J. ŁUKASZEWICZ (Wrocław) i W. SADOWSKI (Warszawa)

O PORÓWNYWANIU KILKU POPULACJI Z POPULACJĄ KONTROLNĄ

1. Punktem wyjścia niniejszej pracy były dwa następujące zagadnienia:

A. Rozpatrujemy k populacji ciągłych o dystrybuantach $F(x-a_1)$, $F(x-a_2), \ldots, F(x-a_k)$, które są identyczne z dokładnością do translacji. Zarówno postać funkcyjna dystrybuanty $F(x)$, jak i przesunięcia $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są nieznane. Na podstawie próbek pobranych z każdej populacji (po n elementów) należy rozstrzygnąć, czy wśród badanych populacji jest populacja o wartości średniej większej niż wartości średnie pozostałych populacji, to znaczy czy jest populacja przesunięta na prawo dalej niż pozostałe populacje ($a_i > a_j$ dla $j \neq i$). W przypadku pozytywnej odpowiedzi populację tę należy wskazać.

B. Rozpatrujemy k populacji ciągłych o dystrybuantach $F\left(\frac{x-\mu}{\lambda_1}\right)$, $F\left(\frac{x-\mu}{\lambda_2}\right), \ldots, F\left(\frac{x-\mu}{\lambda_k}\right)$, które są identyczne z dokładnością do rozciągnięcia dokoła wspólnej wartości średniej μ. Podobnie jak poprzednio postać funkcyjna dystrybuanty $F(x)$, wartość średnia μ i czynniki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są nieznane. Na podstawie próbek pobranych z każdej populacji (po n elementów) należy rozstrzygnąć, czy wśród badanych populacji jest populacja o wariancji większej niż wariancje pozostałych populacji, to znaczy czy jest populacja bardziej rozciągnięta niż pozostałe populacje ($\lambda_i > \lambda_j$ dla $j \neq i$). W przypadku pozytywnej odpowiedzi populację tę należy wskazać.

Znane są bardzo proste testy, które pozwalają rozstrzygnąć oba wyżej postawione zagadnienia. Dla zagadnienia A test podał F. Mosteller [1], dla zagadnienia B — W. Sadowski [5](¹). W obu przypadkach każdą spośród k próbek należy uporządkować według rosnących wartości obserwacji. Test Mostellera polega na tym, że wybieramy próbkę mającą element największy. Następnie w próbce tej liczymy ilość $R \geqslant 1$ elemen-

(¹) Dla przypadku rozkładów normalnych test dla zagadnienia A podał E. Paulson [3], dla zagadnienia B — D. R. Truax [6].

tów większych od wszystkich elementów w pozostałych próbkach. Gdy $R \geqslant R_a$, wówczas przyjmujemy hipotezę, że wybrana próbka z największym elementem pochodzi z populacji o największej wartości średniej. W przeciwnym przypadku przyjmujemy hipotezę zerową, że wartości średnie wszystkich populacji są równe ($a_1 = a_2 = \ldots = a_k$). Wartość krytyczną R_a oblicza się tak, by prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona słuszna, było nie większe niż a. Test Sadowskiego polega na tym, że wybieramy próbkę mającą jednocześnie element większy od wszystkich elementów w pozostałych próbkach i element mniejszy od wszystkich elementów w pozostałych próbkach. Jeżeli taka próbka istnieje, to liczymy w niej ilość $r \geqslant 2$ elementów wystających, tj. łączną ilość elementów tej próbki większych od wszystkich elementów pozostałych próbek i elementów mniejszych od wszystkich elementów pozostałych próbek. Jeżeli $r \geqslant r_a$, to przyjmujemy hipotezę, że próbka mająca największy i najmniejszy element pochodzi z populacji o największej wariancji. Jeżeli natomiast $r < r_a$ lub jeśli największy i najmniejszy element znajdują się w różnych próbkach, to przyjmujemy hipotezę, że wariancje we wszystkich populacjach są równe. Wartość krytyczną r_a oblicza się tak, by prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona słuszna, było nie większe niż a.

W niniejszej pracy zajmiemy się znalezieniem odpowiednich testów dla nieco zmodyfikowanych zagadnień. W zastosowaniach spotyka się często zagadnienia, w których spośród porównywanych populacji jedna populacja jest wyróżniona i zależy nam przede wszystkim na porównywaniu pozostałych populacji z wyróżnioną. Na podstawie próbek o liczności n z każdej populacji należy rozstrzygnąć, czy któraś z niewyróżnionych populacji ma wartość średnią (wariancję) większą niż wartości średnie (wariancje) wszystkich pozostałych populacji. W przypadku odpowiedzi pozytywnej chcemy wskazać populację o największej wartości średniej (wariancji), przy czym szczególnie zależy nam na uchronieniu się przed błędem polegającym na wybraniu którejś z populacji niewyróżnionych, gdy wyróżniona populacja ma wartość średnią (wariancję) niemniejszą niż pozostałe populacje. Tak zmodyfikowane zagadnienia A i B dla średniej i wariancji będziemy dalej nazywali zagadnieniami A_1 i B_1. Zagadnienie A_1 zostało rozwiązane przez E. Paulsona [4], lecz tylko w przypadku populacji o rozkładzie normalnym.

2. Zarówno zagadnienie A_1, jak i B_1 występują w niektórych dziedzinach zastosowań, a owa populacja wyróżniona, o której wyżej była mowa, odgrywa rolę standardu lub, inaczej mówiąc, populacji kontrolnej, z którą porównywane są pozostałe populacje.

W szczególności owe standardy występują w doświadczeniach farmakologicznych, gdzie często skuteczność określonego leku porównuje się ze skutecznością leku standardowego. Gdy lek oceniać będziemy jako lepszy wtedy, gdy wartość średnia jakiejś jego cechy jest wyższa, wówczas mamy do rozstrzygnięcia zagadnienie A_1. Oczywiście błąd, którego szczególnie się tu obawiamy, polega na tym, że uznamy jakiś lek za lepszy od standardowego, podczas gdy w rzeczywistości lek standardowy ma średnią niemniejszą niż leki z nim porównywane. Analogiczna sytuacja występuje także w doświadczeniach rolnych i innych.

Rzadziej spotyka się w zastosowaniach zagadnienie B_1, jakkolwiek i tu można podać przykłady. Na przykład J. Oderfeld [2] wykazał, że jednym z kryteriów oceny systemu rozpylania w komorze silnika lotniczego jest rozkład wielkości kropelek paliwa. Okazuje się, że im ten rozkład ma większą dyspersję, tym lepszy jest ten system. Jeśli więc przeprowadzamy doświadczenie polegające na porównywaniu kilku wtryskiwaczy z wtryskiwaczem kontrolnym, to wskazanie optymalnego wtryskiwacza sprowadza się do zagadnienia B_1.

3. Proponowany przez nas test dla zagadnienia A_1 będzie się opierał na statystyce R', którą zdefiniujemy w sposób następujący: $R' = 0$, gdy próbka z populacji wyróżnionej zawiera element większy od wszystkich elementów w pozostałych próbach. Gdy zaś największy element znajduje się w próbce z którejś populacji niewyróżnionej, wtedy $R' \geqslant 1$ jest ilością takich elementów próbki zawierającej największy element, które są większe od wszystkich elementów próbki z populacji wyróżnionej.

Test dla zagadnienia A_1 polega na następującej alternatywie:

jeśli $R' \geqslant R'_a$, przyjmujemy, że największą średnią ma populacja, z której próbka zawiera największy element;

jeśli $R' < R'_a$, przyjmujemy, że żadna z populacji nie ma wartości średniej większej niż wartość średnia populacji wyróżnionej.

Wartość krytyczną R'_a należy obliczyć w taki sposób, by prawdopodobieństwo nierówności $R' \geqslant R'_a$ przy założeniu, że żadna z badanych populacji nie ma wartości średniej większej niż wartość średnia populacji wyróżnionej, było niewiększe niż α. Warunek ten można napisać za pomocą wzoru

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P}\{R' \geqslant R'_a | a_1 \geqslant \max(a_2, a_3, \dots, a_k)\} \leqslant \alpha,$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \dots, a_k$, jak na początku pracy, oznaczają przesunięcia poszczególnych populacji (są one z dokładnością do stałej równe wartościom średnim w poszczególnych populacjach), a pierwsza populacja jest wyróżniona.

Prawdopodobieństwo figurujące po prawej stronie nierówności (1) jest funkcją R'_a i wartości przesunięć $a_1, a_2, \dots, a_k$. Łatwo jest jednak zauważyć, że przy ustalonym R'_a prawdopodobieństwo to osiąga maksimum, gdy przesunięcia $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są równe. Wielkość R'_α będziemy więc wyznaczali z warunku

$$P\{R' \geqslant R'_\alpha | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\} \leqslant \alpha, \tag{2}$$

który implikuje nierówność (1).

Prawdopodobieństwo nierówności $R' \geqslant R'_\alpha$, przy założeniu jednakowych rozkładów we wszystkich populacjach $(a_1 = a_2 = \ldots = a_k)$, można w prosty sposób wyrazić jako funkcję R'_α, k i n. Oczywiście interesują nas tylko naturalne wartości R'_α. Zauważmy najpierw, że dla $R'_\alpha = 1$ jest

$$P\{R' \geqslant 1 | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\} = (k-1)/k,$$

gdyż zdarzenie $R' \geqslant 1$ jest równoważne ze zdarzeniem polegającym na tym, że największy element znajdzie się w jednej z $k-1$ próbek niewyróżnionych. Dla $R'_\alpha \geqslant 2$ prawdopodobieństwo $P\{R' \geqslant R'_\alpha | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\}$ jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa, że jedna z $k-1$ niewyróżnionych próbek zawiera element największy (czyli obliczonego już prawdopodobieństwa nierówności $R'_\alpha \geqslant 1$) przez prawdopodobieństwo, że jeszcze $R'_\alpha - 1$ (lub więcej) elementów próbki zawierającej element największy jest większych od wszystkich elementów próbki wyróżnionej. To prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{n-2}{2n-2}\cdots\frac{n-R'_\alpha+1}{2n-R'_\alpha+1} = \frac{(n-1)!}{(n-R'_\alpha)!}\cdot\frac{(2n-R'_\alpha)!}{(2n-1)!} = \binom{n-1}{R'_\alpha-1}\Big/\binom{2n-1}{R'_\alpha-1}.$$

Jest więc

$$P\{R' \geqslant R'_\alpha | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\} = \frac{k-1}{k}\binom{n-1}{R'_\alpha-1}\Big/\binom{2n-1}{R'_\alpha-1}, \tag{3}$$

przy czym zgodnie z ogólnie przyjętą konwencją, że $\binom{m}{0} = 1$, wzór (3) jest słuszny także dla $R'_\alpha = 1$.

Przy n dążącym do nieskończoności prawa strona równości (3) dąży do granicy

$$\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{2^{R'_\alpha-1}}.$$

Statystyka R' ma więc przy założeniu $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$ rozkład graniczny

$$\lim_{n\to\infty} P\{R' \geqslant R'_\alpha | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\} = \frac{k-1}{k}\cdot 2^{1-R'_\alpha}.$$

Dla kilku wartości k i różnych R'_α oraz n obliczyliśmy następującą tablicę prawdopodobieństw $P\{R' \geqslant R'_\alpha | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\}$ (str. 208-209).

TABLICA 1

Wartości prawdopodobieństw $P\{R' \geqslant R'_\alpha | a_1 = a_2 = \ldots = a_k\}$ w zależności od ilości populacji (k) i od liczebności próbek (n)

$k = 2$

n \ R'_α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,5000	0,1667								
3	,5000	,2000	0,0500							
4	,5000	,2143	,0714	0,0143						
5	,5000	,2222	,0833	,0238	0,0040					
6	,5000	,2273	,0909	,0303	,0076	0,0011				
7	,5000	,2308	,0962	,0350	,0105	,0023	0,0003			
8	,5000	,2333	,1000	,0385	,0128	,0035	,0007	0,0001		
9	,5000	,2353	,1029	,0412	,0147	,0045	,0011	,0002	0,0000	
10	,5000	,2368	,1053	,0433	,0163	,0054	,0016	,0004	,0001	0,0000
12	0,5000	0,2391	0,1087	0,0466	0,0186	0,0069	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000
14	,5000	,2407	,1111	,0489	,0204	,0080	,0029	,0010	,0003	,0001
16	,5000	,2419	,1129	,0506	,0217	,0088	,0034	,0012	,0004	,0001
18	,5000	,2429	,1143	,0520	,0228	,0096	,0038	,0014	,0005	,0002
20	,5000	,2436	,1154	,0530	,0236	,0101	,0042	,0016	,0006	,0002
25	0,5000	0,2449	0,1173	0,0549	0,0251	0,0111	0,0048	0,0020	0,0008	0,0003
30	0,5000	0,2458	0,1186	0,0562	0,0261	0,0119	0,0053	0,0023	0,0010	0,0004
∞	0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020	0,0010

$k = 3$

n \ R'_α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,6667	0,2222								
3	,6667	,2667	0,0667							
4	,6667	,2857	,0952	0,0190						
5	,6667	,2963	,1111	,0317	0,0053					
6	,6667	,3030	,1212	,0404	,0101	0,0014				
7	,6667	,3077	,1282	,0466	,0140	,0031	0,0004			
8	,6667	,3111	,1333	,0513	,0171	,0047	,0009	0,0001		
9	,6667	,3137	,1373	,0549	,0196	,0060	,0015	,0003	0,0000	
10	,6667	,3158	,1404	,0578	,0217	,0072	,0021	,0005	,0001	0,0000
12	0,6667	0,3188	0,1449	0,0621	0,0248	0,0092	0,0031	0,0009	0,0002	0,0000
14	,6667	,3210	,1481	,0652	,0272	,0106	,0039	,0013	,0004	,0001
16	,6667	,3226	,1505	,0675	,0289	,0118	,0045	,0016	,0005	,0002
18	,6667	,3238	,1524	,0693	,0304	,0127	,0051	,0019	,0007	,0002
20	,6667	,3248	,1538	,0707	,0314	,0135	,0055	,0022	,0008	,0003
25	0,6667	0,3265	0,1565	0,0732	0,0334	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0004
30	0,6667	0,3277	0,1582	0,0749	0,0348	0,0158	0,0070	0,0030	0,0013	0,0005
∞	0,6667	0,3333	0,1667	0,0833	0,0417	0,0208	0,0104	0,0052	0,0026	0,0013

TABLICA 1 (cd.)

$k = 4$

n \ R'_a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,7500	0,2500								
3	,7500	,3000	0,0750							
4	,7500	,3214	,1071	0,0214						
5	,7500	,3333	,1250	,0357	0,0060					
6	,7500	,3409	,1364	,0455	,0114	0,0016				
7	,7500	,3462	,1442	,0524	,0157	,0035	0,0004			
8	,7500	,3500	,1500	,0577	,0192	,0052	,0011	0,0001		
9	,7500	,3529	,1544	,0618	,0221	,0068	,0017	,0003	0,0000	
10	,7500	,3553	,1579	,0650	,0244	,0081	,0023	,0005	,0001	0,0000
12	0,7500	0,3587	0,1630	0,0699	0,0280	0,0103	0,0034	0,0010	0,0003	0,0001
14	,7500	,3611	,1667	,0733	,0306	,0120	,0044	,0014	,0004	,0001
16	,7500	,3629	,1694	,0759	,0325	,0133	,0051	,0018	,0006	,0002
18	,7500	,3643	,1714	,0779	,0342	,0143	,0057	,0022	,0008	,0003
20	,7500	,3654	,1731	,0795	,0353	,0152	,0062	,0025	,0009	,0003
25	0,7500	0,3674	0,1760	0,0824	0,0376	0,0167	0,0072	0,0030	0,0012	0,0005
30	0,7500	0,3686	0,1780	0,0843	0,0391	0,0178	0,0079	0,0034	0,0014	0,0006
∞	0,7500	0,3750	0,1875	0,0938	0,0469	0,0234	0,0117	0,0059	0,0029	0,0015

$k = 5$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,8000	0,2667								
3	,8000	,3200	0,0800							
4	,8000	,3429	,1143	0,0229						
5	,8000	,3556	,1333	,0381	0,0064					
6	,8000	,3636	,1455	,0485	,0121	0,0017				
7	,8000	,3692	,1538	,0559	,0168	,0037	0,0005			
8	,8000	,3733	,1600	,0615	,0205	,0056	,0011	0,0001		
9	,8000	,3765	,1647	,0659	,0235	,0072	,0018	,0003	0,0000	
10	,8000	,3789	,1684	,0694	,0260	,0087	,0025	,0006	,0001	0,0000
12	0,8000	0,3826	0,1739	0,0745	0,0298	0,0110	0,0037	0,0011	0,0003	0,0001
14	,8000	,3852	,1778	,0782	,0326	,0128	,0046	,0015	,0005	,0001
16	,8000	,3871	,1806	,0810	0347	,0141	,0054	,0020	,0007	,0002
18	,8000	,3886	,1829	,0831	,0364	,0153	,0061	,0023	,0008	,0003
20	,8000	,3897	,1846	,0848	,0377	,0162	,0067	,0026	,0010	,0004
25	0,8000	0,3918	0,1878	0,0879	0,0401	0,0178	0,0077	0,0032	0,0013	0,0005
30	0,8000	0,3932	0,1898	0,0899	0,0418	0,0190	0,0084	0,0037	0,0015	0,0006
∞	0,8000	0,4000	0,2000	0,1000	0,0500	0,0250	0,0125	0,0062	0,0031	0,0016

4. Podobnie jak w poprzednim ustępie dostosowaliśmy test Mostellera do zagadnienia A_1, tak zmodyfikujemy teraz test Sadowskiego dostosowując go do zagadnienia B_1. W tym celu zdefiniujemy statystykę r' w następujący sposób:

Jeżeli wśród $k-1$ próbek z populacji niewyróżnionych jest taka, która zawiera element większy od elementów we wszystkich pozostałych próbkach i element mniejszy od elementów we wszystkich pozostałych próbkach, to $r' \geqslant 2$ jest liczbą wystających elementów tej próbki w porównaniu z próbką wyróżnioną (*elementami wystającymi* w porównaniu z próbką wyróżnioną nazywamy tu elementy większe od wszystkich elementów próbki wyróżnionej i elementy mniejsze od wszystkich elementów próbki wyróżnionej). W przypadku przeciwnym, tj. gdy element największy i najmniejszy znajdują się w różnych próbkach lub gdy oba ekstremalne elementy znajdują się w próbce wyróżnionej, przyjmujemy $r' = 0$.

Test dla zagadnienia B_1 polega na następującej alternatywie:

jeśli $r' \geqslant r'_\alpha$, przyjmujemy, że największą wariancję ma populacja, której próbka zawiera elementy ekstremalne,

jeśli $r' < r'_\alpha$, przyjmujemy, że żadna z populacji nie ma wariancji większej niż wariancja próbki wyróżnionej.

Wartość krytyczną r'_α należy obliczyć z warunku

$$P\{r' \geqslant r'_\alpha | \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} \leqslant \alpha, \tag{4}$$

gdzie liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, jak na początku pracy, oznaczają współczynniki rozciągnięcia poszczególnych populacji (z dokładnością do stałego czynnika są one równe średnim kwadratowym odchyleniom poszczególnych populacji). Jeśli pierwsza populacja jest wyróżniona, to nierówność (4) pociąga za sobą nierówność

$$P\{r' \geqslant r'_\alpha | \lambda_1 \geqslant \max(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)\} \leqslant \alpha. \tag{5}$$

Statystyka r' może przyjmować wartość zero lub wartości naturalne od 2 do n. Zauważmy przede wszystkim, że

$$P\{r' \geqslant 2 | \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{n-1}{kn-1},$$

gdyż zdarzenie $r' \geqslant 2$ jest równoważne z tym, że największy element znajdzie się w jakiejś próbce niewyróżnionej (prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest $(k-1)/k$) i że w tej samej próbce znajdzie się element najmniejszy (prawdopodobieństwo tego jest $(n-1)/(kn-1)$).

Zwróćmy dalej uwagę na fakt, że dla $\varrho \geqslant 2$ prawdopodobieństwo $P\{r' = \varrho | \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\}$ jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa, iż jedna z $k-1$ próbek niewyróżnionych zawiera oba elementy ekstremalne (jest to obliczone już prawdopodobieństwo nierówności $r' \geqslant 2$), przez prawdopodobieństwo, że jeszcze $\varrho-2$ i tylko $\varrho-2$ innych elementów próbki z elementami ekstremalnymi wystaje poza elementy próbki wyróżnionej. To ostatnie zdarzenie może się zrealizować na $\varrho-1$ rozłącznych sposobów, polegających na tym, że spośród $\varrho-2$ elementów wystających (nie licząc elementów ekstremalnych) jest:

$\varrho-2$ elementów większych niż wszystkie elementy próbki wyróżnionej,

$\varrho-3$ większych i 1 element mniejszy niż wszystkie elementy próbki wyróżnionej,

$\varrho-4$ większych i 2 elementy mniejsze niż wszystkie elementy próbki wyróżnionej

. . . .

0 większych i $\varrho-2$ elementów mniejszych niż wszystkie elementy próbki wyróżnionej.

Każda z tych ewentualności ma warunkowe prawdopodobieństwo, pod warunkiem, że $r' \geqslant 2$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, równe

$$\frac{n-2}{2n-2}\cdot\frac{n-3}{2n-3}\cdots\frac{n-\varrho+1}{2n-\varrho+1}\cdot\frac{n}{2n-\varrho}\cdot\frac{n-1}{2n-\varrho-1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-\varrho)!}\cdot\frac{(2n-\varrho-2)!}{(2n-2)!} = \binom{n}{\varrho}\Big/\binom{2n-2}{\varrho}.$$

Początkowe $\varrho-2$ czynniki powyższego iloczynu wyrażają prawdopodobieństwo, że $\varrho-2$ elementy wystające (nie licząc ekstremalnych) należą do próbki z elementami ekstremalnymi, a ostatnie dwa czynniki są prawdopodobieństwami, że dalsze kolejne co do wielkości od góry i dołu elementy należą już do próbki wyróżnionej (gdyż inaczej byłoby $r' > \varrho$).

Tak więc otrzymujemy ostatecznie

$$\mathrm{P}\{r' = \varrho \,|\, \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{n-1}{kn-1}(\varrho-1)\binom{n}{\varrho}\Big/\binom{2n-2}{\varrho}$$

dla $\varrho \geqslant 2$,

oraz

$$\mathrm{P}\{r' = 0 \,|\, \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} = 1 - \frac{k-1}{k}\cdot\frac{n-1}{kn-1}.$$

Przy n dążącym do nieskończoności statystyka r' ma rozkład graniczny

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{r' = \varrho \,|\, \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} = \frac{k-1}{k^2}\cdot\frac{\varrho-1}{2^\varrho} \quad \text{dla} \quad \varrho \geqslant 2,$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} P\{r' = 0\,|\,\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} = 1 - \frac{k-1}{k^2}.$$

Prawdopodobieństwo nierówności $r' \geqslant r'_\alpha$, potrzebne nam do obliczania wartości krytycznych r'_α, obliczamy z wzoru

$$P\{r' \geqslant r'_\alpha|\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} = \sum_{\varrho = r'_\alpha}^{n} P\{r' = \varrho\,|\,\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\} =$$

$$= 1 - \sum_{\varrho=0}^{r'_\alpha - 1} P\{r' = \varrho\,|\,\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\}.$$

Dla kilku wartości k i różnych r'_α oraz n obliczyliśmy tablice prawdopodobieństw $P\{r' \geqslant r'_\alpha|\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\}$ (tablica 2 na str. 213 i 214).

5. W zagadnieniach A i A_1 poszukiwaliśmy populacji z największą wartością średnią. Oczywiście test Mostellera [1] do zagadnienia A i nasz do zagadnienia A_1 da się również użyć do poszukiwania populacji z najmniejszą wartością średnią. Wystarczy w tym celu w definicji statystyki R lub R' zastąpić wszędzie słowa „największy" i „większy" słowami „najmniejszy" i „mniejszy". Można też (co na to samo wychodzi) nie zmieniając testów zmienić tylko znaki wszystkich obserwacji, przez co elementy mniejsze staną się większymi i populacja o najmniejszej wartości średniej stanie się populacją o największej wartości średniej.

Podobnie w warunkach zagadnień B i B_1 można pytać o populację o najmniejszej wariancji. Takie zagadnienia mają nawet dużo większe znaczenie praktyczne, gdyż na ogół duża wariancja jest niepożądaną właściwością populacji i staramy się znaleźć warunki minimizujące wariancję. Test Sadowskiego [2] do zagadnienia B i nasz do zagadnienia B_1 można także stosować przy poszukiwaniu populacji z najmniejszą wariancją. Wystarczy w tym celu przed przystąpieniem do opracowania materiału eksperymentalnego odwzorować wszystkie obserwacje za pomocą przekształcenia rzutowego

$$y = 1/(x-\mu), \tag{6}$$

gdzie μ jest wspólną średnią wszystkich populacji. Takie odwzorowanie zamienia populację o najmniejszej wariancji na populację o wariancji największej. Zamiast przekształcać w ten sposób wszystkie obserwacje można tylko zmienić definicję statystyk r i r'. Zamiast liczyć elementy wystające wystarczy w tym celu liczyć elementy wewnętrzne, to jest po obu stronach średniej μ liczyć elementy bliższe tej średniej niż elementy próbek z pozostałych populacji. Takie postępowanie wymaga znajomości

TABLICA 2

Wartości prawdopodobieństw $P\{r' \geqslant r'_a | \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k\}$ w zależności od ilości populacji (k) i od liczebności próbek (n)

$k = 2$

n \ r'_a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,1667								
3	,2000	0,1000							
4	,2143	,1286	0,0429						
5	,2222	,1429	,0635	0,0159					
6	,2273	,1515	,0758	,0271	0,0054				
7	,2308	,1573	,0839	,0350	,0105	,0017			
8	,2333	,1615	,0897	,0408	,0147	,0038	0,0005		
9	,2353	,1647	,0941	,0452	,0181	,0058	,0013	0,0002	
10	,2368	,1672	,0975	,0488	,0209	,0075	,0021	,0004	0,0000
12	0,2391	0,1708	0,1025	0,0539	0,0252	0,0104	0,0037	0,0011	0,0003
14	,2407	,1733	,1059	,0576	,0283	,0126	,0050	,0018	,0005
16	,2419	,1752	,1085	,0603	,0306	,0143	,0061	,0024	,0008
18	,2429	,1766	,1104	,0623	,0324	,0156	,0070	,0029	,0011
20	,2436	,1776	,1119	,0640	,0339	,0168	,0078	,0034	,0014
25	0,2449	0,1798	0,1146	0,0669	0,0365	0,0188	0,0092	0,0043	0,0019
30	0,2458	0,1811	0,1164	0,0688	0,0382	0,0202	0,0102	0,0050	0,0023
∞	0,2500	0,1875	0,1250	0,0781	0,0469	0,0273	0,0156	0,0088	0,0049

$k = 3$

n \ r'_a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,1250								
3	,1600	0,0800							
4	,1765	,1059	0,0353						
5	,1860	,1196	,0532	0,0133					
6	,1923	,1282	,0641	,0229	0,0046				
7	,1967	,1341	,0715	,0298	,0089	0,0015			
8	,2000	,1385	,0769	,0350	,0126	,0033	0,0005		
9	,2025	,1418	,0810	,0389	,0156	,0050	,0011	0,0001	
10	,2046	,1444	,0842	,0421	0,180	,0065	,0019	,0004	0,0000
12	0,2076	0,1483	0,0890	0,0468	0,0218	0,0090	0,0032	0,0010	0,0002
14	,2097	,1510	,0923	,0501	,0246	,0109	,0044	,0016	,0005
16	,2113	,1530	,0947	,0526	,0267	,0125	,0053	,0021	,0007
18	,2125	,1545	,0966	,0545	,0284	,0137	,0062	,0026	,0010
20	,2135	,1558	,0981	,0347	,0297	,0147	,0068	,0030	,0012
25	0,2152	0,1580	0,1008	0,0588	0,0321	0,0165	0,0079	0,0038	0,0017
30	0,2164	0,1595	0,1025	0,0606	0,0337	0,0178	0,0090	0,0044	0,0020
∞	0,2222	0,1667	0,1111	0,0694	0,0417	0,0243	0,0139	0,0078	0,0043

TABLICA 2 (cd.)

$k = 4$

n \ r'_a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,1071								
3	,1364	0,0682							
4	,1500	,0900	0,0300						
5	,1579	,1015	,0451	0,0113					
6	,1630	,1087	,0543	,0194	0,0039				
7	,1667	,1136	,0606	,0253	,0076	0,0013			
8	,1694	,1172	,0651	,0296	,0107	,0028	0,0004		
9	,1714	,1200	,0686	,0330	,0132	,0042	,0010	0,0001	
10	,1731	,1222	,0713	,0356	,0153	,0055	,0016	,0003	0,0000
12	0,1755	0,1254	0,0752	0,0396	0,0185	0,0076	0,0027	0,0008	0,0002
14	,1773	,1276	,0780	,0424	,0208	,0092	,0037	,0013	,0004
16	,1786	,1293	,0800	,0445	,0226	,0105	,0045	,0018	,0006
18	,1796	,1306	,0816	,0461	,0240	,0116	,0052	,0022	,0008
20	,1804	,1316	,0829	,0474	,0251	,0124	,0058	,0025	,0010
25	0,1818	0,1335	0,0851	0,0496	0,0271	0,0140	0,0068	0,0032	0,0014
30	0,1828	0,1347	0,0866	0,0512	0,0284	0,0150	0,0076	0,0037	0,0017
∞	0,1875	0,1406	0,0938	0,0586	0,0352	0,0205	0,0117	0,0066	0,0037

$k = 5$

2	0,0889								
3	,1143	0,0571							
4	,1263	,0758	0,0253						
5	,1333	,0857	,0381	0,0095					
6	,1379	,0920	,0460	,0164	0,0033				
7	,1412	,0963	,0513	,0214	,0064	0,0011			
8	,1436	,0994	,0552	,0251	,0090	,0023	0,0003		
9	,1454	,1018	,0582	,0280	,0112	,0036	,0008	0,0001	
10	,1469	,1037	,0605	,0303	,0130	,0047	,0013	,0003	0,0000
12	0,1492	0,1065	0,0639	0,0336	0,0157	0,0065	0,0023	0,0007	0,0002
14	,1507	,1085	,0663	,0360	,0177	,0079	,0031	,0011	,0003
16	,1519	,1100	,0681	,0378	,0192	,0090	,0038	,0015	,0005
18	,1528	,1111	,0695	,0392	,0204	,0098	,0044	,0018	,0007
20	,1535	,1120	,0705	,0403	,0213	,0106	,0049	,0021	,0009
25	0,1548	0,1137	0,0725	0,0423	0,0231	0,0119	0,0058	0,0027	0,0012
30	0,1557	0,1147	0,0738	0,0436	0,0242	0,0128	0,0065	0,0031	0,0015
∞	0,1600	0,1200	0,0800	0,0500	0,0300	0,0175	0,0100	0,0056	0,0031

wartości średniej μ. W przypadku gdy wartość średnia μ nie jest znana, można we wzorze (6) lub opisanym wyżej postępowaniu zastąpić średnią μ przez jej przybliżenie obliczone na podstawie elementów wszystkich próbek. Należy jednak pamiętać, że takie postępowanie zmienia nieco rozkład statystyk r i r'.

Prace cytowane

[1] F. Mosteller, *A k-sample slippage test for an extreme population*, Annals of Math. Statistics 19 (1948), str. 58-65.

[2] J. Oderfeld, *O wielkości kropelek w rozpylonym paliwie*, Archiwum Budowy Maszyn 1 (1954), str. 363-369.

[3] E. Paulson, *An optimum solution to the k-sample problem for the normal distribution*, Annals of Math. Stat. 23 (1952), str. 610-616.

[4] — *On the comparison of several experimental categories with a control*, Annals of Math. Stat. 23 (1952), str. 669-674.

[5] W. Sadowski, *O nieparametrycznym teście na porównywanie rozsiewów*, Zastosowania Matematyki 2 (1955), str. 161-171.

[6] D. R. Truax, *An optimum slippage test for the variance of k normal distributions*, Annals of Math. Stat. 24 (1953), str. 669-674.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 10. 4. 1956

И. ЛУКАШЕВИЧ (Варшава) и В. САДОВСКИЙ (Вроцлав)

О СРАВНЕНИИ ГЕНЕРАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ С СОВОКУПНОСТЬЮ КОНТРОЛЬНОЙ

РЕЗЮМЕ

В статье даны два простые непараметрические тесты значимости для сравнения относительно средней или дисперсии $k-1$ совокупностей с совокупностью контрольной.

Критерий даёт возможность разрешать, у которой из сравниваемых k совокупностей средняя (или дисперсия) наибольшая, причём вероятность ошибки, состоящей в выборе одной из $k-1$ совокупностей неконтрольных, когда в действительности контрольная совокупность имеет среднюю (или дисперсию) не меньше чем остальные совокупности, не больше произвольного числа α.

J. ŁUKASZEWICZ (Wrocław) and W. SADOWSKI (Warszawa)

ON COMPARING SEVERAL POPULATIONS WITH A CONTROL POPULATION

SUMMARY

The paper contains two simple non-parametric tests of significance for comparing $k-1$ populations with a control population with respect to the mean or to the variance. The tests make it possible to decide which of the compared k populations has the largest mean (or variance); as regards the error consisting in choosing one of the $k-1$ non-control populations while actually the mean (or variance) of the control population is not less than those of the remaining populations, its probability is not larger than an arbitrarily chosen number α.