ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

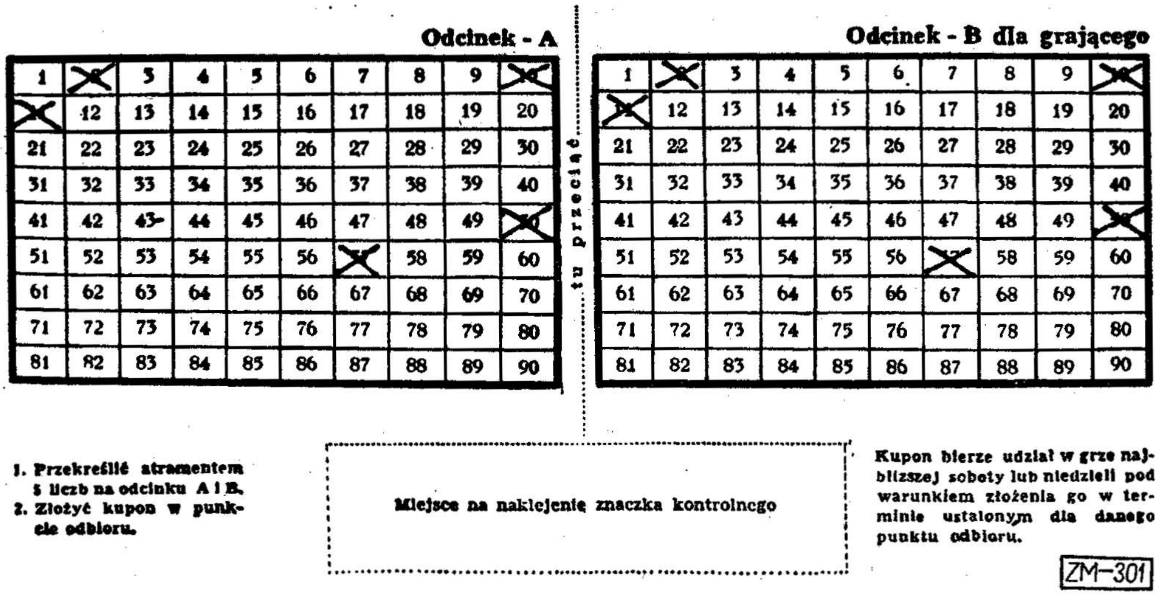
B. GLEICHGEWICHT, J. KUCHARCZYK, H. STEINHAUS (Wrocław)

UWAGI O GRACH LICZBÒWYCH

6 stycznia 1957 r. odbyło się pierwsze ciągnienie górnośląskiej „Karolinki", pierwszej po wojnie gry liczbowej w Polsce. „Karolinka" znalazła wkrótce naśladowczynie. Obecnie mamy wiele podobnych gier, jak np. „Liczyrzepkę" (Wrocław), „Syrenkę" (Warszawa), „Karliczka" (Opole), „Lajkonika" (Kraków) itd. Wielka ich popularność, usłyszane lub przeczytane o nich słuszne i niesłuszne zdania, zwróciły i naszą uwagę na zagadnienie loterii liczbowych tego typu.

Skoncentrowała się ona przede wszystkim na najbliższej nam loterii, na wrocławskiej „Liczyrzepce", która nie wiele różni się od innych wspomnianych gier.

Na czym polega „Liczyrzepka"? Grający otrzymuje kupon, na którym ma oznaczyć krzyżykiem 5 spośród 90 wydrukowanych tam liczb



Rys. 1. Kupon gry liczbowej „Liczyrzepka"

od 1 do 90. Kupon ma kształt prostokąta, w którego każdym wierszu znajduje się 10 kolejnych liczb (rys. 1). Kupon składa się z dwóch jednakowych części: jedną grający składa w punkcie odbioru, drugą zatrzymuje. Punkt odbioru potwierdza na kuponie odbiór kuponu przez naklejenie banderolki po wpłaceniu przez grającego 3 zł.

Co tydzień odbywa się losowanie 5 liczb, które decydują o wygranej. Jeśli na kuponie są zaznaczone 2, 3, 4 lub 5 z wylosowanych liczb, grający wygrał. Wysokość wygranych oblicza się w następujący sposób: 60% wpływu ze złożonych kuponów jest przeznaczone dla graczy, reszta na cele społeczne i administracyjne. Sumę, przeznaczoną dla graczy, dzieli się na 4 równe części. Każdą z tych części dzieli się równo pomiędzy graczy z 5, 4, 3 lub 2 trafieniami. Regulamin gry przewiduje także odpowiedni podział, jeśli brak jest wygrywających w którejś z tych kategorii.

Gry takie, jak „Karolinka", „Liczyrzepka" itp., w których wybiera się 5 spośród 90 liczb, będziemy nazywali w skrócie *grami 5 z 90*. Prócz nich mamy i inne odmiany gier. Np. popularny ostatnio „Toto-Lotek" jest grą *6 z 49*, gdyż grający wybiera 6 spośród liczb 1-49([1]). Na ten system przeszła na wiosnę 1958 r. także część gier *5 z 90*, jak np. wrocławska „Liczyrzepka". Taka sama loteria jest bardzo popularna w NRF. Jest tam również loteria *7 z 36*. U nas w Polsce tę odmianę gry wprowadził ostatnio opolski „Karliczek".

Każdego gracza interesują przede wszystkim szanse wygrania. Obliczmy je dla wszystkich poprzednio wymienionych odmian. Wpierw podzielimy wygrane na cztery stopnie: do pierwszego stopnia zaliczymy trafny wybór wszystkich wylosowanych liczb (a więc 5 trafnych w systemie *5 z 90*, 6 w systemie *6 z 49* lub 7 trafnych w systemie *7 z 36*), drugi stopień stanowią wygrane z jedną źle wybraną liczbą (a więc 4 trafne w grze *5 z 90*, 5 trafnych w grze *6 z 49* lub 6 w grze *7 z 36*). Podobnie trzeci i czwarty stopień stanowią wygrane z odpowiednio dwiema lub trzema źle wybranymi liczbami.

Oto prawdopodobieństwa wygranych dla poszczególnych odmian i stopni:

$$P(\mathrm{I}, \mathit{5\ z\ 90}) = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} = 2{,}50\cdot 10^{-8},$$

$$P(\mathrm{II}, \mathit{5\ z\ 90}) = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = 425P(\mathrm{I}, \mathit{5\ z\ 90}) = 9{,}67\cdot 10^{-6},$$

([1]) Aktualne przepisy „Toto-Lotka" — jak i innych gier — są inne (losowanie dodatkowego, siódmego numeru itp.), nie będziemy się jednak nimi zajmowali.

$$P(\mathrm{III},\, 5 \text{ z } 90) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = 84P(\mathrm{II},\, 5 \text{ z } 90) = 35\,700P(\mathrm{I},\, 5 \text{ z } 90) = \\ = 8{,}12 \cdot 10^{-4},$$

$$P(\mathrm{IV},\, 5 \text{ z } 90) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} = 2324P(\mathrm{II},\, 5 \text{ z } 90) = 987\,700P(\mathrm{I},\, 5 \text{ z } 90) = \\ = 2{,}247 \cdot 10^{-2},$$

$$P(\mathrm{I},\, 6 \text{ z } 49) = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} = 7{,}15 \cdot 10^{-8},$$

$$P(\mathrm{II},\, 6 \text{ z } 49) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = 258P(\mathrm{I},\, 6 \text{ z } 49) = 1{,}845 \cdot 10^{-5},$$

$$P(\mathrm{III},\, 6 \text{ z } 49) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 13\,545P(\mathrm{I},\, 6 \text{ z } 49) = 9{,}69 \cdot 10^{-4},$$

$$P(\mathrm{IV},\, 6 \text{ z } 49) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 246\,820P(\mathrm{I},\, 6 \text{ z } 49) = 1{,}765 \cdot 10^{-2},$$

$$P(\mathrm{I},\, 7 \text{ z } 36) = \frac{\binom{7}{7}\binom{29}{0}}{\binom{36}{7}} = \frac{1}{8\,347\,680} = 1{,}198 \cdot 10^{-7},$$

$$P(\mathrm{II},\, 7 \text{ z } 36) = \frac{\binom{7}{6}\binom{29}{1}}{\binom{36}{7}} = 203P(\mathrm{I},\, 7 \text{ z } 36) = 2{,}43 \cdot 10^{-5},$$

$$P(\text{III},\ 7\ z\ 36) = \frac{\binom{7}{5}\binom{29}{2}}{\binom{36}{7}} = 8526P(\text{I},\ 7\ z\ 36) = 1{,}02\cdot 10^{-3},$$

$$P(\text{IV},\ 7\ z\ 36) = \frac{\binom{7}{4}\binom{29}{3}}{\binom{36}{7}} = 127890P(\text{I},\ 7\ z\ 36) = 1{,}532\cdot 10^{-2}.$$

Teraz przedstawimy te prawdopodobieństwa jako ilorazy o liczniku 1. (tablica 1). Pozwoli to na łatwiejsze porównanie szans wygrania.

TABLICA 1

Prawdopodobieństwa wygrania

stopień wygranej / odmiana gry	I	II	III	IV
5 z 90	1:43949268	1:103410	1:1231	1:44,5
6 z 49	1:13983816	1: 54201	1:1032	1:56,7
7 z 36	1: 8347680	1: 41122	1: 979	1:65,3

Mając prawdopodobieństwa wygrania dla różnych gier i różnych stopni, można łatwo obliczyć oczekiwaną liczbę wygranych przy danej ilości graczy. Tablica 2 zawiera te liczby (zaokrąglone do liczb całkowitych) przy liczbie graczy równej milion.

TABLICA 2

Oczekiwana liczba wygranych

stopień wygranej / odmiana gry	I	II	III	IV
5 z 90	0	10	812	22472
6 z 49	0	18	969	17650
7 z 36	0	24	1021	15321

Jak widać, różnica między poszczególnymi odmianami gier polega głównie na zwiększaniu się ilości wygranych stopnia drugiego i trzeciego, a zmniejszaniu się tych ilości dla stopnia czwartego przy przejściu z gry o mniejszej ilości liczb losowanych do gry o większej ilości losowanych liczb. Przeciwnie zachowują się wtedy wysokości wygranych.

Warto zwrócić uwagę na to, że opisywane tu gry liczbowe są grami typu totalizatora, tzn. gracze grają przeciwko sobie. Wprawdzie odmiana *5 z 90* z pewnością jest wzorowana na znanej „loterii genueńskiej", jednak różnica między tymi grami jest zasadnicza. W loterii genueńskiej są ustalone wysokości wygranych dla poszczególnych stopni, wysokości — gwarantowane przez bankiera, zaś w grze typu „Liczyrzepki" wysokość wygranych zależy od liczby wygranych kuponów dla danego stopnia, gdyż całą kwotę, przypadającą na wygrane danego stopnia, dzieli się równo pomiędzy wygrywających.

Już po pierwszych grach katowickiej „Karolinki", pierwszej gry liczbowej typu *5 z 90* w Polsce, uwagę ogółu zwróciła bardzo duża liczba wygranych II stopnia (*kwatern*) oraz duże wahania tej liczby. I tak np. w 11 grze „Karolinki" przy 3056255 grających było 101 kwatern zamiast teoretycznie oczekiwanych 29,6, a w 15 grze przy 3077289 graczach było 68 kwatern zamiast 29,8. Ilość ta przekracza oczekiwaną rozkładu Poissona w pierwszym przypadku o $k = (101-29{,}6)/\sqrt{29{,}6} = 71{,}4/5{,}44 = 13{,}1 \approx 13$ odchyleń średnich, a w drugim — o $k = (68-29{,}8)/\sqrt{29{,}8} = 38{,}2/5{,}46 = 7$ odchyleń średnich! Takie nadmiary w liczbie wygranych naturalnie nasuwały podejrzenia o nieuczciwe machinacje. Jednak średnia ilość kwatern na milion graczy w pierwszych 17 grach „Karolinki", wynosząca 11,42 zamiast 9,67 jest już zgodna z teorią.

Ale jest inny, nieodparty argument, obalający podejrzenia o nadużycia. Weźmy dla przykładu piątą grę „Liczyrzepki". W grze uczestniczyło 1371127 graczy. Wyniki tej gry są spisane w tablicy 3.

TABLICA 3

stopień wygranej / ilość wygranych	II	III	IV
oczekiwana	13,26	1114	30814
faktyczna	117	4733	64451
za dużo	8,82 razy	4,25 razy	2,09 razy

Prawie dziewięciokrotne powiększenie oczekiwanej liczby kwatern, czyli przekroczenie ilości oczekiwanej o $k = (115-13{,}26)/\sqrt{13{,}26} = 101{,}74/$ $/3{,}64 = 27{,}95 \approx 28$ odchyleń średnich, jest tak niewiarogodne, że trudno mówić o przypadku.

Gdy się zbada 30 gier „Liczyrzepki", to zamiast oczekiwanych 268,4 kwatern znajdzie się tam 411 wygranych II stopnia, czyli na milion graczy zamiast 9,67 wypada 14,81 wygranych.

Podobnie rzecz się ma z wygranymi III i IV stopnia.

Wydaje się jednakże rzeczą absurdalną twierdzić, że nadwyżki te powstały wskutek nieuczciwych machinacji. Trudno bowiem przypuścić, że kilka tysięcy osób przemyciło kilkadziesiąt tysięcy kuponów do paczek po losowaniu, by zarobić na każdym po około 10 zł (IV stopień wygranej).

Trzeba więc szukać innych przyczyn nadwyżek. Z przykładu piątej gry „Liczyrzepki" wynika, że nadwyżka musi być spowodowana czymś, co ma największy wpływ na kwaterna, dwa razy mniejszy na terna, a cztery razy mniejszy na amba. Tym czymś może być tylko upodobanie ludzi do pewnych układów liczb, a niechęć do innych. Wprawdzie każda piątka liczb ma tę samą szansę wylosowania w grze (możemy przyjąć, że założenie przypadkowości wyciągania piłeczek z numerami jest spełnione), ale nie każda piątka liczb ma tę samą szansę pojawienia się na kuponie; pierwszy zwrócił na to uwagę S. Trybuła. Jeśli wylosowana piątka liczb trafi w gust graczy, to mamy nadmiar wygranych, a gdy wylosowana piątka okaże się niepopularna — niedomiar. Mamy więc do czynienia z *preferencją*. Występuje ona najmocniej w kwinternach, a najsłabiej w ambach. Objaśnić to można tym, że ludzie nie grają na poszczególne numery, ale na całe piątki. Przeto w piątkach zjawisko preferencji występuje w całej pełni, a ponieważ piątka liczb składa się z czwórek, trójek i par liczb — preferencja i w nich się przejawia.

W pracy niniejszej chodzi nam o zbadanie wspomnianego zjawiska preferencji. Dzięki uprzejmości Dyrekcji Dolnośląskiej Gry Liczbowej „Liczyrzepka", mieliśmy do dyspozycji kilkadziesiąt tysięcy wypełnionych kuponów ze starych gier. Na tych właśnie kuponach rozpoczęliśmy badanie zjawiska preferencji.

Pierwszy etap pracy polegał na stwierdzeniu samego zjawiska. Okazało się, że już kształt kuponu i kształt figury, otrzymanej po zaznaczeniu 5 liczb na kuponie, nie jest obojętny dla graczy. Rzadko spotykaliśmy sekwensy liczbowe, rzadko również sekwensy geometryczne (wybór liczb w 5 stykających się kratkach). Gracze częściej tak wypełniają kupon, że powstała figura ma układ poziomy; układ pionowy wybierają rzadziej. Często spotyka się krzyżyki wzdłuż głównej przekątni lub wzdłuż obu przekątni (w czterech rogach i w środku po jednym krzyżyku). Na ogół gracz stara się wybierać liczby tak, by kupon był równomiernie wypełniony; gracz woli nie grupować wszystkich krzyżyków w jednej części kuponu. Podobnych regularności zaobserwowaliśmy wiele. Nie udało nam się jednak znaleźć żadnego klucza do rozwikłania i usystematyzowania tych preferencji geometrycznych.

Przyglądając się kuponom zauważyliśmy, że w środku prawie zawsze więcej jest krzyżyków niż na brzegach. Wobec tego zbadaliśmy 4000 kuponów na częstość występowania wybranych liczb. Okazało się, że częstość poszczególnych liczb jest różna i wykazuje duże wahania. Tak np. na owych $5 \cdot 4000 = 20000$ numerów, numer 46 wystąpił 379 razy, numer 80 zaś tylko 98 razy. Jeśli założyć zupełną losowość wyboru liczb, to otrzyma się $20000/90 \approx 222$ jako oczekiwaną liczbę skreśleń każdego z numerów od 1 do 90.

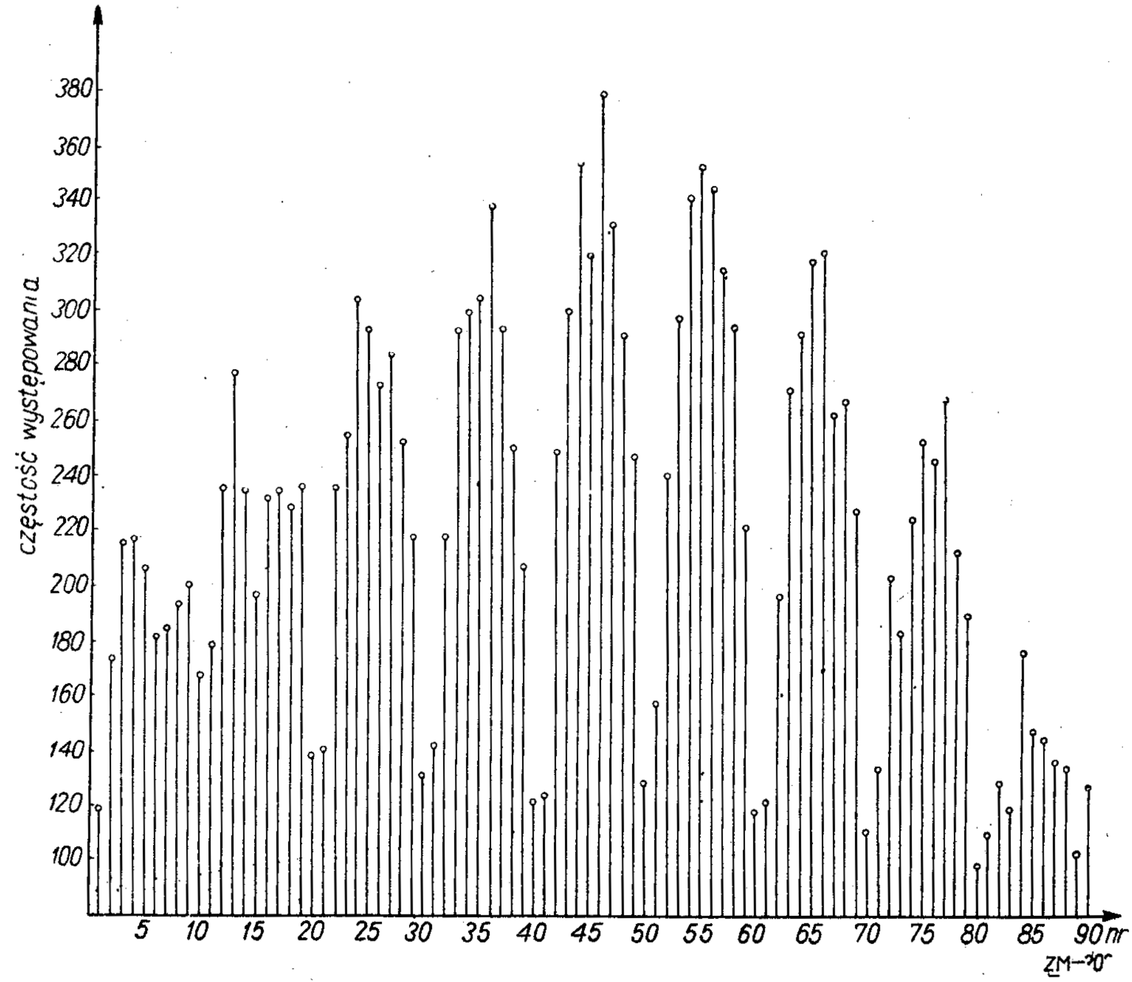
Częstości pojawienia się poszczególnych liczb zawiera tablica 4.

TABLICA 4

liczba	częstość występowania	liczba	częstość występowania	liczba	częstość występowania
1	119	31	142	61	121
2	173	32	217	62	196
3	215	33	293	63	271
4	217	34	299	64	292
5	206	35	305	65	318
6	181	36	338	66	321
7	184	37	293	67	262
8	193	38	249	68	267
9	200	39	206	69	227
10	167	40	122	70	111
11	178	41	124	71	133
12	235	42	248	72	202
13	277	43	300	73	182
14	234	44	354	74	224
15	196	45	320	75	252
16	231	46	379	76	245
17	234	47	331	77	268
18	228	48	291	78	212
19	235	49	246	79	189
20	138	50	128	80	98
21	140	51	157	81	109
22	235	52	239	82	128
23	254	53	297	83	119
24	304	54	341	84	175
25	293	55	352	85	147
26	273	56	344	86	144
27	284	57	315	87	136
28	252	58	294	88	134
29	217	59	221	89	103
30	131	60	118	90	127

Rozkład ten jest lepiej widoczny na wykresie (rys. 2); na osi odciętych są numery (od 1 do 90), a wysokość słupka pokazuje, ile razy dany numer został wybrany przez graczy.

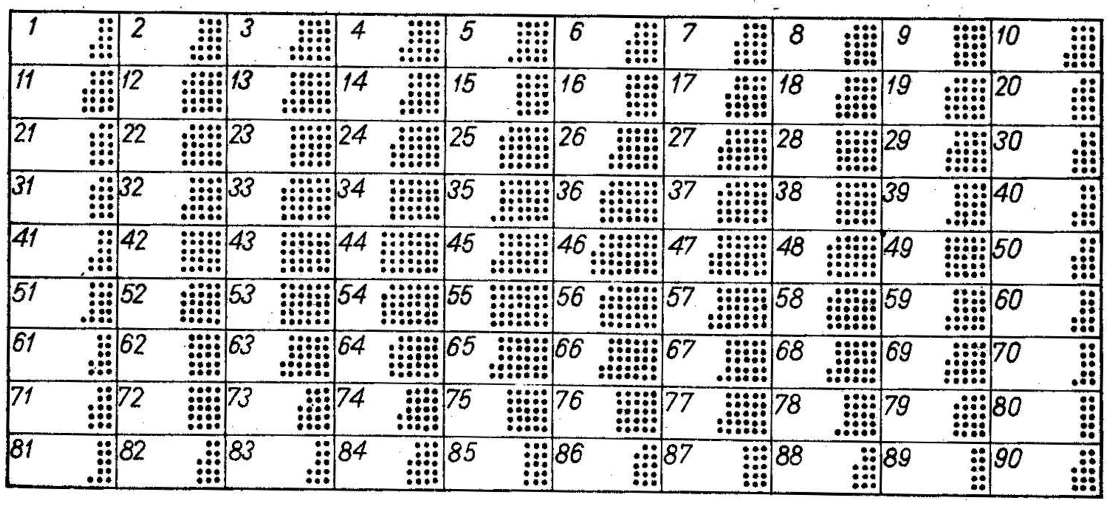
Widać także z rysunku, że wahania w częstościach mają dość regularny charakter. Występują lokalne minima i maxima: pierwsze przy liczbach 1, 10, 11, 20, 21, 30, 31, 40, 41, 50, 51, 60, 61, 70, 71, 80, 81, 90, drugie — około środka każdej dziesiątki. Drugą regularnością jest zmniejszanie się minimów przy przechodzeniu do coraz to większych liczb, a zwiększanie się maksimów przy posuwaniu się od brzegów do środka.



Rys. 2

Czym to objaśnić? Sprawa wyjaśni się natychmiast, gdy spojrzymy na kupon „Liczyrzepki". Tutaj, na przestrzennym wykresie częstości (rys. 3; jedna kropka odpowiada częstości 10), widać, że gracze chętniej stawiają na numery środkowe, a rzadziej na numery brzegowe. „Feralna" trzynastka wyłamuje się z tej zasady, przewyższając swoją częstością występowania sąsiednie numery.

Znając rozkład wyboru poszczególnych numerów można obliczyć prawdopodobieństwo pojawienia się danej piątki liczb na losowo wybranym kuponie. Będzie ono lepszym przybliżeniem prawdy, niż prawdopodobieństwo znalezienia danej piątki na kuponie przy założeniu losowego skreślania liczb (jednakowe częstości). Nie będzie ono jeszcze oczywiście uwzględniało preferencji, wypływającej z układów, ale tylko tę część preferencji, która wynika z nierównego traktowania liczb przez kolektyw graczy.



ZM-303

Rys. 3

Oznaczmy przez $p_1, p_2, \ldots, p_{90}$ prawdopodobieństwa wyboru liczb odpowiednio od 1 do 90. Wtedy prawdopodobieństwo znalezienia danej piątki liczb $i_1, i_2, \ldots, i_5$ na przypadkowo wybranym kuponie wynosi

$$P'(5) = \sum_{V} p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}} \cdot \frac{p_{i_3}}{1-(p_{i_1}+p_{i_2})} \times$$

$$\times \frac{p_{i_4}}{1-(p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3})} \cdot \frac{p_{i_5}}{1-(p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3}+p_{i_4})},$$

przy czym sumowanie jest rozciągnięte na zbiór V wszystkich permutacji wskaźników $i_1, \ldots, i_5$. Suma ta składa się więc z $5! = 120$ wyrazów.

Ponieważ w praktyce kwinterna trafiają się nader rzadko, więc pożyteczniejszy będzie odpowiedni wzór dla kwatern:

$$P'(4) = \sum_{T} p_{j_1} \frac{p_{j_2}}{1-p_{j_1}} \cdot \frac{p_{j_3}}{1-(p_{j_1}+p_{j_2})} \times$$

$$\times \frac{p_{j_4}}{1-(p_{j_1}+p_{j_2}+p_{j_3})} \cdot \frac{p_r}{1-(p_{j_1}+p_{j_2}+p_{j_3}+p_{j_4})},$$

gdzie $p_r = 1-(p_{i_1}+\ldots+p_{i_5})$ oznacza prawdopodobieństwo skreślenia liczby niewylosowanej w grze; sumowanie rozciąga się na zbiór T, obejmujący wszystkie permutacje j_1, j_2, j_3, j_4, r, gdzie j_1, j_2, j_3, j_4 są wszystkimi możliwymi kombinacjami po 4 z liczb i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, r zaś oznacza liczbę „niedobrą" (różną od $i_1, \ldots, i_5$). Suma będzie się więc składała z $\binom{5}{4}5! = 600$ wyrazów.

Praktycznie jest niemożliwe stosowanie tych wzorów do obliczenia oczekiwanej liczby kwintern czy kwatern w danej grze, przy uwzględnieniu preferencji do niektórych liczb. Stąd pomysł zastąpienia różnych p_{jk} w mianownikach ułamków przez średnią $p_S = \frac{1}{5}(p_{i_1} + \ldots + p_{i_5})$.

Wzór na kwinterna przyjmie taką postać

$$P(5) = \sum_S p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1-p_S} \cdot \frac{p_{i_3}}{1-2p_S} \cdot \frac{p_{i_4}}{1-3p_S} \cdot \frac{p_{i_5}}{1-4p_S} =$$

$$= 5!\, p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4} p_{i_5} \frac{1}{(1-p_S)(1-2p_S)(1-3p_S)(1-4p_S)}.$$

Oszacujmy maksymalny błąd względny

$$\frac{\Delta P(5)}{P(5)} = \Delta p_S \left(\frac{1}{1-p_S} + \frac{2}{1-2p_S} + \frac{3}{1-3p_S} + \frac{4}{1-4p_S} \right).$$

Największe odchylenie Δp_S otrzymamy dla piątek liczb: 80, 89, 70 81 i 46 oraz 46, 44, 55, 56 i 80. Wynoszą one odpowiednio 0,01095 i 0,01037. Ze względu jednak na to, że w drugim przypadku mianowniki są mniejsze (ułamki większe), wybieramy ten przypadek jako dający największy błąd. Z szacowania otrzymujemy błąd względny równy 10,5%.

Podobne średniowanie zastosujemy do kwatern. Otrzymamy

$$P^*(4) = 4!\, p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4} p_{i_5} p_r \left(\frac{1}{p_{i_1}} + \frac{1}{p_{i_2}} + \frac{1}{p_{i_3}} + \frac{1}{p_{i_4}} + \frac{1}{p_{i_5}} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(1-p_S)(1-2p_S)(1-3p_S)(1-4p_S)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{(1-p_S)(1-2p_S)(1-3p_S)\left(1-\left(3p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)} +$$

$$+ \frac{1}{(1-p_S)(1-2p_S)\left(1-\left(2p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)\left(1-\left(3p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)} +$$

$$+\frac{1}{(1-p_S)\left(1-\left(p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)\left(1-\left(2p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)\left(1-\left(3p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)}+$$

$$+\frac{1}{\left(1-\frac{p_r}{85}\right)\left(1-\left(p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)\left(1-\left(2p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)\left(1-\left(3p_S+\frac{p_r}{85}\right)\right)}\Bigg\}.$$

We wzorze tym przez p_S zastąpiliśmy tylko prawdopodobieństwo skreślenia liczb wylosowanych w grze (liczb „dobrych"), $p_r/85$ zaś oznacza oczekiwane prawdopodobieństwo skreślenia liczby niewylosowanej w grze („niedobrej" liczby). Ponieważ w najgorszym razie

$$\left|\frac{p_r}{85}-p_S\right|=\frac{1}{85}\left|1-18(p_{i_1}+\ldots+p_{i_5})\right|\leqslant\frac{1}{85}\cdot 0{,}6=0{,}007,$$

więc wobec największego $\Delta p_S = 0{,}01095$ błąd się nie zwiększy, jeśli z kolei zastąpimy $p_r/85$ przez p_S. Wzór będzie miał postać:

$$(*)\qquad P(4)=5!\,p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}p_{i_4}p_{i_5}p_r\left(\frac{1}{p_{i_1}}+\frac{1}{p_{i_2}}+\frac{1}{p_{i_3}}+\frac{1}{p_{i_4}}+\frac{1}{p_{i_5}}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{(1-p_S)(1-2p_S)(1-3p_S)(1-4p_S)},$$

gdzie $p_r = 1-(p_{i_1}+p_{i_2}+\ldots+p_{i_5})$. Szacowanie oczekiwanej liczby kwatern za pomocą tego wzoru nie przedstawia już większych trudności rachunkowych, a błąd względny nie przekracza, podobnie jak dla $P(5)$, $10{,}5\%$.

Wzór (*) pozwolił nam oszacować oczekiwaną liczbę kwatern dla 30 gier „Liczyrzepki". (Wyniki ilustruje tablica 5.)

TABLICA 5

nr gry	ilość grających	wylosowane liczby	ilość kwatern		
			faktyczna	teoretycznie oczekiwana	oszacowana z wzoru (A)
1	326135	34, 43, 46, 63, 84	2	3,2	7,9
2	700846	2, 20, 33, 35, 62	4	6,8	5,8
3	902229	18, 46, 69, 86, 87	4	8,7	7,1
4	1101309	35, 46, 48, 52, 55	27	10,6	41,4
5	1371127	12, 24, 36, 44, 68	117	13,3	43,8
6	1320665	3, 22, 43, 44, 45	10	12,8	33,3
7	1220798	6, 21, 26, 43, 59	8	11,8	10,8

TABLICA 5 (cd.)

nr gry	ilość grających	wylosowane liczby	ilość kwatern		
			faktyczna	teoretycznie oczekiwana	oszacowana z wzoru (*)
8	929007	9, 14, 23, 29, 57	21	9,0	12,6
9	924530	18, 24, 26, 44, 66	93	8,9	27,8
10	818713	10, 18, 43, 53, 59	1	7,9	10,6
11	798226	6, 7, 72, 79, 82	1	7,7	3,0
12	922116	29, 56, 65, 66, 82	4	8,9	15,5
13	827909	29, 44, 68, 70, 76	11	8,0	9,0
14	975658	3, 43, 61, 75, 83	5	9,4	5,2
15	860397	36, 55, 59, 73, 81	12	8,3	8,9
16	881093	1, 54, 60, 72, 75	1	8,5	4,9
17	898068	31, 65, 80, 88, 89	1	8,7	1,6
18	905281	6, 51, 52, 68, 79	5	8,8	6,2
19	957608	19, 26, 54, 79, 82	10	9,3	9,7
20	961408	1, 34, 53, 61, 74	8	9,3	6,1
21	942175	1, 13, 19, 39, 56	9	9,1	9,9
22	913134	41, 48, 55, 60, 76	4	8,8	7,2
23	979654	15, 23, 56, 57, 73	9	9,5	15,9
24	940605	7, 24, 38, 58, 61	9	9,1	9,0
25	957657	5, 18, 67, 82, 90	5	9,3	4,3
26	861722	22, 24, 32, 37, 58	10	8,3	17,5
27	872307	34, 41, 76, 82, 83	0	8,4	3,0
28	915841	8, 20, 22, 74, 78	3	8,9	5,6
29	898785	14, 43, 46, 51, 67	14	8,7	16,1
30	874038	5, 6, 15, 37, 61	3	8,5	4,9

Wystarczy pobieżnie przejrzeć tablicę 5, by zauważyć, że nasze oszacowanie oczekiwanej liczby kwatern dalekie jest od doskonałości. W niektórych grach rzeczywiście lepiej oddaje ona stan faktyczny, np. w grach nr 5, 9, 11, 16, 18, 25, 27, 29 lub 30, w innych grach jest wręcz doskonała (np. gry nr 14 i 17), ale są także gry, w których nasz wzór daje wyniki o wiele gorsze od prostego obliczenia oczekiwanej liczby kwatern. Jaskrawym tego przykładem jest gra szósta, w której wzór nasz daje trzy razy za dużo kwatern. Zjawisko to można jednak łatwo wytłumaczyć: w szóstej grze był sekwens 43-44-45. Jak już poprzednio powiedzieliśmy, sekwensów gracze nie lubią i wzór nasz tego nie uwzględnia. Z drugiej strony, właśnie same liczby 43, 44 i 45 są przez graczy często wybierane i wzór nasz przez to daje wynik o wiele za duży. To samo można powiedzieć o grze dwunastej, w której liczby 56, 65, 66 tworzą deseń geometryczny (kratki, odpowiadające tym liczbom na kuponie, stykają się ze sobą).

Szacowanie to z pewnością można by polepszyć, uwzględniając preferencje do par, trójek, czwórek i piątek liczb.

Czy z naszych rozważań wynika jakiś sposób dobrej gry?

Wydaje się, że tak. Trzeba wybierać na kuponie takie piątki liczb, których gracze nie lubią. Nie zwiększa się przez to wcale prawdopodobieństwo wygrania, ale kwota, przypadająca na wygrane zostanie podzielona pomiędzy małą ilość graczy, a przez to wygrana będzie większa; dzięki temu wzrasta nadzieja matematyczna. Nie znamy wprawdzie takich nielubianych przez graczy piątek liczb (poza — oczywiście — sekwensami), ale już rozkład częstości wybierania liczb przez graczy, przedstawiony wyżej, może trochę pomóc w grze.

Oczywiście korzystać z tej rady mogą tylko osoby, mające dostęp do starych kuponów gry *5 z 90*, lub czytelnicy niniejszego artykułu. Jej znaczenie praktyczne zmalało wobec tego, że wszędzie zarzuca się odmianę loterii *5 z 90*; zachowuje ona jednak wartość, jako przykład obserwacji psychiki kolektywu — część tej obserwacji zawiera się w diagramach, ale diagramy nie wyczerpują całego zjawiska.

Praca wpłynęła 3. 6. 1958

Б. ГЛЕЙХГЕВИХТ, Е. КУХАРЧИК, Г. ШТЕЙНХАУЗ (Вроцлав)

ЗАМЕЧАНИЯ О ЧИСЛОВЫХ ЛОТЕРЕЯХ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются существующие в Польше числовые лотереи, в особенности лотерея „Личижепка" распространенная в Нижней Силезии.

Приводятся вероятности отдельных выигрышей для всех рассматриваемых типов игр, а также распределения выбора чисел играющими на купонах „Личижепки" (рис. 2 и 3). Авторы приводят также приближенные формулы для вычисления вероятности того, что на случайно выбранном купоне окажется данная пятерка или четверка чисел при принятии во внимание распределения выбора чисел играющими. Эти формулы совпадают с практикой.

B. GLEICHGEWICHT, J. KUCHARCZYK, H. STEINHAUS (Wrocław)

REMARKS ON NUMBER LOTTOS

SUMMARY

The authors consider the number lottos existing in Poland, in particular the number lotto „Liczyrzepka" of Lower Silesia. They give the probabilities of the various winnings for all types of lottos under consideration and the distribution of numbers chosen by the players on the coupons of „Liczyrzepka" (figs. 2 and 3). The authors also give approximate formulas for finding the probability of given four or five numbers appearing on a coupon chosen at random, the distribution of numbers chosen by the players being taken into account. Those formulas are confronted with practice.
