H. STEINHAUS (Wrocław)

DYSPERSJOMETR

We wszelkiej statystyce dużą rolę odgrywa miara rozrzutu zwana *odchyleniem średnim* lub *standardowym* (a w teorii błędów — błędem średnim) i oznaczana zwykle małą grecką literą σ (sigma). My będziemy tę wielkość nazywać *dyspersją* (jakkolwiek nie jest to terminologia oficjalna). Jeżeli x jest zmienną losową, to relacja

$$\sigma^2 = Ex^2 - (Ex)^2 \tag{1}$$

jest określeniem dyspersji σ tej zmiennej losowej. W praktyce zwykle ta teoretyczna dyspersja nie jest znana i trzeba ją szacować z pomiarów iksa. Używa się do tego zwykle wyrażenia

$$s_1 = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}, \tag{2}$$

w którym $\bar{x}$ oznacza średnią pomiarów $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Wzór (2) należy rozumieć jak następuje: każdy z kolejnych n niezależnych wzajemnie pomiarów x_i ($i=1,2,\ldots,n$) jest realizacją zmiennej losowej x; każdy układ takich n pomiarów nadaje wyrażeniu s_1 jakąś wartość, która też zależy od losu (bo na ogół każde n pomiarów daje na s_1 inną wartość). Wyrażenie s_1 jest *estymatorem* dyspersji, związek zaś między tym wyrażeniem a dyspersją jest

$$Es_1^2 = \sigma^2 \tag{3}$$

i sprawdza się przy wszelkim rozkładzie zmiennej losowej x. Wzór (3) wyraża fakt, że s_1^2 jest *nieobciążonym* estymatorem *wariancji* σ^2: oczekiwana wartość zmiennej s_1^2 jest dokładnie równa wariancji $\omega = \sigma^2$. Już z tego samego wynika, że s_1 jest *obciążonym* estymatorem dyspersji, łatwo bowiem z (3) wyprowadzić nierówność $Es_1 < \sigma$.

Można temu zaradzić, gdy zmienna losowa x ma rozkład normalny. Można wtedy obliczyć współczynnik λ_n taki, że wyrażenie

$$\tilde{s} = \lambda_n \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2} \tag{4}$$

jest już nieobciążonym estymatorem dyspersji $Es = \sigma$. Tak np. λ_{10} wynosi 0,3427[1]). Ale zarówno w popularnym wzorze (2), jak i w bardziej wyrafinowanym wzorze (4), występuje kwadrowanie i pierwiastkowanie, co zamyka drzwi warsztatów i fabryk przed owym ważnym parametrem statystycznym, jakim jest dyspersja. Parametr ten jest ważny, bo jest miarą jednostajności produkcji, a nawet tam, gdzie nie zależy na jednostajności produktu, lecz tylko na stateczności średniej, pozwala on ocenić, czy stwierdzone odchylenie średniej $\bar{x}$ od przepisanej wielkości X jest nieistotne, to znaczy usprawiedliwione małością liczby n, czy też istotne, to znaczy wynikłe z nadmiernego odchylenia średniej $\bar{X}$ w całej partii od przepisanej wielkości X.

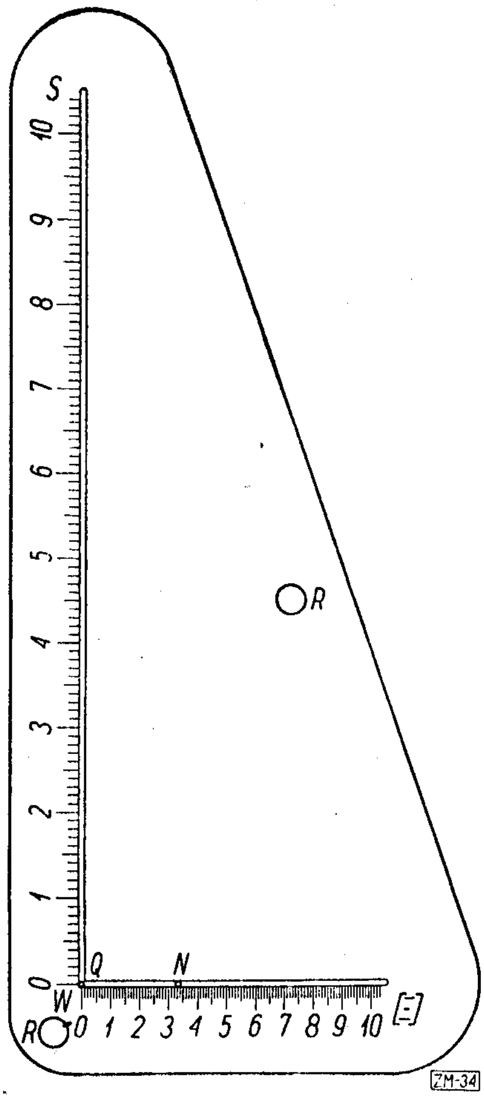
Przy bieżącej produkcji trzeba badać osobno sztuki wyrzucane przez każdy automat, i to dosyć często, sposobem próbek, np. po 10 sztuk; dlatego trzeba udostępnić obliczanie wyrażeń takich, jak (2) lub (4), również personelowi o niższych kwalifikacjach. Zachęcony przez grupę SKJ Instytutu Matematycznego PAN, która niejednokrotnie zwracała uwagę na potrzebę podręcznego i niedrogiego przyboru ułatwiającego korzystanie z wzorów (2) lub (4) przy estymacji sigmy i wykonała jego projekt, po kilku próbach skonstruowałem taki przyrząd oparty na innej zasadzie i prostszy. Do zrozumienia jego działania zbędne są teorie wiodące do wzorów poprzednio podanych. Gdy dane są liczby

$$\xi_i = |x_i - \bar{x}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dyspersjometr ma doprowadzić bez rachunków do odczytania na odpowiedniej podziałce wartości wyrażenia

$$\tilde{s} = \lambda_n \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2} = \lambda_n \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}. \tag{5}$$

Dyspersjometr składa się z części istotnej i z akcesoriów. Akcesoriami są: deska rysunkowa z wbitym w nią gwoździkiem Q i nakłuwacz N. Za gwoździk służyć może igła gramofonowa, a za nakłuwacz nóżka cyrkla, zwykła szpilka lub również igła gramofonowa osadzona (zamiast laseczki grafitowej) w ołówku. Część istotna najłatwiej otrzymać przez wycięcie w blaszanej płytce D (por. rys. 1) dwóch szczelin pod kątem prostym, łączących się w wierzchołku W kąta. Wzdłuż szczelin są umieszczone skale, a mianowicie skala Ξ na prawym ramieniu kąta i skala S na lewym. Ramiona kąta i szczeliny oznaczamy też przez Ξ i S. Skala Ξ jest centymetrowa, z podziałem na milimetry, a skala S jest też zwykła, ale jej moduł jest $1/\lambda_n$, gdzie λ_n jest współczynnikiem po prawej stronie wzoru (5). Dla uplastycznienia wyobraźmy sobie, że $n=10$; wtedy współczynnik λ_n wynosi 0,3427 i skala S ma moduł 29,18 mm[1]). Pomiary iksa dały $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{10}$. Z nich przez dodanie otrzymujemy natychmiast $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum x_i$, a potem przez odejmowanie[2]) liczby $\xi_i = |x_i - \bar{x}|$ $(i=1,2,\ldots,10)$. Płytkę D kładzie się na rysownicy, tak żeby gwoździk Q pojawił się w wierzchołku W (rys. 2). Teraz wbijamy lekko nakłuwacz N w punkt P_1 leżący w szczelinie przy cesze ξ_1, po czym obracamy D, tak żeby W doszło do P_1. Przy tej operacji i wszystkich następnych gwoździk Q ma pozostawać w szczelinie płytki D. Wyjmujemy N (przytrzymując lewą ręką D) i wbijamy w punkt P_2 leżący w szczelinie przy cesze ξ_2, następnie przez obrót D dopro-

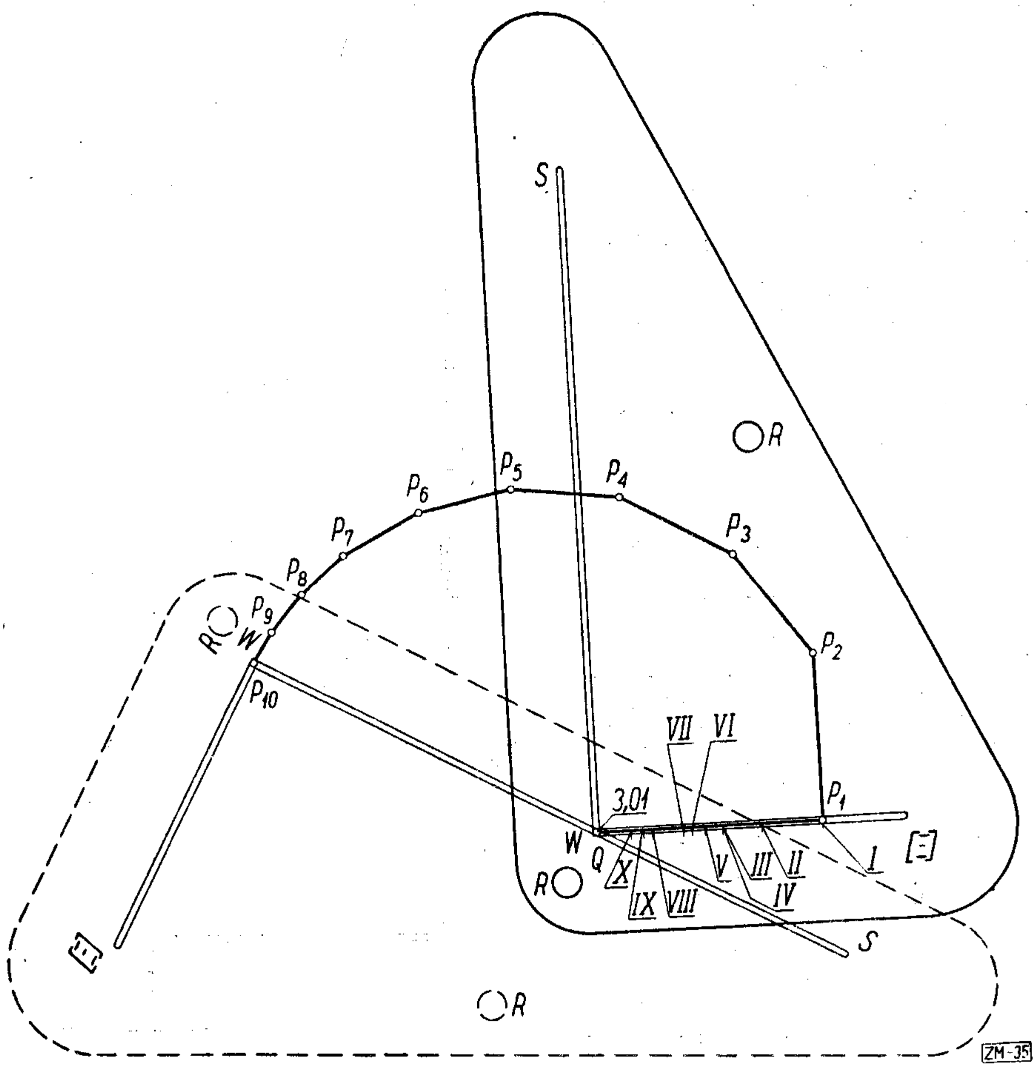


Rys. 1

[1]) Wszędzie piszemy liczby czterocyfrowe zaokrąglając ostatnią cyfrę. Ta dokładność nie jest nadmierna, gdy chodzi o definicję skal mających służyć za prototypy przy ewentualnej produkcji fabrycznej dyspersjometrów.

[2]) Odejmujemy zawsze mniejsze od większego — tak należy wyjaśnić znak | | praktykom.

wadzamy W do P_2. Znowu wyjmujemy N i postępujemy jak wyżej, aż w końcu W znajdzie się w punkcie P_{10}, w którym tkwi N. Teraz nie wyjmujemy już N, lecz na skali S odczytujemy cechę $\tilde{s}$ wskazaną przez gwoździk Q.



Rys. 2

Zauważmy, że każdy kolejny ruch płytki D obraca ją w lewo (tj. przeciwnie do biegu wskazówki zegara) i że te ruchy nie wymagają ani wprawy, ani skupienia uwagi, która jest skierowana na poprawne nakłuwanie punktów $P_1, P_2, \ldots$ itd.; obracanie płytki kończy się, gdy W dojdzie do nakłuwacza N tkwiącego w desce — wtedy trzeba lewą ręką przytrzymać płytkę, a prawą (która stale trzyma N)

wyjąć nakłuwacz i wbić go w następny punkt P. Jeżeli D jest zaopatrzona w rączkę R, to lewa ręka stale trzyma R a prawa N. Na rysunku pokazano dwa położenia rączki R. Jedno z nich jest dogodne dla osób, które wolałyby trzymać nakłuwacz w lewej ręce. Zauważmy w końcu, że kolejność liczb jest obojętna; możemy je zatem od razu zaznaczyć wszystkie na skali Ξ, jeżeli blacha obok skali jest polakierowana, tak że znaki ołówka można zmazać po ukończeniu obliczenia s; (lepszy od blachy jest do tego celuloid). Wtedy proces jest taki: każdą z liczb ξ_i zaznaczamy kreską, jak pokazuje rysunek 2, numerujemy kreski od I do X i to tak, żeby I odpowiadało największemu ξ_i, a X najmniejszemu i zaczynamy od punktu P_1 odpowiadającego kresce I, a kończymy na punkcie P_{10} odpowiadającym kresce X. Ten porządek wcale nie jest konieczny (nie było o nim mowy w opisie o kilkanaście wierszy przedtem), jednak ułatwia on pierwsze ruchy blachy D, które są niewygodne, gdy zaczynamy od małych ξ_i i musimy obracać przyrząd o duży kąt opierając go o dwa sztyfty blisko siebie położone; to zostało obecnie wyłączone, jeżeli choćby tylko jedno ξ_i nie jest małe. Ponadto malejące uporządkowanie liczb ξ_i zmniejsza całkowity obrót przyrządu: można udowodnić twierdzenie elementarne, że obrót jest najmniejszy właśnie przy malejącym uporządkowaniu liczb ξ. W końcu zaznaczenie kreskami punktów P_i przed rozpoczęciem poruszania blachy chroni od omyłek i opuszczeń, bo podczas obracania blachy nie ma się już do czynienia z liczbami i szukaniem punktów P_i — wystarczy liczyć tylko w myśli (lub głośno) kroki: jeden, dwa, ..., dziesięć i wbijać nakłuwacz w punkty już zaznaczone numerami I-X.

Dowód, że aparat rzeczywiście daje wartość s zgodną z wzorem (5), wynika z rysunku 2, który (dla $n=10$) pokazuje układ kolejnych trójkątów prostokątnych — a raczej pokazałby je, gdyby wszystkie punkty P_i połączyć z Q. Dla każdego i trójkąt QP_iP_{i+1} $(i=1,2,\ldots, n-1)$ jest prostokątny; ponieważ $P_i P_{i+1}$ jest równe ξ_i w skali S $(i=0,1,\ldots,n-1)$ (P_0 czytaj jako Q), więc w tej skali będzie, według twierdzenia Pitagorasa, QP_n równe $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}$. Ponieważ jednak QP_n (czyli WQ) odczytujemy na skali S, której moduł jest λ_n razy mniejszy od modułu skali Ξ, więc odczytane s jest zgodne z wzorem (5).

Najczęściej w praktyce liczność n pozostaje bez zmiany przy wielu kolejnych obliczeniach. Jeżeli chcemy zmieniać n, musimy mieć różne skale S. Moduł μ_n skali S jest $1/\lambda_n$, przy czym

$\lambda_n = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Big/ \sqrt{2}\,\Gamma(n/2)$; chcąc mieć np. dyspersjometr użyteczny dla $n = 5, 8, 10, 12, 15, 20$ — przy zachowaniu modułu 10 mm na skali Ξ — musimy mieć sześć różnych skal S, a mianowicie

(6)	skalę S_5	o module	18,80 mm	(22,36 mm),
	„ S_8 „	„	25,53 mm	(28,28 mm),
	„ S_{10} „	„	29,18 mm	(31,62 mm),
	„ S_{12} „	„	32,42 mm	(34,64 mm),
	„ S_{15} „	„	36,75 mm	(38,73 mm),
	„ S_{20} „	„	43,10 mm	(44,72 mm).

Można umieścić te skale na wstążkach stalowych zakończonych zakładkami, które wpina się w okienka wycięte w płytce D przy końcach szczeliny S — zapas sześciu skal wystarczy niemal we wszystkich typowych przypadkach wyrywkowej kontroli bieżącej operującej małą liczbą sztuk próbnych. Praktyczniej byłoby jednak ograniczyć n do $5, 8, 10$ i 12, a więc do czterech skal do wpinania, a dla $n=15$ i 20 mieć osobny dyspersjometr z dwiema skalami wzdłuż szczeliny S — tutaj skala Ξ miałaby moduł 5 mm, co pozwoliłoby zredukować moduły skal S do 18,37 mm dla S_{15} i 21,55 mm dla S_{20}, a więc pozostawiłoby rozmiary blachy D w granicach przewidzianych dla $n=10$.

Wyjaśnimy znaczenie ostatniej kolumny spisu (6). Mianowicie podaje ona moduły μ_n dla dyspersji σ_e określonej przez

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}\,. \tag{7}$$

Zgodnie z tym wzorem moduły podane w ostatniej kolumnie są równe $\sqrt{n}$ centymetrów.

Wyrażenie (7) figuruje pod nazwą „odchylenie średnie empiryczne" w normie PN/N-03001 (wydanej przez Pol. Kom. Normalizacyjny w lutym 1951 r.) jako pozycja 6-45. W tejże normie występuje również nasze wyrażenie (2) jako pozycja 6-50 pod nazwą „odchylenie średnie empiryczne z próbki", jest ono tam oznaczone przez s_e.

Inne wyrażenia niniejszej pracy służą do wnioskowania o dyspersji w populacji z dyspersji w próbce złożonej z n sztuk i nadają się do orzekania o niejednolitości partii towaru z niejednolitości próbki, natomiast wyrażenie (7) nie jest pomyślane jako estymator; jego rolę pokażemy na przykładach:

1. Mamy stwierdzić, czy automat produkujący łuski do nabojów da się ustawić statecznie ze względu na średnicę łuski. Dostawca automatu gwarantuje $\sigma_e \leqslant 0{,}1$ mm, gdzie σ_e oblicza się z (7) (n nie figuruje w gwarancji!). Mierzymy średnice x_i ($i=1,2,\ldots,15$) 15 kolejnych łusek i obliczamy σ_i według (7), przy czym za x wstawiamy $\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i$, a następnie porównujemy wynik z 0,1.

Inny, może ważniejszy, użytek z (7) jest następujący:

2. Automat z przykładu 1 jest w ruchu. Chcemy stwierdzić, czy w danej chwili jest nastawiony na właściwą średnicę łuski, wynoszącą 8 mm, z dostateczną dokładnością, która jest określona przez wzór (7) i nierówność $\sigma_e \leqslant 0{,}13$ mm. Mierzymy np. 12 łusek po kolei i ich średnice x_i ($i=1,2,\ldots,12$) wstawiamy w wyrażenie (7), jednak za $\bar{x}$ wstawiamy 8; a następnie porównujemy wynik z tolerancją 0,13.

Widać tu jasno, że konwencjonalny charakter przepisów tolerancyjnych pozwala w takich przypadkach, jak wyżej, na posługiwanie się wzorem (7), który jest prostszy od poprzednich dzięki temu, że nie spełnia roli estymatora. Chcąc przystosować dyspersjometr do wzoru (7) musimy użyć skal odpowiadających pozycjom spisu (6) ujętym w nawiasy ( ).

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że gdy mamy dyspersjometr odpowiadający opisowi, a nie wzorowi (7), tolerancje zaś określono według (7), to wystarczy je pomnożyć przez odpowiednie współczynniki, co jest trudem jednorazowym, a następnie posługiwać się dyspersjometrem i nowymi tolerancjami. Współczynniki otrzymuje się z podzielenia liczb w nawiasach ostatniej kolumny (6) przez liczby przedostatniej kolumny tegoż spisu.

Prostota dyspersjometru zbliża go do ideału praktyka. Pamiętajmy jednak o tym, że — przy założeniu normalności rozkładu iksa — są sposoby rachunkowe szacowania sigmy, które dla małych liczności (a dyspersjometr nadaje się tylko do takich) są prostsze niż wszelki aparat. Tak np. estymator

$$(8)\qquad \sigma^*_{\mathrm{St}} = 0{,}135(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6-x_7-x_8-x_9-x_{10}),$$

który wyzyskuje bezpośrednio pomiary x ustawione poprzednio malejąco ($x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_9 \geqslant x_{10}$) (i analogiczne estymatory dla innych n) daje niemal tę samą dokładność, co (4), a chyba już nie dadzą się pomyśleć wyrażenia prostsze pod względem rachunkowym. O takich i innych estymatorach opracował F. Zítek referat dla

Zastosowań Matematyki, który czytelnik znajdzie w niniejszym zeszycie Zastosowań Matematyki. J. Battek z Ogólnej Grupy Zastosowań I. M. PAN sporządził rysunki i modele dyspersjometru oraz uprościł go przez skasowanie przegródki dzielącej szczeliny; jemu i p. Zítkowi dziękuję tu za cenną pomoc.

Wydaje mi się, że w praktyce bieżącej kontroli produkcji rzadko zdarzą się sytuacje, w których zarówno dyspersjometr jak i wzory typu (8) okażą się za mało dokładnymi lub zbyt trudnymi sposobami pomiaru dyspersji.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(Praca wpłynęła dnia 23. 5. 1953 r.)

Г. ШТЕЙНГАУС (Вроцлав)

ДИСПЕРСИОМЕТР

РЕЗЮМЕ

Дисперсиометр сводит вычисление таких выражений как (5) при постоянном n не превосходящим 20 к отчитыванию числовых пометок на обыкновенных шкалах, накалыванию точек и к передвиганию пластинки вдоль чертежной доски. Пластинка изображена на черт. 1; в ней вырезана узкая щель, меняющая в W направление под прямым углом, а вдоль обеих сторон прямого угла нанесены шкалы. В доску вбит навсегда штифт Q, который проходит через щель и сначала находится в W. Черт. 2 изображает движение пластинки по доске: острые шпиля N вкалываем последовательно сквозь щель в доску там, где на шкале $W\Xi$ находится пометка ξ_i, и пластинку продвигаем изгибом W к шпилю, причем вбитые в доску Q и N ведут пластинку. Когда продвинем W к последней позиции P_n шпиля N, отчитываем на шкале S искомое $\tilde{s}$ возле штифта Q.

H. STEINHAUS (Wrocław)

A DISPERSIOMETER

SUMMARY

A "dispersiometer" makes it possible to calculate such expressions as (5), n being constant and not greater than 20, merely by taking readings of ordinary scales, sticking pins and sliding a plate upon a drawing board. The

plate is shown in fig. 1; it has a narrow slot, bent in W to form a right angle, scales being placed along both arms of the angle. A pin Q is fixed permanently in the board. It goes through the slot and its initial position is at W. Fig. 2 shows the movements of the plate upon the board: the point of a needle N is repeatedly stuck into the board, through the slot, in the place where the characteristic ξ_i appears on the scale $W\Xi$. The plate is then shifted so as to make the corner W touch the needle N, the plate being guided by Q and N, both sticking in the board. When we move W to the last position P_n of the needle N, we shall find the sought $\tilde{s}$ on the scale S beside the pin Q.
