptury i przez tę samą wytwórnię, w celu porównania $a = 10$ produkcji (klasyfikacja A) i $b = 2$ metod oznaczenia chemicznej i histologicznej (klasyfikacja B) oraz zweryfikowania istotności interakcji AB między produkcjami i metodami. Do oznaczeń brano próbki kiełbasy o wadze 125 g. Dokonano 12 oznaczeń metodą chemiczną i 9 oznaczeń metodą histologiczną dla każdej z 10 produkcji, uzyskując w sumie $n = a(9+12) = 10 \cdot 21 = 210$ obserwacji, w tym $12a = 12 \cdot 10 = 120$ metodą chemiczną i $9a = 9 \cdot 10 = 90$ metodą histologiczną. Z wyników zestawionych w tablicy 2 jest widoczne, że podlegają podwójnej klasyfikacji krzyżowej produkcje $\times$ metody z $ab = 10 \cdot 2 = 20$ podklasami. Danym tym przypiszemy model (1) przy $i = 1, \ldots, 10, j = 1, 2, k = 1, \ldots, n_{ij}$, gdzie $n_{ij} = p_i s_j$.

Zgodnie z uwagami § 2 wyznaczamy

$$p_i = \frac{n_{i.}}{n} = \frac{21}{210} = \frac{1}{10}, \quad i = 1, \ldots, 10,$$

oraz $s_1 = n_{.1} = 120$, $s_2 = n_{.2} = 90$.

Gdy $p_i = \text{const}$ oraz s_j jest zmienne, jak w naszym przykładzie, mówimy, że między danymi zachodzi stała proporcjonalność. W tablicy 2 podano w podklasach trzy następujące wielkości: sumy wyników $Y_{ij} = \sum_k y_{ijk}$, średnie $\bar{y}_{ij} = Y_{ij}/p_i s_j$ i liczebności $p_i s_j$, oraz następujące wielkości brzegowe dla produkcji A i metod B: sumy wyników dla $A - Y_{i.} = \sum_j Y_{ij}$, ważone średnie $\bar{y}_{i.} = Y_{i.}/p_i s.$, liczebności $p_i s.$; sumy wyników

TABLICA 2. Zawartość tkanki łącznej w kiełbasie określonej dwiema metodami w 10 produkcjach. Sumy, liczebności, ważone i nieważone średnie.

Metoda B / Produkcja A	Chemiczna 1	Histologiczna 2	Sumy wyników, liczebności i ważone średnie	Nieważone średnie
1	$Y_{11} = 177{,}5$ $p_1 s_1 = 12$ $\bar{y}_{11} = 14{,}79$	$Y_{12} = 138{,}3$ $p_1 s_2 = 9$ $\bar{y}_{12} = 15{,}37$	$Y_{1.} = 315{,}8$ $p_1 s. = 21$ $y_{1.} = 15{,}04$	$\tilde{y}_{1.} = 15{,}08$
2	$Y_{21} = 160{,}3$ $p_2 s_1 = 12$ $\bar{y}_{21} = 13{,}36$	$Y_{22} = 155{,}9$ $p_2 s_2 = 9$ $\bar{y}_{22} = 17{,}32$	$Y_{2.} = 316{,}2$ $p_2 s. = 21$ $\bar{y}_{2.} = 15{,}06$	$\tilde{y}_{2.} = 15{,}34$
.	.	. . .	. . .	.
10	$Y_{10,1} = 160{,}3$ $p_{10} s_1 = 12$ $\bar{y}_{10,1} = 13{,}36$	$Y_{10,2} = 200{,}8$ $p_{10} s_2 = 9$ $\bar{y}_{10,2} = 22{,}31$	$Y_{10.} = 361{,}1$ $p_{10} s. = 21$ $\bar{y}_{10.} = 17{,}20$	$\tilde{y}_{10.} = 17{,}83$
Sumy, liczebności i ważone średnie	$Y_{.1} = 1641{,}6$ $p.s_1 = 120$ $\bar{y}_{.1} = 13{,}68$	$Y_{.2} = 1582{,}6$ $p.s_2 = 90$ $\bar{y}_{.2} = 17{,}58$	$Y = 3224{,}2$ $p.s. = 210$ $\bar{y} = 15{,}35$	—
Nieważone średnie	$\tilde{y}_{.1} = 13{,}68$	$\tilde{y}_{.2} = 17{,}58$	—	$\tilde{y} = 15{,}63$

dla B — $Y_{.j} = \sum_i Y_{ij}$, ważone średnie $\bar{y}_{.j} = Y_{.j}/p.s_j$, liczebności $p.s_j$ i ważoną średnią ogólną $\bar{y} = \sum_i Y_{i.}/n = 15{,}35$.

Mając te wielkości, wyznaczamy ze wzorów (6) i (7) oceny efektów produkcji $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}$, oceny efektów metod $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}$ oraz oceny efektów interakcyjnych $\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}$. Są to oceny przy restrykcjach ważonych (2).

Przy nieważonych restrykcjach (3) wyznaczamy ze wzorów (8) i (9) oceny efektów produkcji $\tilde{\alpha}_i = \tilde{y}_{i.} - \tilde{y}$, oceny efektów metod $\tilde{\beta}_j = \tilde{y}_{.j} - \tilde{y}$ oraz oceny efektów interakcyjnych $\widetilde{(\alpha\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij} - \tilde{y}_{i.} - \tilde{y}_{.j} + \tilde{y}$. Do obliczenia tych wielkości potrzebne są nieważone średnie brzegowe klasyfikacji A i B, które zestawiono w ostatniej kolumnie i ostatnim wierszu tablicy 2. Nieważoną średnią ogólną jest

$$\tilde{y} = \frac{1}{ab} \sum_i \sum_j \bar{y}_{ij} = 15{,}63.$$

Oceny efektów głównych i interakcyjnych przy restrykcjach ważonych i nieważonych zestawiamy w tablicy 3.

TABLICA 3. Oceny efektów głównych $\hat{a}_i$, $\tilde{a}_i$, $\hat{\beta}_j$, $\tilde{\beta}_j$ i interakcyjnych $(\widehat{a\beta})_{ij}$, $(\widetilde{a\beta})_{ij}$ przy restrykcjach ważonych i nieważonych

Restrykcje	
ważone	nieważone
Efekty produkcji $\hat{a}_i$	$\tilde{a}_i$
$\hat{a}_1 = -0{,}32$	$\tilde{a}_1 = -0{,}55$
$\hat{a}_2 = -0{,}30$	$\tilde{a}_2 = -0{,}29$
. . . .	. . . .
$\hat{a}_{10} = +1{,}84$	$\tilde{a}_{10} = +2{,}20$
Efekty metod $\hat{\beta}_j$	$\tilde{\beta}_j$
$\hat{\beta}_1 = -1{,}67$	$\tilde{\beta}_1 = -1{,}95$
$\hat{\beta}_2 = +2{,}23$	$\tilde{\beta}_2 = +1{,}95$
Efekty interakcyjne $(\widehat{a\beta})_{ij}$	$(\widetilde{a\beta})_{ij}$
$(\widehat{a\beta})_{11} = +1{,}43$	$(\widetilde{a\beta})_{11} = +1{,}66$
$(\widehat{a\beta})_{21} = -0{,}03$	$(\widetilde{a\beta})_{21} = -0{,}03$
. . . .	. . . .
$(\widehat{a\beta})_{10,1} = -2{,}16$	$(\widetilde{a\beta})_{10,1} = -2{,}52$
$(\widehat{a\beta})_{12} = -1{,}90$	$(\widetilde{a\beta})_{12} = -1{,}66$
. . . .	. . . .
$(\widehat{a\beta})_{10,2} = +2{,}88$	$(\widetilde{a\beta})_{10,2} = +2{,}52$

Oceny są związane takimi samymi restrykcjami, jak parametry. Dla podania analizy wariancji pozostaje obliczyć w przypadku restrykcji ważonych sumy kwadratów SS_A, SS_B (por. (18)) i SS_{AB} (por. (27)) oraz sumę kwadratów wewnątrz podklas SS_E i sumę kwadratów dla wszystkich wyników SS_y.

Rachujemy to standardową metodą (porównaj Oktaba [5]), np.

$$SS_A = s.\sum_i p_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y})^2 = \sum \frac{Y_{i.}^2}{p_i s.} - \frac{Y^2}{n} = \frac{315{,}8^2+316{,}2^2+\ldots+361{,}1^2}{21} - \frac{3224{,}2^2}{210} = 463{,}04.$$

Przy restrykcjach nieważonych wobec wzorów (29) i (30) na sumy kwadratów dla SS_A^* i SS_B^* pozostaje obliczyć dwie następujące średnie:

$$\tilde{y}_A = \frac{1}{p.}\sum_i p_i \tilde{y}_{i.} = \frac{1}{1}\sum_i 0{,}1\tilde{y}_{i.} = 0{,}1(15{,}8+15{,}34+\ldots+17{,}83) = 15{,}63$$

oraz

$$\tilde{y}_B = \frac{1}{s.}\sum_j s_j \tilde{y}_{.j} = \frac{1}{210}(120\cdot 13{,}68+90\cdot 17{,}58) = 15{,}35,$$

a także dwie średnie harmoniczne:

$$H_s = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\right)\right]^{-1} = 102{,}857, \qquad H = p_i = 0{,}1,$$

gdyż p_i = const.

W tablicy 4 zestawiamy dwie analizy wariancji dla restrykcji ważonych i nieważonych.

TABLICA 4. Analiza wariancji dla podwójnej klasyfikacji krzyżowej przy danych proporcjonalnych oraz restrykcjach ważonych i nieważonych

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Sumy kwadratów SS		Średnie kwadraty		Wartość funkcji testowej F		$F_{0,01}$
		Restrykcje						
		ważone	nieważone	ważone	nieważone	ważone	nieważone	
Produkcje A	$a-1=9$	$SS_A = 463{,}04$	$SS_A^* = 509{,}18$	$V_A=51{,}45$	$V_A^*=56{,}58$	$F_A=8{,}79$	$F_A^*=9{,}66$	2,51
Metody B	$b-1=1$	$SS_B = 784{,}00$	$SS_B^* = 784{,}00$	$V_B = 784{,}00$	$V_B^* = 784{,}00$	$F_B = 133{,}86$	$F_B^* = 133{,}86$	6,77
Interakcja AB	$(a-1)\times(b-1)=9$	$SS_{AB}=412{,}35$		$V_{AB}=45{,}82$		$F_{AB}=7{,}82$		2,51
Błąd (wewnątrz podklas)	$n-ab=190$	$SS_e=1112{,}84$		$V_e=5{,}857$		–		–
Całość (suma)	$n-1=209$	$SS_y = 2772{,}25$		–	–	–	–	–

Prace cytowane

[1] J. D. Bankier i R. E. Walpole, *Components of variance analysis for proportional frequencies*, Ann. of Math. Stat. 28 (1957), str. 742-753.

[2] O. Kempthorne, *The design and analysis of experiments*, New York 1952.

[3] H. B. Mann, *Analysis and design of experiments*, New York 1949.

[4] W. Oktaba, *Mixed Models $I \times J$ and $I \times 2$ with Interaction in the Case of Non-orthogonal Data*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 16 (1962), str. 53-76.

[5] W. Oktaba, *Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie*, Warszawa 1967.

[6] B. Ostle, *Statistics in research*, Ames, Iowa, 1958.

[7] E. Pełczyńska, *Higiena i technologia środków spożywczych*, Medycyna Weterynaryjna 23 (1967), str. 358-361.

[8] R. L. Plackett, *Models in the analysis of variance*, J. Royal Statist. Soc. 22 B (1960), str. 195-217.

[9] C. R. Rao, *Advanced statistical methods in biometric research*, New York 1952.

[10] H. Scheffé, *The analysis of variance*, London 1959.

[11] H. F. Smith, *Analysis of variance with unequal but proportionate numbers of observation in the subclasses of a two-way classification*, Biometrics 7 (1951), str. 70-74.

[12] G. W. Snedecor, *Statistical methods*, Ames, Iowa 1948.

[13] G. W. Snedecor, *The method of expected numbers for tables of multiple classification with disproportionate subclass numbers*, J. Am. Stat. Assoc. 29 (1934), str. 389-393.

[14] G. W. Snedecor i G. M. Cox, *Disproportionate subclass numbers in tables of multiple classification*, Research Bulletin 180 (1935), Ames, Iowa, str. 272.

[15] M. B. Wilk i O. Kempthorne, *Some aspects of the analysis of factorial experiments in a completely randomized design*, The Ann. of Math. Stat. 27 (1956), str. 950-985.

[16] M. B. Wilk i O. Kempthorne, *Non-additivities in a Latin square design*, J. Amer. Statist. Ass., 52 (1957), str. 218-236.

[17] F. Yates, *The analysis of multiple classifications with unequal numbers in the different classes*, JASA 29 (1934), str. 51-66.

[18] F. Yates, Nature 160 (1947), str. 472-473.

Praca wpłynęła 13. 11. 1967

В. ОКТАБА и Х. МИКОС (Люблин)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ

РЕЗЮМЕ

В работе заполняется некоторые пределы в теории оценки и проверки гипотез для математических модели с постоянными и случайными факторами в случае пропорциональных частот. Рассматривается два типа модели зависящие от условий для параметров: 1) взвешенных или 2) невзвешенных.

Представляется разницы между моделями принимая во внимание оценки, критерии значимости и достоверные интервалы.

Результаты иллюстрируется на примере пропорциональных данных (см. § 9).

W. OKTABA and H. MIKOS (Lublin)

MATHEMATICAL MODELS FOR PROPORTIONAL DATA

SUMMARY

Some gaps in the theory of estimation and in the verification of hypotheses for mathematical models fixed and random in the case of proportional data are filled up.

Two types of models the parameters which were related by the linear restrictions 1) weighted or 2) unweighted are considered. The differences between the models in respect to the estimators, the tests of significance and the confidence intervals are given.

The results are illustrated with an example (see § 9).