ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

A. RYBARSKI (Wrocław)

PEWNA METODA LINEARYZACJI RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH TYPU RÓWNANIA WAHADŁA

W niniejszej pracy podano metodę przybliżonego rozwiązywania nieliniowych równań typu

$$y^{\cdot\cdot}+g(y)=0, \tag{I}$$

przy zadanych warunkach brzegowych (¹). Metoda polega na aproksymacji rozwiązania równania (I) przez rozwiązania równania liniowego

$$y^{\cdot\cdot}+ay+b=0$$

o stałych współczynnikach. Podano sposób wyboru współczynników a i b, zapewniający najlepsze w pewnym sensie oszacowanie błędu aproksymacji. Dla przykładu przeprowadzono obliczenia dla równania wahadła. Dla wahań o amplitudzie $\langle -1\text{ rad}, +1\text{ rad}\rangle$ błąd aproksymacji nie przekracza $0{,}84\%$.

W dalszym ciągu podano dla równania (I) metodę iteracyjną, polegającą na aproksymacji rozwiązania przez rozwiązania równań postaci

$$y^{\cdot\cdot}+ay=h_i(t), \quad i=1,2,\ldots$$

Podano założenia, przy których proces iteracji jest zbieżny i oszacowano szybkość zbieżności. Dla wahań wahadła o amplitudzie $\langle -1\text{ rad}, +1\text{ rad}\rangle$ otrzymuje się w pierwszym kroku iteracji około 9-krotne polepszenie aproksymacji, w stosunku do przybliżenia początkowego.

Podana metoda znajduje zastosowanie w zagadnieniach, które najczęściej bada się metodami asymptotycznymi ([2], rozdz. 1, § 2).

§ 1. Oznaczmy przez y_1 i y_2 dwie funkcje zmiennej t, ciągłe na domkniętym odcinku $\langle 0, T\rangle$ i równe sobie w punktach t_k, $0=t_0<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}=T$. Załóżmy, że funkcje te są na odcinkach $\langle t_k, t_{k+1}\rangle$ klasy C^2. Niech funkcje y_1 i y_2 spełniają równości

$$y_1^{\cdot\cdot}=f_1(y_1,t), \quad y_2^{\cdot\cdot}=f_2(y_2,t) \tag{1.1}$$

(¹) Część wyników tej pracy została zaanonsowana w nocie [1].

dla każdego t z odcinka $\langle 0, T\rangle$, z wyjątkiem co najwyżej punktów t_k. Załóżmy na koniec, że funkcja złożona $f_2(y_1, t)$ jest ciągła. Przy tych założeniach udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli liczba N, określona równością*

$$-N = \inf_{0\leqslant t\leqslant T} \frac{f_2(y_1, t)-f_2(y_2, t)}{y_1-y_2},$$

spełnia nierówność

$$0 \leqslant N < w^2 = \left\{\min_{k=0,1,\ldots,n} \frac{\pi}{t_{k+1}-t_k}\right\}^2,$$

to prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\|y_1^{\boldsymbol{\cdot}}-y_2^{\boldsymbol{\cdot}}\| \leqslant \frac{w}{w^2-N}\|f_2(y_1, t)-f_1(y_1, t)\|, \tag{1.2.1}$$

gdzie przez $\|h\|$ lub $\|h(t)\|$ oznaczamy

$$\left\{\frac{1}{T}\int_0^T h^2(t)\,dt\right\}^{1/2}.$$

Jeżeli zaś mamy $N \leqslant 0$, to prawdziwa jest nierówność nieco ostrzejsza, a mianowicie

$$\|y_1^{\boldsymbol{\cdot}}-y_2^{\boldsymbol{\cdot}}\| \leqslant \frac{1}{w}\|f_2(y_1, t)-f_1(y_1, t)\|. \tag{1.2.2}$$

Dowód tego twierdzenia opiera się na lemacie modyfikującym nierówność Stiekłowa ([3], str. 346, wzór (7)).

LEMAT. *Jeżeli funkcja $\eta(t)$ jest na odcinku $\langle 0, T\rangle$ klasy C^1, z wyjątkiem co najwyżej punktów t_k, w których równa się zeru, a pierwsza pochodna może mieć skoki, to normy $\|\eta\|$ i $\|\eta^{\boldsymbol{\cdot}}\|$ spełniają nierówność*

$$w\|\eta\| \leqslant \|\eta^{\boldsymbol{\cdot}}\|.$$

W istocie, oznaczając

$$I_k^{\boldsymbol{\cdot}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \eta^{\boldsymbol{\cdot}2}(t)\,dt, \qquad I_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \eta^2(t)\,dt, \qquad \Delta t_k = t_{k+1}-t_k,$$

z nierówności Stiekłowa mamy

$$I_k^{\boldsymbol{\cdot}} \geqslant \left(\frac{\pi}{\Delta t_k}\right)^2 I_k, \quad \text{a więc} \quad \sum_{k=0}^{n} I_k^{\boldsymbol{\cdot}} \geqslant w^2 \sum_{k=0}^{n} I_k,$$

co dowodzi lematu.

Przystępujemy do dowodu twierdzenia. Z równości (1.1) otrzymujemy równość

$$(y_1^{\cdot\cdot}-y_2^{\cdot\cdot})(y_1-y_2) =$$
$$= \{f_1(y_1,t)-f_2(y_1,t)\}(y_1-y_2)+\{f_2(y_1,t)-f_2(y_2,t)\}(y_1-y_2),$$

po której scałkowaniu otrzymujemy

$$\int_0^T (y_1^{\cdot}-y_2^{\cdot})^2dt+\int_0^T \{f_2(y_1,t)-f_2(y_2,t)\}(y_1-y_2)dt = \tag{1.3}$$
$$= -\int_0^T \{f_1(y_1,t)-f_2(y_1,t)\}(y_1-y_2)dt.$$

Jeżeli oznaczymy przez X zbiór miejsc zerowych funkcji y_1-y_2, to będzie

$$\int_0^T \{f_2(y_1,t)-f_2(y_2,t)\}(y_1-y_2)dt = \tag{1.4}$$
$$= \int_{\langle 0,T\rangle -X} dt(y_1-y_2)^2\frac{f_2(y_1,t)-f_2(y_2,t)}{y_1-y_2} \geqslant -N\int_0^T (y_1-y_2)^2dt.$$

Z nierówności Schwarza oraz z (1.3) i (1.4) otrzymujemy teraz

$$\|y_1^{\cdot}-y_2^{\cdot}\|^2-N\|y_1-y_2\|^2 \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \{f_2(y_1,t)-f_1(y_1,t)\}(y_1-y_2)dt \leqslant \tag{1.5}$$
$$\leqslant \|f_2(y_1,t)-f_1(y_1,t)\|\cdot\|y_1-y_2\|.$$

Ponieważ różnica y_1-y_2 spełnia założenia lematu, więc

$$w\|y_1-y_2\| \leqslant \|y_1^{\cdot}-y_2^{\cdot}\|. \tag{1.6}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $N \geqslant 0$, to z (1.5) i (1.6) otrzymamy

$$\left(1-\frac{N}{w^2}\right)\|y_1^{\cdot}-y_2^{\cdot}\|^2 \leqslant \frac{1}{w}\|y_1^{\cdot}-y_2^{\cdot}\|\cdot\|f_2(y_1,t)-f_1(y_1,t)\|.$$

Ponieważ z założenia jest $1-\dfrac{N}{w^2}>0$, to stąd wynika nierówność (1.2.1).

Jeżeli natomiast przyjmiemy $N<0$, to nierówności (1.5) i (1.6) dowodzą nierówności (1.2.2).

§ 2. Niech funkcja $y_0(t)$ będzie rozwiązaniem pierwszego zadania brzegowego dla równania

$$y^{\cdot\cdot}+g(y) = 0, \quad g(y)\in C(-\infty,+\infty), \tag{2.1}$$

na odcinku $\langle 0, T\rangle$. Funkcję $y_0(t)$ chcemy aproksymować rozwiązaniem równania liniowego o stałych współczynnikach. W tym celu napiszmy równanie

$$y^{\cdot\cdot} + ay + b = 0 \tag{2.2}$$

i oznaczmy przez $y_{ap}(t, a, b)$, lub krótko przez y_{ap}, jego rozwiązanie przy warunkach brzegowych

$$y_{ap}|_{t=0} = y_0(0), \quad y_{ap}|_{t=T} = y_0(T). \tag{2.3}$$

Może się zdarzyć, że o funkcji $y_0(t)$ mamy dodatkowe informacje, np. znamy jej wartości w punktach $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ przedziału $(0, T)$. W takim przypadku celowe będzie narzucić na funkcję $y_{ap}(t, a, b)$ dodatkowe warunki

$$y_{ap}|_{t=t_k} = y_0(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Funkcja y_{ap} spełniająca warunki (2.3) i (2.4) oraz równanie przybliżone (2.2), może mieć w punktach t_k skoki pierwszej pochodnej; poza tym jest w przedziałach $\langle t_k, t_{k+1}\rangle$ klasy C^2. Jeżeli parametr a spełnia nierówność $0 \leqslant a < w^2$, to do oszacowania błędu rozwiązania przybliżonego można użyć twierdzenia 1, przyjmując

$$f_1(y, t) = -g(y), \quad y_1 = y_0(t),$$
$$f_2(y, t) = -ay - b, \quad y_2 = y_{ap}(t, a, b).$$

Wtedy są spełnione założenia twierdzenia 1, przy czym $N = a$. Stąd otrzymujemy dla błędu aproksymacji, określonego wzorem

$$\Delta(y_0, y_{ap}) = \|y_0^{\cdot} - y_{ap}^{\cdot}\| \frac{T}{2},$$

oszacowanie

$$\Delta(y_0, y_{ap}) \leqslant \frac{T}{2} \cdot \frac{w}{w^2 - a} \|g(y_0) - ay_0 - b\|. \tag{2.5}$$

Z tego oszacowania, za pomocą znanej nierówności

$$\frac{T}{2} \|y_0^{\cdot} - y_{ap}^{\cdot}\| \geqslant |y_0(t) - y_{ap}(t, a, b)|, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.6}$$

otrzymujemy szukane oszacowanie błędu aproksymacji w metryce C ([3], str. 346, wzór (9)).

Obecnie możemy postawić następujące zadanie o „najlepszej" aproksymacji:

W obszarze $0 \leqslant a < w^2$, $-\infty < b < +\infty$, *wybrać* a *i* b *tak, by prawa strona oszacowania* (2.5) *była najmniejsza.*

Przy dodatkowych założeniach pokażemy w następnym paragrafie, jak to zadanie rozwiązać.

§ 3. Załóżmy, że funkcja $y_0(t)$ jest w przedziale $\langle 0; T\rangle$ ściśle monotoniczna. Wtedy można w całce $\|g(y_0)-ay_0-b\|^2$ zmienić zmienną całkowania t na $x = y_0(t)$. Za pomocą całki pierwszej równania (2.1)

$$\tfrac{1}{2}\dot{y}_0^2+G(y_0) = E = \text{const},$$

gdzie $G(x) = \int g(x)dx$, otrzymujemy identyczność

$$\|g(y_0)-ay_0-b\|^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{y_0(0)}^{y_0(T)} \frac{\big(g(x)-ax-b\big)^2}{\sqrt{2\big(E-G(x)\big)}}\,dx. \tag{3.1}$$

Wprowadźmy wielomiany $\varphi_0(x)$ i $\varphi_1(x)$, stopnia odpowiednio 0 i 1, przy czym $\varphi_1' > 0$, ortonormalne w przedziale $D = \big(y_0(0), y_0(T)\big)$ względem wagi $p(x)$, która przy pewnej stałej $\varkappa^2$ spełnia warunki

$$\int\limits_D p(x)dx = 1, \qquad \varkappa^2 p(x) \geqslant \frac{1}{T\sqrt{2\big(E-G(x)\big)}} \quad \text{dla } x\in D. \tag{3.2}$$

Rozwijając wyrażenie $ax+b$ na wielomiany φ_0 i φ_1

$$ax+b = \alpha\varphi_1+\beta\varphi_0, \qquad a = \alpha\varphi_1', \qquad b = \alpha\varphi_1(0)+\varphi_0,$$

otrzymujemy z równości (3.1) oraz warunków (3.2) nierówność

$$\begin{aligned}\|g(y_0)-ay_0-b\|^2 &\leqslant \varkappa^2 \int\limits_D p(x)\{g(x)-\alpha\varphi_1-\beta\varphi_0\}^2 dx = \\ &= \varkappa^2\{[g, g]+\alpha^2+\beta^2-2\alpha g_1-2\beta g_0\},\end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie skrót $[l_1, l_2]$ oznacza całkę $\int\limits_D p(x)l_1(x)l_2(x)dx$, a wielkości

$$\begin{aligned} g_0 &= [g, \varphi_0] = \int\limits_D p(x)g(x)\varphi_0(x)dx, \\ g_1 &= [g, \varphi_1] = \int\limits_D p(x)g(x)\varphi_1(x)dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

są współczynnikami rozwinięcia funkcji $g(x)$ na wielomiany φ_0, φ_1 przy najmniejszym odchyleniu kwadratowym.

Obecnie, za pomocą (3.3), możemy oszacowanie (2.5) błędu aproksymacji napisać w postaci następującej:

$$\begin{aligned}\Delta(y_0, y_{ap}) &\leqslant \frac{\varkappa T w}{2(w^2-\alpha\varphi_1')}\{[g, g]+\alpha^2+\beta^2-2\alpha g_1-2\beta g_0\}^{1/2} = \\ &= \frac{\varkappa T w}{2\varphi_1'}\,O(\alpha, \beta),\end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie oznaczyliśmy dla krótkości

$$O(\alpha,\beta)=\frac{1}{m-\alpha}\{[g,g]+\alpha^2+\beta^2-2\alpha g_1-2\beta g_0\}^{1/2},\qquad m=\frac{w^2}{\varphi_1'}.$$

Dla funkcji $O(\alpha,\beta)$ prawdziwy jest następujący

LEMAT. 1. *Jeżeli* $m\neq g_1$, *to funkcja* $O(\alpha,\beta)$ *osiąga ekstremum w punkcie*

$$\alpha_0=g_1-\frac{[g,g]-g_1^2-g_0^2}{m-g_1},\qquad \beta_0=g_0.$$

2. *Nierówność* $m>\alpha_0$ *jest równoważna z nierównością* $m>g_1$.

3. *Jeżeli* $m>g_1$, *to w punkcie ekstremalnym mamy absolutne minimum funkcji* $O(\alpha,\beta)$ *w obszarze* $-\infty<a<m$, $-\infty<b<+\infty$.

Dowód. Wzory na α_0 i β_0 otrzymuje się oczywiście z warunków

$$\frac{\partial O}{\partial\alpha}=\frac{\partial O}{\partial\beta}=0.$$

W dalszym ciągu otrzymujemy po przekształceniach

$$m-\alpha_0=\frac{(m-g_1)^2+[g,g]-g_0^2-g_1^2}{m-g_1}.$$

Ponieważ na podstawie nierówności Bessla jest $[g,g]-g_0^2-g_1^2\geqslant 0$, więc stąd wynika druga część lematu. Trzecia wreszcie część wynika z zależności

$$O(\alpha,\beta_0)\leqslant O(\alpha,\beta),\qquad \lim_{\alpha\to-\infty}O(\alpha,\beta)=+1,$$

$$\lim_{\alpha\to m-0}O(\alpha,\beta)=+\infty,\qquad O(\alpha_0,\beta_0)<1,$$

które łatwo sprawdzić bezpośrednim obliczeniem.

Obecnie możemy rozwiązać postawione zadanie o najlepszej aproksymacji. W istocie, z nierówności (3.5) i lematu o funkcji $O(\alpha,\beta)$ wynika

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli* $m>g_1$ *i* $\alpha_0\geqslant 0$, *to najlepsze oszacowanie błędu* $\Delta(y_0,y_{ap})$ *otrzymujemy, przyjmując* $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$. *Mamy wtedy*

$$\Delta\big(y_0(t),y_{ap}(t,a_0,b_0)\big)\leqslant\frac{\varkappa Tw}{2\varphi_1'}\cdot\frac{d}{\sqrt{1+d^2}},\tag{3.6}$$

gdzie

$$d=\frac{\{[g,g]-g_0^2-g_1^2\}^{1/2}}{m-g_1},\qquad a_0=\alpha_0\varphi_1',\qquad b_0=\alpha_0\varphi_1(0)+\beta_0.$$

W praktycznych oszacowaniach przydaje się następująca uwaga: Jeżeli oszacowanie (3.6) jest dobre, to znaczy gdy wielkość d jest mała, to można aproksymację „najlepszą” zastąpić przez aproksymację „praktyczną”, niewiele przy tym pogarszając oszacowanie błędu, podstawiając $\alpha = g_1$, $\beta = g_0$. W istocie, z oszacowania (3.5) otrzymujemy po obliczeniu

$$(3.7)\qquad \Delta\big(y_0(t),\, y_{ap}(t, a_p, b_p)\big) \leqslant \frac{\varkappa T w}{2\varphi_1'}\, d, \qquad a_p = g_1\varphi_1', \qquad b_p = g_1\varphi_1(0)+g_0.$$

Dla przykładu, gdy $d = 0{,}1$, to $d/\sqrt{1+d^2} \cong 0{,}095$, a więc polepszenie aproksymacji „praktycznej” przez wzięcie aproksymacji „najlepszej” jest niewielkie.

I jeszcze jedna uwaga: Oszacowania (3.6) i (3.7) zależą od wagi $p(x)$ i są najostrzejsze, jeżeli przyjąć

$$p(x) = \frac{1}{T\sqrt{2\big(E-G(x)\big)}}, \qquad \varkappa^2 = 1.$$

Przy takim wyborze $p(x)$ i $\varkappa$ nierówność (3.3) staje się równością. Jednakże wtedy obliczenie całek $[g, g]$, g_1 itp. może się okazać trudne. Czasem może się opłacić pogorszenie oszacowania za cenę efektywności lub prostoty rachunków.

§ 4. W tym paragrafie zilustrujemy przedstawione oszacowania na przykładzie równania wahadła

$$(4.1)\qquad y^{\cdot\cdot}+\sin y = 0$$

w przedziale $\langle 0, T\rangle$, gdzie $T = 2K(k)$, $k = \sin\frac{1}{2}x_m$, dla warunków brzegowych

$$y(0) = -x_m, \qquad y(T) = +x_m,$$

gdzie x_m jest ustaloną liczbą z przedziału $(0, \pi)$. Przy tych warunkach mamy, jak wiadomo (ob. np. [4], tom 1, str. 545, poz. 6.17):

$$(4.2)\qquad y_0(t) = 2\arcsin\{k\sin(amt)\}, \qquad y_0^{\cdot}(t) > 0 \text{ dla } t\in(0, T),$$

$$y_0(\tfrac{1}{2}T) = 0, \qquad y_0^{\cdot}(0) = y_0^{\cdot}(T) = 0.$$

Na rozwiązanie równania zlinearyzowanego nakładamy zatem warunki

$$(4.3)\qquad y_{ap}|_{t=0} = -x_m, \qquad y_{ap}|_{t=T/2} = 0, \qquad y_{ap}|_{t=T} = +x_m.$$

W oznaczeniach paragrafów poprzednich mamy

$$g(x) = \sin x, \qquad G(x) = -\cos x, \qquad \max_{k=0,1}(t_{k+1}-t_k) = \tfrac{1}{2}T,$$

$$E = \tfrac{1}{2}y_0^{\cdot 2}-\cos y_0 = -\cos x_m, \qquad E-G(x) = \cos x-\cos x_m.$$

Jako funkcję wagi $p(x)$ przyjmujemy

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_m^2 - x^2}}.$$

Ponieważ funkcja $(\cos x - \cos x_m)/(x_m^2 - x^2)$ maleje w przedziale $0 \leqslant x < < x_m < \pi$, więc

$$\frac{\cos x - \cos x_m}{x_m^2 - x^2} \geqslant \lim_{x \to x_m} \frac{\cos x - \cos x_m}{x_m^2 - x^2} = \frac{\sin x_m}{2x_m},$$

$$\frac{1}{T\sqrt{2(\cos x - \cos x_m)}} \leqslant \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{x_m}{\sin x_m}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_m^2 - x^2}}.$$

Za parametr $\varkappa^2$ można więc przyjąć wielkość

$$\varkappa^2 = \frac{\pi}{T} \left(\frac{x_m}{\sin x_m} \right)^{1/2}.$$

Mając $p(x)$ znajdujemy wielomiany φ_0 i φ_1. Po obliczeniu otrzymujemy

$$\varphi_0 = 1, \qquad \varphi_1 = \sqrt{2} \frac{x}{x_m}.$$

W końcu obliczamy g_0, g_1 oraz $[g, g]$. Otrzymujemy $g_0 = 0$ oraz

$$g_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{t \sin x_m t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2J_1(x_m),$$

$$[g, g] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - \cos 2x_m t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \tfrac{1}{2}\big(1 - J_0(2x_m)\big)$$

(ob. np. [5], poz. 3.528.3 oraz 3.524.5).

W myśl końcowej uwagi § 3, stosujemy aproksymację „praktyczną", podstawiając $\alpha = g_1$, $\beta = 0$, czyli

(4.4) $$a_p = g_1 \varphi_1' = \frac{2J_1(x_m)}{x_m}, \qquad b_p = g_1 \varphi_1(0) + g_0 = 0.$$

A więc przybliżone równanie drgań wahadła (2.2) przyjmuje postać

(4.5) $$y^{\cdot\cdot} + \frac{2J_1(x_m)}{x_m} y = 0$$

i ma rozwiązanie spełniające warunki (4.3), a mianowicie ([1])

(4.6) $$y_{ap} = \frac{x_m}{\sin \omega_0 T/2} \sin \omega_0 (t - T/2), \qquad \omega_0^2 = \frac{2J_1(x_m)}{x_m}.$$

([1]) Podobne przybliżone rozwiązanie równania wahadła można otrzymać metodami podanymi np. w [2], str. 55, wzór (2.26), jednakże bez oszacowania błędu.

Przechodzimy do szacowania błędu. Z oszacowania (3.7) otrzymujemy

$$(4.7)\qquad \Delta\big(y_0(t),\, y_{ap}(t,\, a_p,\, b_p)\big) \leqslant \frac{\varkappa T w}{2(w^2-a_p)}\{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}J_0(2x_m)-2J_1^2(x_m)\}^{1/2},$$

gdzie

$$w = 2\pi/T = \pi/K(\sin\tfrac{1}{2}x_m).$$

W końcu oszacujemy błąd w metryce C. Nierówność (2.6) możemy w naszym przypadku zaostrzyć ze względów symetrii, ponieważ funkcje $y_0(t)$ i $y_{ap}(t,\, a_p,\, b_p)$ są nieparzyste względem punktu $t = \frac{1}{2}T$. Mamy

$$(4.8)\qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T}|y_0-y_{ap}| = \max_{0\leqslant t\leqslant T/2}|y_0-y_{ap}| \leqslant \tfrac{1}{4}T\left\{\frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2}(y_0^{\cdot}-y_{ap}^{\cdot})^2dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \tfrac{1}{4}T\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}(y_0^{\cdot}-y_{ap}^{\cdot})^2dt\right\}^{1/2} = \tfrac{1}{4}T\|y_0^{\cdot}-y_{ap}^{\cdot}\|.$$

Z wzorów (4.7) i (4.8) otrzymujemy więc ostatecznie oszacowanie

$$(4.9)\qquad \left|2\arcsin\{k\sin(amt)\}-\frac{x_m}{\sin\frac{1}{2}\omega_0T}\sin\omega_0(t-\tfrac{1}{2}T)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{2}\varkappa\pi}{(2\pi/T)^2-a_p}\{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}J_0(2x_m)-2J_1^2(x_m)\}^{1/2}.$$

Poniżej przytoczono niektóre wyniki numeryczne:

x_m (w rad)	a_p	błąd w stopniach	błąd w procentach
0,6	0,9557	0,20	0,28
0,7	0,9400	0,32	0,39
0,8	0,9221	0,47	0,54
0,9	0,9021	0,68	0,66
1,0	0,8801	0,96	0,84
1,1	0,8652	1,30	1,03
1,5	0,7439	3,60	2,08
2,0	0,5767	10,36	4,48

§ 5. W tym paragrafie przedstawimy iteracyjną metodę rozwiązywania równania (2.1), która polega na przybliżaniu funkcji $g(y)$ funkcjami typu $ay+h(t)$. Oznaczmy przez y_{ap}^i przybliżenie uzyskane w i-tym kroku procesu iteracji. To przybliżenie znajdujemy, rozwiązując równanie przybliżone

$$(5.1)\qquad y^{\cdot\cdot}+ay = h_i(t),\qquad h_i(t)\in C\langle 0,\, T\rangle,$$

przy warunkach (2.3) i (2.4), przy czym wartość parametru a jest w procesie iteracji ustalona, a funkcje $h_i(t)$ spełniają warunek

$$(5.2)\qquad \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|h_i - a y_{ap}^{i-1} + g(y_{ap}^{i-1})| \leqslant c_i, \qquad \lim_{i\to\infty} c_i = 0.$$

Jako przybliżenie początkowe można przyjąć np. przybliżenie znalezione według metody podanej w paragrafach poprzednich.

Obecnie zbadamy, przy jakich założeniach o funkcji $g(y)$, parametrze a oraz ciągu liczb c_i ciąg przybliżeń y_{ap}^i jest zbieżny do y_0.

Załóżmy po pierwsze, że $g(y)\in C^1$ w przedziale P określonym poniżej i zbudujmy równanie pomocnicze

$$(5.3)\qquad y^{\cdot\cdot} + \tilde{g}(y) = 0,$$

gdzie funkcja $\tilde{g}(y)$ określona jest warunkami

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y) &= g(y) && \text{dla} \quad y\in P = \langle y_0(0)-\Delta^0,\, y_0(T)+\Delta^0\rangle, \\ \tilde{g}'(y) &= g'\big(y_0(0)-\Delta^0\big) && \text{dla} \quad y < y_0(0)-\Delta^0, \\ \tilde{g}'(y) &= g'\big(y_0(0)+\Delta^0\big) && \text{dla} \quad y > y_0(T)+\Delta^0, \end{aligned}$$

a

$$\Delta^0 = \tfrac{1}{2}T\|y_0^{\cdot} - y_{ap}^{\cdot 0}\|.$$

Do równania (5.3) zastosujmy opisany poprzednio proces iteracyjny, przy czym kolejne przybliżenia oznaczmy przez $\tilde{y}_{ap}^i$. Zauważmy, że dokładnym rozwiązaniem równania pomocniczego (5.3) przy warunkach (2.3) i (2.4) jest funkcja $y_0(t)$, ponieważ w zakresie jej zmienności równania (2.1) i (5.3) są identyczne. Jeżeli teraz podstawimy

$$\begin{aligned} f_1(y,t) &= -ay + h_i(t), \qquad & y_1 &= \tilde{y}_{ap}^i, \\ f_2(y,t) &= -g(y), & y_2 &= y_0, \end{aligned}$$

to będzie (por. § 1)

$$N = -\inf_{0\leqslant t\leqslant T} \frac{\tilde{g}(y_0) - \tilde{g}(\tilde{y}_{ap}^i)}{\tilde{y}_{ap}^i - y_0} \leqslant \sup_y \tilde{g}'(y) = \sup_{y\in P} g'(y).$$

Zakładając nierówność

$$(5.5)\qquad n = \sup_{y\in P} g'(y) < w^2,$$

jako pierwszy z warunków zbieżności procesu iteracji, łatwo otrzymujemy na podstawie twierdzenia 1 oszacowanie

$$(5.6)\qquad \Delta(y_0, \tilde{y}_{ap}^i) = \tfrac{1}{2}T\|y_0^{\cdot} - \tilde{y}_{ap}^{\cdot i}\| \leqslant \frac{Tw}{2(w^2-n^+)}\|h_i - a\tilde{y}_{ap}^i + \tilde{g}(\tilde{y}_{ap}^i)\|,$$

gdzie przyjęliśmy $n^+ = \frac{1}{2}(|n|+n)$.

W dalszym ciągu szacujemy na podstawie (5.2) i lematu na stronicy 248:

$$\|h_i - a\tilde{y}^i_{ap} + \tilde{g}(\tilde{y}^i_{ap})\| \leqslant \|h_i - a\tilde{y}^{i-1}_{ap} + \tilde{g}(\tilde{y}^{i-1}_{ap})\| +$$

$$+\left\|(\tilde{y}^i_{ap} - \tilde{y}^{i-1}_{ap})\left\{\frac{\tilde{g}(\tilde{y}^i_{ap}) - \tilde{g}(\tilde{y}^{i-1}_{ap})}{\tilde{y}^i_{ap} - \tilde{y}^{i-1}_{ap}} - a\right\}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant c_i + \sup_{y \in P} |g'(y) - a| \cdot \frac{2}{Tw} \Delta(\tilde{y}^i_{ap}, \tilde{y}^{i-1}_{ap}),$$

otrzymując z (5.6)

$$\Delta(y_0, \tilde{y}^i_{ap}) \frac{Twc_i}{2(w^2 - n^+)} + \frac{1}{w^2 - n^+} \sup_{y \in P} |g'(y) - a| \cdot \Delta(\tilde{y}^i_{ap}, \tilde{y}^{i-1}_{ap}). \tag{5.7}$$

Jako drugi warunek zbieżności procesu iteracji założymy

$$\inf_a \sup_{y \in P} |g'(y) - a| < \tfrac{1}{2}(w^2 - n^+). \tag{5.8}$$

Wtedy można dobrać parametr a tak, by było

$$r = \frac{1}{w^2 - n^+} \sup_{y \in P} |g'(y) - a| < \tfrac{1}{2}. \tag{5.9}$$

Stosując nierówność trójkąta

$$\Delta(\tilde{y}^i_{ap}, \tilde{y}^{i-1}_{ap}) \leqslant \Delta(y_0, \tilde{y}^i_{ap}) + \Delta(y_0, \tilde{y}^{i-1}_{ap}),$$

otrzymujemy z (5.7) i (5.9) oszacowanie

$$\Delta(y_0, \tilde{y}^i_{ap}) \leqslant \frac{Twc_i}{w^2 - n^+} + \frac{r}{1 - r} \Delta(y_0, \tilde{y}^{i-1}_{ap}). \tag{5.10}$$

Dzięki (5.9) mamy $r/(1-r) < 1$. Można więc dobrać $h_i(t)$ tak, by

$$\frac{Tw}{w^2 - n^+} \cdot \frac{c_i}{\Delta(y_0, y^{i-1}_{ap})} + \frac{r}{1 - r} \leqslant \lambda < 1, \tag{5.11}$$

a wtedy zamiast (5.10) otrzymujemy ostatecznie

$$\Delta(y_0, \tilde{y}^i_{ap}) \leqslant \lambda \Delta(y_0, \tilde{y}^{i-1}_{ap}). \tag{5.12}$$

Ostatnia nierówność dowodzi na podstawie (2.6) jednostajnej zbieżności podanego procesu iteracji dla równania pomocniczego (5.3). Rozważania zakończymy, wykazując, że w procesie iteracji równanie pomocnicze było używane tylko tam, gdzie jest identyczne z równaniem pierwotnym (2.1).

W istocie, z nierówności (5.12) oraz (2.6), wobec założenia $\lambda < 1$, otrzymujemy

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |y_0 - \tilde{y}^i_{ap}| \leqslant \Delta(y_0, \tilde{y}^i_{ap}) \leqslant \Delta(y_0, y^0_{ap}) = \Delta^0.$$

Ta nierówność dowodzi, że przedział zmienności P_i funkcji $\tilde{y}^i_{ap}$, dla $0 \leqslant t \leqslant T$, „wystaje" po obu stronach przedziału zmienności $\langle y_0(0), y_0(T)\rangle$ funkcji $y_0(t)$ o odcinki długości mniejszej niż Δ^0. Stąd

$$P_i \subset P.$$

W przedziale P funkcje g i $\tilde{g}$ były identyczne. Tym bardziej są one identyczne w przedziałach P_i. A więc w procesie iteracji funkcją $\tilde{g}$ posługiwaliśmy się tylko tam, gdzie jest ona identyczna z funkcją g. Wobec tego do wykonania poszczególnych kroków iteracji i znalezienia ciągu $\tilde{y}^i_{ap}(t)$ można użyć wyłącznie funkcji $g(y)$. Ponieważ poprzednio wykazaliśmy, że $\tilde{y}^i_{ap} \to y_0$, więc udowodniliśmy

TWIERDZENIE 3. *Przy założeniach* (5.5), (5.8), (5.11) *proces iteracyjny podany w tym paragrafie jest zbieżny i daje rozwiązanie* $y_0(t)$ *równania* (2.1).

Dla rozważanego w § 4 równania wahadła mamy przy $a = (1+\sqrt{2})/2$, $x_m = 1$

$$n = 1, \quad w^2 \cong 3{,}5, \quad r \cong 0{,}1.$$

Jeżeli przyjmiemy np. $c_i = 0$, to warunki zbieżności procesu iteracji będą spełnione. Z oszacowania (5.12) widać, że w pierwszym kroku iteracji otrzymujemy oszacowanie błędu około 9-krotnie lepsze w stosunku do błędu przybliżenia początkowego.

Prace cytowane

[1] A. Rybarski, Bull. Ac. Pol., VI. 3 (1958).

[2] Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, *Асимптотическое методы в теории нелинейных колебаний*, изд. 2, Москва 1958.

[3] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, изд. 3, Москва-Ленинград 1950.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen*, T. I, Leipzig 1942.

[5] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва-Ленинград 1951.

Praca wpłynęła 15. 7. 1958

А. РЫБАРСКИЙ (Вроцлав)

НЕКОТОРЫЙ МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ МАЯТНИКА

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется приближенный метод решения дифференциальных уравнений типа $y^{\cdot\cdot}+f(y) = 0$. Метод основан на замене этого уравнения уравнением вида $y^{\cdot\cdot}+ay+b=0$, где a и b постоянные соответствующим образом подобранные коэффициенты. При этом даётся оценка погрешности решения, а также указывается, при каких значениях коэффициентов оценка погрешности является оптимальной

Рассмотрен также итерационный метод, основывающийся на решении уравнения типа $y^{\cdot\cdot}+ay+h(t)=0$, где постоянная a и функция $h(t)$ подобраны соответствующим образом. Даются условия сходимости процесса итерации, а также оценка погрешности.

Приводится иллюстрация на примере уравнения маятника.

A. RYBARSKI (Wrocław)

A METHOD OF LINEARIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE TYPE OF THE PENDULUM EQUATION

SUMMARY

The author investigates an approximate method of solving differential equations of the type $y^{\cdot\cdot}+f(y)=0$. The method consists in replacing the original equation by an equation of the form $y^{\cdot\cdot}+ay+b=0$ where the constant coefficients a and b are suitably chosen. The author gives the estimate of the error for this method and a choice of coefficients for which the estimate is best.

The author considers also an iteration method consisting in solving equations of the type $y^{\cdot\cdot}+ay+h(t)=0$ where the constant a and the function $h(t)$ are suitably chosen. He gives the conditions of convergence of the iteration process and the error estimate.

To illustrate the argument the example of the pendulum equation is given.
