ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVI, 4 (1980)

ALGORITHMS 73-76

Z. CYLKOWSKI (Wrocław)

FOUR ALGORITHMS FOR EVALUATION OF IMPROPER INTEGRALS

1. Procedure declarations. The functions *trap*, *finINT*, *sinfINT* and *infINT* evaluate approximate values of the integrals

(1) $$\int_0^\infty f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_0^\infty f(x)\,dx \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx,$$

respectively, with relative error not exceeding ε.

The first function, *trap*, is utilized in the three remaining algorithms but it is also a separate and complete algorithm. The use of it is recommended when the integrand f has a continuous second derivative, does not oscillate too much, the values of f disappear fast for $x \to \infty$ and $f^{(2k+1)}(0) = 0$ for $k = 0$ or $k = 0, 1$ or $k = 0, 1, 2$, etc.

The function *trap* may be used for the evaluation of integrals in the interval $(-\infty, \infty)$ as follows:

(2) $$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx, \quad f(x) = \varphi(x)+\varphi(-x).$$

The use of the remaining functions is recommended when in the interior of the corresponding integration interval the function f has a continuous second derivative and does not oscillate there too much. At the interval endpoints the function f may have singularities of the algebraic-logarithmic type.

Remark 1. In reality, the functions *finINT*, *sinfINT* and *infINT* evaluate approximate values of the integrals

(3) $$\int_{a+\eta_0}^{b-\eta_0} f(x)\,dx, \quad \int_\eta^{1/\eta} f(x)\,dx \quad \text{and} \quad \int_{-1/\eta}^{1/\eta} f(x)\,dx,$$

respectively, where

$$\eta_0 = \eta\,\mathrm{sign}(b-a)\max\{1, |b-a|\}$$

and η denotes the smallest positive computer value of the function *exp*.

Remark 2. In the algorithm *finINT* the integrand may be unlimited at only one end of the integration interval and in this case it must be the zero point.

1.1. *trap*. The integration algorithm is based on the approximate formula

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \approx T(m,h) \overset{\mathrm{df}}{=} h\left(\frac{1}{2}f(0)+\sum_{k=1}^{m} f(kh)\right). \tag{4}$$

At the beginning of the calculation there is assigned $h = H/(m+\frac{1}{2})$, where H and m are data parameters.

Data:

f — integrand, identifier of a real function with one parameter of type **real**;

eps — relative error ε;

H — positive number satisfying the inequality

$$\left|\int_H^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \delta\left|\int_0^\infty f(x)\,dx\right|, \tag{5}$$

where $\delta = \frac{1}{3}$ if, for every $t \in (H, \infty)$,

$$\left|\int_t^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant t\,|f(t)|, \tag{6}$$

and $\delta = \varepsilon$ otherwise;

m — initial number of components of the sum in (4); m may be a small number, one requires, however, for the values of $\int_0^H f(x)\,dx$ and $T(m,h)$ to be of the same range;

n — natural number requiring to use at most n values of the integrand in the algorithm.

Additional result:

n — number not exceeding the value n given in the data; if $n > 0$, then the algorithm used n values of the integrand, and if $n = 0$, then the desired accuracy was not obtained.

1.2. *finINT*. One of the given parameters, *ro*, depends on the expression

$$A_1(t) = (1-t)\sqrt{4+\ln^2\frac{1-t}{t}}\,\ln\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4+\ln^2\frac{1-t}{t}}+\ln\frac{1-t}{t}\right)\right] \tag{7}$$

which assumes the values

(8)

t	10^{-1}	10^{-3}	10^{-10}	10^{-30}	10^{-90}
$A_1(t)$	2.539	14.03	72.54	292.7	1105

```
real procedure trap(f,eps,H,m,n);
 value eps,H,m;
 integer m,n;
 real eps,H;
 real procedure f;
 begin
  integer i,k,l;
  real fx,h,r,s,w;
  h:=H/(m+.5);
  w:=.0;
  k:=l:=0;
  s:=.5×f(.0);
A:l:=l+1;
  if l≥n
   then go to C;
  fx:=f(l×h);
  s:=s+fx;
  if if l>m then abs(l×fx)>abs(eps×s) else true
   then go to A;
  m:=l+1;
B:m:=m+1;
  if m>n
   then go to C;
  l:=l+l;
  h:=.5×h;
  H:=s+s;
  for i:=1 step 2 until l do
   begin
    fx:=f(i×h);
    s:=s+fx
   end i;
  r:=abs(eps×s);
  if abs(l×fx)≤r
   then l:=l-1;
  fx:=w;
  w:=abs(s-H);
```

```
    if (if fx=.0 then w else w/fx×w)>r
     then go to B;
    k:=m;
  C:n:=k;
    trap:=h×s
  end trap
```

Data:

a, b — integration limits;

f — integrand, identifier of a real function with one parameter of type **real**;

eps — relative error ε;

ro — parameter ϱ $(0 < \varrho < 0.5)$ satisfying the inequality

$$\left|\int\limits_{a}^{a+\varrho(b-a)} f(x)\,dx + \int\limits_{b-\varrho(b-a)}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \delta\left|\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx\right|, \tag{9}$$

where $\delta = \frac{1}{3}$ if, for every $t \in \big(0, \varrho(b-a)\big)$,

$$\left|\int\limits_{a}^{a+t} f(x)\,dx + \int\limits_{b-t}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant A_1\left(\frac{t}{b-a}\right)\left|t\big(f(a+t)+f(b-t)\big)\right|, \tag{10}$$

and $\delta = \varepsilon$ otherwise (it may usually be assumed $ro = {}_{10}-3$ or $ro = eps$);

m — number of integration subintervals into which both of the intervals

$$\langle a+\varrho(b-a), \tfrac{1}{2}(a+b)\rangle, \quad \langle \tfrac{1}{2}(a+b), b-\varrho(b-a)\rangle$$

are divided at the beginning of the calculation (the lengths of the subintervals are different);

n — natural number requiring to use at most n values of the integrand in the algorithm.

Additional result:

n — number not exceeding the value n given in the data; if $n > 0$, then the algorithm used n values of the integrand, and if $n = 0$, then the desired accuracy was not obtained.

Non-local identifier:

trap — identifier of the function described in this paper.

1.3. *sinfINT*. One of the given parameters, *ro*, depends on the expression

$$A_2(t) = \sqrt{1+\ln^2 t}\,\ln\left(\sqrt{1+\ln^2 t}+\ln t\right) \tag{11}$$

```
real procedure finINT(a,b,f,eps,ro,m,n);
 value a,b,eps,ro,m;
 integer m,n;
 real a,b,eps,ro;
 real procedure f;
 begin
  integer k,n0;
  real ba,x;
  real procedure fi(u);
   value u;
   real u;
   if u=.0
    then fi:=ba×f(.5×(a+b))
    else begin
          u:=exp(u);
          eps:=1.0/u;
          x:=exp(eps-u);
          ro:=1.0+x;
          x:=ba×x/ro;
          if x=.0
           then begin
                 fi:=.0;
                 n0:=n0+1
                end x=0
           else begin
                 fi:=(u+eps)×x/ro×(f(a+x)+f(b-x));
                 k:=k+2
                end x≠0
         end u≠0, fi;
  ro:=.5×ln(1.0/ro-1.0);
  ba:=b-a;
  n0:=(n+1)+2;
  k:=1;
  finINT:=trap(fi,eps,ln(ro+sqrt(1.0+ro×ro)),m,n0);
  n:=if n0=0 then 0 else k
 end finINT
```

which assumes the values

(12)

t	$_{10}1$	$_{10}3$	$_{10}10$	$_{10}30$	$_{10}90$
$A_2(t)$	3.945	18.36	88.28	340.5	1249

Data:

f — integrand, identifier of a real function with one parameter of type **real**;

eps — relative error ε;

ro — parameter ϱ ($\varrho > 1$) satisfying the inequality

$$\left|\int_0^{1/\varrho} f(x)\,dx + \int_\varrho^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \delta\left|\int_0^\infty f(x)\,dx\right|, \tag{13}$$

where $\delta = \frac{1}{3}$ if, for every $t \in (\varrho, \infty)$,

$$\left|\int_0^{1/t} f(x)\,dx + \int_t^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant A_2(t)\left|\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) + tf(t)\right|, \tag{14}$$

and $\delta = \varepsilon$ otherwise (it may usually be assumed $ro = {}_{10}3$ or $ro = 1/eps$);

m — number of integration subintervals into which both of the intervals $\langle 1/\varrho, 1\rangle$ and $\langle 1, \varrho\rangle$ are divided at the beginning of the calculation (the lengths of the subintervals are different);

n — natural number requiring to use at most *n* values of the integrand in the algorithm.

Additional result:

n — number not exceeding the value *n* given in the data; if $n > 0$, then the algorithm used *n* values of the integrand, and if $n = 0$, then the desired accuracy was not obtained.

Non-local identifier:

trap — identifier of the function described in this paper.

1.4. *infINT*. One of the given parameters, *ro*, depends on the expression

$$A_3(t) = \sqrt{4t^{-2}+1}\sqrt{1+l^2(t)}\ln\left(\sqrt{1+l^2(t)}+l(t)\right), \tag{15}$$

where

$$l(t) = \ln\frac{1}{2}\left(\sqrt{4+t^2}+t\right).$$

$A_3(t)$ assumes the following values:

(16)

t	1	3	$_{10}1$	$_{10}3$	$_{10}10$	$_{10}30$	$_{10}90$
$A_3(t)$	1.152	1.896	4.047	18.36	88.28	340.5	1249

```
real procedure sinfINT(f,eps,ro,m,n);
 value eps,ro,m;
 integer m,n;
 real eps,ro;
 real procedure f;
 begin
  integer k,n0;
  real procedure fi(u);
   value u;
   real u;
   if u=.0
    then fi:=2.0×f(1.0)
    else begin
          u:=.5×exp(u);
          eps:=.25/u;
          ro:=exp(eps-u);
          if ro=.0
           then begin
                 fi:=.0;
                 n0:=n0+1
                end ro=0
           else begin
                 fi:=(u+eps)×(ro×f(ro)+f(1.0/ro)/ro);
                 k:=k+2
                end ro≠0
         end u≠0, fi;
  ro:=ln(ro);
  n0:=(n+1)+2;
  k:=1;
  sinfINT:=trap(fi,eps,ln(ro+sqrt(1.0+ro×ro)),m,n0);
  n:=if n0=0 then 0 else k
 end sinfINT
```

```
real procedure infINT(f,eps,ro,m,n);
 value eps,ro,m;
 integer m,n;
 real eps,ro;
 real procedure f;
 begin
  integer k,n0;
  real r;
  real procedure fi(u);
   value u;
   real u;
   if u=.0
    then fi:=4.0×f(.0)
    else begin
          u:=.5×exp(u);
          eps:=.25/u;
          ro:=exp(eps-u);
          if ro=.0
           then begin
                 fi:=.0;
                 n0:=n0+1
                end ro=0
           else begin
                 r:=1.0/ro;
                 fi:=(r+ro)×(f(ro-r)+f(r-ro))×(u+eps);
                 k:=k+2
                end ro≠0
         end u≠0, fi;
  ro:=ln(if ro<⏨9 then .5×(ro+sqrt(4.0+ro×ro)) else ro);
  n0:=(n+1)+2;
  k:=1;
  infINT:=trap(fi,eps,ln(ro+sqrt(1.0+ro×ro)),m,n0);
  n:=if n0=0 then 0 else k
 end infINT
```

Data:

f — integrand, identifier of a real function with one parameter of type **real**;

eps — relative error ε;

ro — parameter ϱ ($\varrho > 0$) satisfying the inequality

$$\left|\int_{-\infty}^{-\varrho} f(x)\,dx + \int_{\varrho}^{\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \delta \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right|, \tag{17}$$

where $\delta = \frac{1}{3}$ if, for every $t \in (\varrho, \infty)$,

$$\left|\int_{-\infty}^{-t} f(x)\,dx + \int_{t}^{\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant A_3(t)\,t\,|f(-t)+f(t)|, \tag{18}$$

and $\delta = \varepsilon$ otherwise.

m — number of integration subintervals into which both of the intervals $\langle -\varrho, 0\rangle$ and $\langle 0, \varrho\rangle$ are divided at the beginning of the calculation (the lengths of the subintervals are different);

n — natural number requiring to use at most n values of the integrand in the algorithm.

Additional result:

n — number not exceeding the value n given in the data; if $n > 0$, then the algorithm used n values of the integrand, and if $n = 0$, then the desired accuracy was not obtained.

Non-local identifier:

trap — identifier of the function described in this paper.

2. Methods used. For the function *trap* the quadrature (4) is adapted in the following manner:

1° Assign $h := H/(m+\frac{1}{2})$.

2° Assigning $m := m+1$, evaluate the values of $T(m,h)$ as long as the inequality

$$|mhf(mh)| \leqslant |\varepsilon T(m, h)|$$

is not satisfied.

3° Doubling m and halving h, evaluate the values of $T(m, h)$ as long as the inequality

$$|\varepsilon T(m, h)| \geqslant \begin{cases} |T(m, h) - T(m/2, 2h)| & \text{(after the first doubling of } m\text{)}, \\ \dfrac{|T(m, h) - T(m/2, 2h)|^2}{|T(m/2, 2h) - T(m/4, 4h)|} & \text{(after the next doublings of } m\text{)} \end{cases}$$

is not satisfied.

The functions *finINT*, *sinfINT* and *infINT* use also the above algorithm but for integrals transformed by Schwartz's substitutions of [1].

For the function *finINT* the substitution

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\operatorname{th}(\operatorname{sh} u) \tag{19}$$

$$= \begin{cases} a+(b-a)\dfrac{\exp(2\operatorname{sh} u)}{1+\exp(2\operatorname{sh} u)} & (u \leqslant 0), \\ b-(b-a)\dfrac{\exp(-2\operatorname{sh} u)}{1+\exp(-2\operatorname{sh} u)} & (u > 0) \end{cases}$$

is used. Hence

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du = \int_0^{\infty} \big(\varphi(u)+\varphi(-u)\big)\,du,$$

where

$$\varphi(u) = 2(b-a)\operatorname{ch} u\,\frac{\exp(-2\operatorname{sh}|u|)}{[1+\exp(-2\operatorname{sh}|u|)]^2} f(x).$$

The function *sinfINT* uses the formulae

$$x = \exp(\operatorname{sh} u), \tag{20}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du = \int_0^{\infty} \big(\varphi(u)+\varphi(-u)\big)\,du$$

in which

$$\varphi(u) = \operatorname{ch} u \exp(\operatorname{sh} u) f(x).$$

The function *infINT* uses the formulae

$$x = 2\operatorname{sh}(\operatorname{sh} u), \tag{21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du = \int_0^{\infty} \big(\varphi(u)+\varphi(-u)\big)\,du$$

in which

$$\varphi(u) = 2\operatorname{ch} u \operatorname{ch}(\operatorname{sh} u) f(x).$$

3. Certification. The control calculations have been performed on the ODRA 1204 computer. There has been assumed ***eps*** $= {}_{10}-5$. Tables 1-4 contain the results of the calculations. In the last example the expression

$$t(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan x = \begin{cases} -\arctan\dfrac{1}{x} & (x < 0), \\ \dfrac{\pi}{2} + \arctan x & (x \geqslant 0) \end{cases}$$

is used.

TABLE 1. Integration in the interval $\langle 0, \infty)$. Function *trap*

$f(x)$	H	m	Obtained relative error	Final value of n
$\mathrm{ch}^{-2} x$	4	3	$1.7_{10}-7$	29
$\exp(-x^2)\cos 4x$	2	3	$1.4_{10}-8$	32
$1/(1+x^4)$	5	3	$3.0_{10}-6$	261
$\exp(-x)/(1+x^4)$	5	3	$3.2_{10}-6$	1161

TABLE 2. Integration in the interval (0, 1). Function *finINT*

$f(x)$	ro	m	Obtained relative error	Final value of n
$\exp(-25x^2)$	$_{10}-4$	2	$2.1_{10}-9$	31
$1/(x+0.01)$	$_{10}-4$	2	$6.3_{10}-10$	59
$2/(2+\sin 10\pi x)$	$_{10}-4$	2	$1.1_{10}-7$	207
$x^{-0.9}$	$_{10}-4$	2	$5.1_{10}-11$	49
$\ln^3 x$	$_{10}-4$	2	$7.3_{10}-12$	33
$1/(x\ln^4(2/x))$	$_{10}-4$	2	$3.5_{10}-7$	41
$\sin(3\ln x)$	$_{10}-4$	2	$1.1_{10}-8$	109

TABLE 3. Integration in the interval $(0, \infty)$. Function *sinfINT*

$f(x)$	ro	m	Obtained relative error	Final value of n
$\exp(-x^2)\cos 4x$	$_{10}4$	2	$5.6_{10}-9$	109
$1/(1+x^4)$	$_{10}4$	2	$5.6_{10}-9$	25
$\exp(-x)/(1+x^4)$	$_{10}4$	2	$8.7_{10}-9$	25
$(1+x)^{-1.05}$	$_{10}4$	2	$7.9_{10}-9$	45
$\ln(x)/(x^{1/4}(1+x))$	$_{10}4$	2	$1.5_{10}-11$	39
$\exp(-x)\sin^2 x$	$_{10}4$	2	$3.0_{10}-8$	141

TABLE 4. Integration in the interval $(-\infty, \infty)$. Function *infINT*

$f(x)$	ro	m	Obtained relative error	Final value of n
$\exp(-x^2)\cos 4x$	4	2	$6.3_{10}-10$	47
$1/(1+x^4)$	30	2	$3.1_{10}-8$	49
$\cos(x)/(1+x^2)^2$	30	2	$6.5_{10}-7$	187
$1/((x-0.1)^2+0.01)$	$_{10}4$	2	$1.7_{10}-7$	717
$\ln(t(x))/(t^{0.9}(x)(1+x^2))$	$_{10}4$	2	$2.6_{10}-7$	45

Reference

[1] C. Schwartz, *Numerical integration of analytic functions*, J. Computational Phys. 4 (1969), p. 19-29.

INSTITUTE OF INFORMATICS
UNIVERSITY OF WROCŁAW
50-384 WROCŁAW

Received on 23. 11. 1977

ALGORYTMY 73-76

Z. CYLKOWSKI (Wrocław)

CZTERY ALGORYTMY OBLICZANIA CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH

STRESZCZENIE

Wartościami funkcji *trap*, *finINT*, *sinfINT* i *infINT* są odpowiednio wartości przybliżone czterech całek (1), obliczone z błędem względnym ε.

Pierwsza funkcja, *trap*, występuje w pozostałych trzech algorytmach, ale sama tworzy odrębną całość. Zaleca się jej używać, gdy funkcja f ma ciągłą drugą pochodną, nie jest silnie oscylująca, wartości $f(x)$ szybko zanikają dla $x \to \infty$ i gdy $f^{(2k+1)}(0) = 0$ dla $k = 0$ lub $k = 0, 1$, lub $k = 0, 1, 2$ itd. Ze względu na równość (2) funkcja *trap* może być użyta do obliczania całek w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Z pozostałych algorytmów zaleca się korzystać, gdy wewnątrz odpowiedniego przedziału całkowania funkcja f ma ciągłą drugą pochodną i nie oscyluje tam silnie. Na końcach przedziału funkcja f może mieć osobliwości typu algebraiczno-logarytmicznego.

Uwaga 1. W rzeczywistości funkcje *finINT*, *sinfINT* i *infINT* obliczają odpowiednio wartości przybliżone całek (3), gdzie

$$\eta_0 = \eta \operatorname{sign}(b-a)\max\{1, |b-a|\},$$

a η jest najmniejszą dodatnią wartością maszynową funkcji *exp*.

Uwaga 2. W algorytmie *finINT* funkcja podcałkowa może być nieograniczona tylko w jednym końcu przedziału całkowania i wtedy ten koniec musi być zerem.

1. *trap*. Algorytm całkowania używa wzoru przybliżonego (4). Na początku obliczeń jest $h = H/(m+1/2)$, gdzie H i m są danymi parametrami.

Dane:

- f — nazwa funkcji podcałkowej typu **real** z jednym parametrem typu **real**;
- *eps* — błąd względny ε;
- H — liczba dodatnia spełniająca nierówność (5), w której $\delta = 1/3$, jeśli dla każdego $t \in (H, \infty)$ zachodzi (6), lub $\delta = \varepsilon$ w przeciwnym razie;
- m — początkowa liczba składników sumy z wzoru (4); powinna ona być tak duża, żeby wielkości $\int_0^H f(x)dx$ i $T(m, h)$ były tego samego rzędu;
- n — liczba naturalna wyrażająca żądanie, aby algorytm użył nie więcej niż n wartości funkcji podcałkowej.

Wynik dodatkowy:

n — liczba nie większa od danego n; jeśli $n > 0$, to algorytm użył n wartości funkcji podcałkowej, a jeśli $n = 0$, to nie uzyskano żądanej dokładności.

2. *finINT*. Jeden z danych parametrów, *ro*, zależy od wyrażenia (7), które ma wartości (8).

Dane:

a, b — granice całkowania;

f, *eps*, n — parametry o tym samym znaczeniu jak dane f, *eps*, n do funkcji *trap*;

ro — parametr ϱ $(0 < \varrho < 0.5)$ spełniający nierówność (9), w której $\delta = 1/3$, jeśli dla każdego $t \in (0, \varrho(b-a))$ zachodzi (10), lub $\delta = \varepsilon$ w przeciwnym razie (zazwyczaj można przyjąć $ro = {}_{10}-3$ lub $ro = eps$);

m — liczba podprzedziałów całkowania, na które zostanie podzielony każdy z przedziałów

$$\left\langle a+\varrho(b-a),\ \frac{a+b}{2}\right\rangle,\ \left\langle \frac{a+b}{2},\ b-\varrho(b-a)\right\rangle$$

przy rozpoczęciu obliczeń (podprzedziały mają różne długości).

Wynik dodatkowy:

n — parametr o tym samym znaczeniu jak wynik dodatkowy funkcji *trap*.

Nazwa nielokalna:

trap — nazwa funkcji opisanej w tej pracy.

3. *sinfINT*. Jeden z danych parametrów, *ro*, zależy od wyrażenia (11), które ma wartości (12).

Dane:

f, *eps*, n — parametry o tym samym znaczeniu jak dane f, *eps*, n do funkcji *trap*;

ro — parametr ϱ $(\varrho > 1)$ spełniający nierówność (13), w której $\delta = 1/3$, jeśli dla każdego $t \in (\varrho, \infty)$ zachodzi (14), lub $\delta = \varepsilon$ w przeciwnym razie (zazwyczaj można przyjąć $ro = {}_{10}3$ lub $ro = 1/eps$);

m — liczba podprzedziałów całkowania, na które zostanie podzielony każdy z przedziałów $\langle 1/\varrho, 1\rangle$ i $\langle 1, \varrho\rangle$ przy rozpoczęciu obliczeń (podprzedziały mają różne długości).

Wynik dodatkowy:

n — parametr o tym samym znaczeniu jak wynik dodatkowy funkcji *trap*.

Nazwa nielokalna:

trap — nazwa funkcji opisanej w tej pracy.

4. *infINT*. Jeden z danych parametrów, *ro*, zależy od wyrażenia (15), które ma wartości (16).

Dane:

f, *eps*, n — parametry o tym samym znaczeniu jak dane f, *eps*, n do funkcji *trap*;

ro — parametr ϱ $(\varrho > 0)$ spełniający nierówność (17), w której $\delta = 1/3$, jeśli dla każdego $t \in (\varrho, \infty)$ zachodzi (18), lub $\delta = \varepsilon$ w przeciwnym razie;

m — liczba podprzedziałów całkowania, na które zostanie podzielony każdy z przedziałów $\langle -\varrho, 0\rangle$ i $\langle 0, \varrho\rangle$ przy rozpoczęciu obliczeń (podprzedziały mają różne długości).

Wynik dodatkowy:

n — parametr o tym samym znaczeniu jak wynik dodatkowy funkcji *trap*.

Nazwa nielokalna:

trap — nazwa funkcji opisanej w tej pracy.

W funkcji *trap* użyto metody opartej na kwadraturze (4). Funkcje *finINT*, *sinfINT* i *infINT* używają odpowiednio podstawień (19), (20) i (21) i korzystają z funkcji *trap*. W ustępie 3 zamieszczono kilka przykładów obliczeń.