

K. FLOREK (Wrocław)

*PEWNA METODA GRAFICZNEGO CAŁKOWANIA
I GRAFICZNEJ ANALIZY HARMONICZNEJ*

Pamięci Jana Zamorskiego

I. Wstęp i praktyczny opis metody. Pomimo intensywnego rozwoju i stosowania metod numerycznych wykres ciągle jest bardzo wygodnym sposobem przedstawiania funkcji, a więc proste metody graficznego rachunku są nadal ciekawe i użyteczne.

W pracy tej podajemy graficzną metodę znajdowania przybliżonej wartości całki

$$\int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx$$

dla funkcji $f(y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ spełniających pewne warunki, które podamy w dalszej części pracy. Osnową dla tej metody jest podział przedziału całkowania na takie podprzedziały (x_i, x_{i+1}) aby całki

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[y_2(x) - y_1(x)] dx \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

miały te same wartości.

W metodzie tej posługujemy się wykresami funkcji $y_1(x)$, $y_2(x)$ oraz wykrojem funkcji $f(y)$. Wykresy funkcji $y_1(x)$ i $y_2(x)$ wykonujemy w prostokątnym układzie współrzędnych (x, y) . Wykroj funkcji $f(y)$ sporządzamy np. z kartonu. Przedstawia on okienko o osi symetrii pokrywającej się z osią y -ów i o wewnętrznych brzegach opisanych w prostokątnym układzie współrzędnych (z, y) równaniami

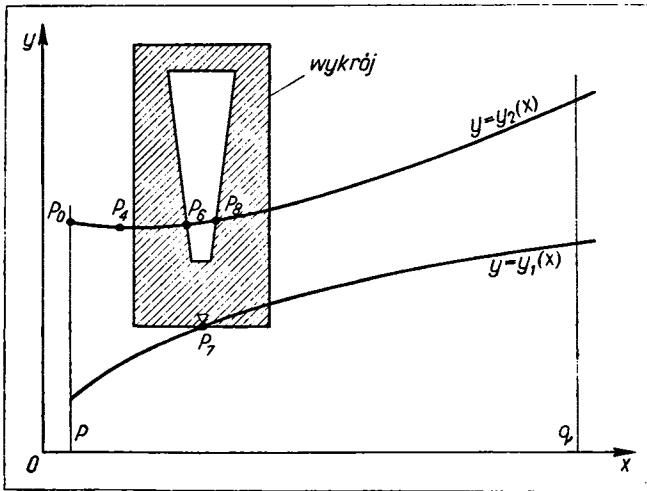
$$|z| = c/f(y); \quad y = b; \quad y = d.$$

Skale współrzędnych x wykresu i z wykroju, jak również skale y wykresu i wykroju mają być równe. Wykroj odgrywa rolę przymiaru w pomiarze odległości, stała c odgrywa rolę jednostki tego przymiaru. Punkt $y = 0$, $z = 0$ jest zaznaczony i leży na zewnętrznym brzegu wykroju. Umożliwia to łatwe ułożenie wykroju tym punktem na krzywej, rysunek 1.

Przystępując do pomiaru kładziemy wykres funkcji $y_2(x)$ na wykresie funkcji $y_1(x)$ tak, by układy współrzędnych były wspólne i wykres krzywej $y_2(x)$ nie zasłaniał krzywej $y_1(x)$.

Podczas postępowania, które nazywamy przez wspomnianą analogię pomiarem, wykroj utrzymujemy osią y -ów równoległe do osi y -ów wykresów. Możemy to łatwo zrealizować na rysownicy przymocowując wykroj do prowadnicy.

Pomiar przeprowadza się przez kolejne odkładanie wykroju na krzywych wykresów. Na krzywej $y_2(x)$ nakłuwamy ostrzem punkt P_0 o odciętej p . Ostrze znajduje się ponadto w okienku wykroju, który przesuwamy tak, by oparł się lewym brzegiem okienka o ostrze, a punktem



ZM-462

Rys. 1. Położenie wykroju na wykresie podczas pomiaru

$z = 0$, $y = 0$ leżał na krzywej $y_1(x)$. Punkt ten na krzywej $y_1(x)$ nazwiemy P_1 . Następnie unieruchamiając wykroj wbijamy ostrze na krzywej $y_2(x)$ przy prawym brzegu okienka wykroju w punkcie, który nazwiemy P_2 . W dalszym ciągu traktujemy punkt P_2 jak punkt P_0 . Iterując postępowanie znajdujemy kolejno punkty P_j dla $j = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$. Punkt P_n jest ostatnim, którego odcięta x_n nie przekracza $x = q$, $x_n \leq q$. Znajdujemy w ten sposób liczbę n . Liczbę r obliczamy ze wzoru

$$r = \frac{q - x_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

Mierzmy w tym celu odległość odciętych punktów P_n i P_{n+1} , równą $x_{n+1} - x_n$ oraz różnicę odciętej punktu P_n i $x = q$, równą $q - x_n$. Wzór

$$m = c(n+r) \approx \int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx$$

pozwała znaleźć liczbę m , będącą przybliżoną wartością całki.

Zauważmy, że nakłuwamy tylko punkty P_{2k} leżące na krzywej $y_2(x)$. Po nakłuciu punktu P_{2k} nie odrywamy ostrza od wykresu aż do ustawienia wykroju punktem $z = 0, y = 0$ w punkcie P_{2k+1} . Następnie wbijamy ostrze w punkcie P_{2k+2} na krzywej $y_2(x)$ wykresu i powtarzamy postępowanie. Postępowanie takie umożliwi puste wnętrze wykroju (okienko).

II. Oszacowanie przybliżenia. Będziemy się zajmowali funkcjami $y_1(x), y_2(x)$ oraz funkcją $f(y)$, spełniającymi warunki

- (1) $|y_l(x) - y_l(x')| \leq \mu_l |x - x'|$ dla $p \leq x, x' \leq q; l = 1, 2;$
- (2) $0 \leq b = \inf_{p \leq x, x' \leq q} [y_2(x) - y_1(x')], d = \sup_{p \leq x, x' \leq q} [y_2(x) - y_1(x')] < \infty;$
- (3) $y_l(x) = y_l(q)$ dla $x \geq q; l = 1, 2;$
- (4) $|f(y) - f(y')| \leq \nu |y - y'|$ dla $b \leq y, y' \leq d;$
- (5) $0 < e = \inf_{b \leq y \leq d} f(y), g = \sup_{b \leq y \leq d} f(y) < \infty.$

Oznaczmy: $f(x, x') = f(y_2(x) - y_1(x'))$.

LEMAT 1. Jeśli dla stałej c zachodzi relacja

$$(6) \quad 0 < c\nu \max(\mu_1, \mu_2)/e^2 < 1,$$

to dla każdego $x_j \geq p$ dwa równania

$$(7) \quad x_j - x_{j+1} + c/f(x_j, x_{j+1}) = 0,$$

$$(8) \quad x_j - x_{j+1} + c/f(x_{j+1}, x_j) = 0$$

mają jedno i tylko jedno rozwiązanie x_{j+1} .

Dowód. Rozpatrzmy równanie (7). Ponieważ zachodzą warunki (5), (2), (3) i $x_j \geq p$, to dla $x_{j+1} = x_j + c/e$ lewa strona równania (7) jest niedodatnia. Podobnie z warunków (5), (2) i (3) wynika, że dla $x_{j+1} = x_j + c/g$ lewa strona równania (7) jest nieujemna. Ponieważ spełnione są warunki (4), (1) i (3), więc dla $x_j + c/g \leq x_{j+1} \leq x_j + c/e$ lewa strona równania (7) jest funkcją ciągłą i na podstawie twierdzenia Darboux przyjmuje w tym przedziale wszystkie wartości od niedodatnich do nie-

ujemnych. Gdyby istniały dwa rozwiązania równania (7) x'_{j+1} i x''_{j+1} , to zgodnie z warunkami (1), (3), (4) i (6) otrzymalibyśmy

$$|x'_{j+1} - x''_{j+1}| = \left| \frac{c}{f(x_j, x'_{j+1})} - \frac{c}{f(x_j, x''_{j+1})} \right| \leq \frac{c\nu\mu_1}{e^2} |x'_{j+1} - x''_{j+1}| < |x'_{j+1} - x''_{j+1}|,$$

a więc sprzeczność. Analogicznie, dla każdego $x_j \geq p$ równanie (8) ma tylko jedno rozwiązanie x_{j+1} .

LEMAT 2. *Jeśli spełnione są założenia lematu 1, $x_0 = p$ i równanie (7) zachodzi dla x_j , j parzyste, a równanie (8) dla x_j , j nieparzyste, oraz liczba całkowita nieujemna n spełnia warunek*

$$(9) \quad 0 \leq r = \frac{q - x_n}{x_{n+1} - x_n} < 1,$$

to ciąg $\{x_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$, jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód. Z lematu 1 wynika, że przyjmując $x_0 = p$ jednoznacznie wyznaczamy za pomocą równania (7) x_1 , następnie z równania (8) jednoznacznie wyznaczamy x_2 . Iterując postępowanie otrzymujemy jednoznacznie wyznaczony rosnący nieskończony ciąg $\{x_j\}$. Ponieważ zachodzą warunki (5), (7) i (8), więc $x_{j+1} - x_j \geq c/g$, czyli istnieje takie $j_0 \leq g(q-p)/c$, że $x_{j_0} \geq q$, a $x_0 = p \leq q$. Relacja (9) daje $x_n \leq q < x_{n+1}$, istnieje więc jedno i tylko jedno takie n , $0 \leq n \leq j_0$, że mamy (9).

TWIERDZENIE 1. *Jeśli zachodzą założenia lematu 2, oraz*

$$(10) \quad m = c(n+r),$$

to mamy

$$(11) \quad \left| \int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx - m \right| \leq \frac{c\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2eg} [(e+g)(q-p) - m] \leq \\ \leq \frac{c\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2e} (q-p) \leq \frac{c\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2e^2} m.$$

Dowód. Dla

$$(12) \quad 0 < h \leq \chi \leq H$$

prawdziwa jest nierówność

$$(13) \quad (H-h)\chi^{l+1} - \chi(H^{l+1} - h^{l+1}) + Hh(H^l - h^l) \leq 0,$$

gdyż lewa strona tej nierówności jest wielomianem względem χ mającym dwa dodatnie pojedyncze rzeczywiste pierwiastki h i H , rosnącym wraz z χ nieograniczenie. Z nierówności tej skorzystamy również w dowodach dalszych twierdzeń. Oznaczmy $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$.

Na mocy lematu 2 równań (7) i (8) i warunków (9) oraz (10) znajdujemy

$$I = \left| \int_p^q f(x, x) dx - m \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, x) dx - nc + \int_{x_n}^q f(x, x) - c \frac{q-x_n}{\Delta_n} \right| \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f(x, x) - \frac{c}{\Delta_i} \right| dx + \int_{x_n}^q \left| f(x, x) - \frac{c}{\Delta_n} \right| dx.$$

Ponieważ spełnione są warunki (1) i (4), więc dla $|x'' - x'| = c/f(x'', x')$ mamy

$$\left| f(x, x) - \frac{c}{x'' - x'} \right| \leq \nu |y_2(x'') - y_1(x') - [y_2(x) - y_1(x)]| \leq \\ \leq \nu |y_1(x') - y_1(x)| + \nu |y_2(x'') - y_2(x)| \\ \leq \nu \mu_1 |x' - x| + \nu \mu_2 |x'' - x|.$$

Po scałkowaniu

$$\left| \int_{x'}^{x''} \left| f(x, x) - \frac{c}{|x'' - x'|} \right| dx \right| \leq \nu \int_{x'}^{x''} |x' - x| \mu_1 + |x'' - x| \mu_2 dx \\ \leq \frac{\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2} |x' - x''|^2.$$

Z założeń (7), (8) i (3) oraz ostatniej nierówności, otrzymujemy

$$I \leq \frac{\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^2 + (q - x_n)^2 \right].$$

Wobec (9), dostajemy

$$I \leq \frac{\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^2 + \Delta_n^2 r \right].$$

Podstawmy $\chi = \Delta_i$, na mocy nierówności (13), gdzie $l = 1$, oraz równań (7), (8), warunków (3), (5), (12) i (9) otrzymujemy

$$I \leq \frac{\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2} \left[\left(\frac{c}{e} + \frac{c}{g} \right) (x_n - p + \Delta_n r) - \frac{c^2}{eg} (n+r) \right] = \\ = \frac{c\nu(\mu_1 + \mu_2)}{2eg} [(e+g)(q-p) - c(n+r)].$$

Uwzględniając (10), oraz to, że

$$m = c \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta_i}{\Delta_i} + \frac{q-x_n}{\Delta_n} \right) \geq c(q-p) \frac{e}{c},$$

będziemy mieli (11).

TWIERDZENIE 2. *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 1 oraz*

$$(14) \quad |f'(y) - f'(y')| \leq \omega |y - y'| \quad \text{dla} \quad b \leq y, y' \leq d,$$

$$(15) \quad |y'_i(x) - y_i(x')| \leq \lambda_i |x - x'| \quad \text{dla} \quad p \leq x, x' \leq q; \quad i = 1, 2,$$

to zachodzi nierówność

$$(16) \quad \left| \int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx - m \right| \leq \\ \leq c^2 \{ (q-p)(As_4 + Bs_3) - m(As_3 + Bs_2) + D \} \leq \\ \leq c^2 \{ (q-p)(Ag^3 + Bg^2) + D \} \leq c^2 \left\{ \frac{m}{e} (Ag^3 + Bg^2) + D \right\},$$

gdzie

$$(17) \quad A = \frac{\nu^2}{g^3 e^3} \left(\mu_2^2 + \frac{\mu_2 \mu_1}{2} + \mu_1^2 \right); \quad B = \frac{\nu(\lambda_2 + \lambda_1) + \omega(\mu_2^2 + \mu_2 \mu_1 + \mu_1^2)}{2e^2 g^2}; \\ D = \frac{3\nu}{4e^2} (\mu_1 + \mu_2); \quad s_l = \frac{g^l - e^l}{g - e}.$$

Dowód. Na mocy lematu 2 wyznaczony jest jednoznacznie ciąg $\{x_j\}$ dla $j = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$. Niech x'' i x' przyjmują wartości $x'' = x_{2k}$ dla $x_{2k-1} \leq x < x_{2k+1}$ i $x' = q$ dla $x_n \leq x \leq q$, gdy $n = 2k+1$, $x' = x_{2k+1}$ dla $x_{2k} \leq x < x_{2k+2}$ i $x' = q$ dla $x_n \leq x \leq q$, gdy $n = 2k$, wówczas ponieważ (10), (9), (7) i (8) oraz (14) i (15) możemy lewą stronę nierówności (16) zapisać następująco:

$$I = \left| \int_p^q f(x, x) dx - m \right| = \left| \int_p^q dx \int_0^1 dz f'(z'', z') [y'_2(z'')(x - x'') - y'_1(z')(x - x')] \right|,$$

gdzie $z'' = x'' + z(x - x'')$, $z' = x' + z(x - x')$ oraz $f'(z'', z') = f'[y_2(z'') - y_1(z')]$. Rozbijając przedział całkowania i wprowadzając bezwzględną wartość pod sumę, otrzymujemy

$$(18) \quad I \leq I_0(0,1) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} I_i(-1,1) + I_n(-q,q) + I_n(-1,-2r) + I_{n+1}(-1,2r-2),$$

gdzie $\rho = \min(2r, 1)$ oraz

$$I_i(a, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \geq \beta, \\ \left| \int_0^1 dz \int_{x_i + a\delta_{i-1}}^{x_i + \beta\delta_i} f'(z'', z') [y'_2(z'')(x - x'') - y_1(z')(x - x')] dx \right|, \\ \delta_i = (x_{i+1} - x_i)/2. \end{cases}$$

Zmieniając sposób całkowania mamy

$$I_i(-a, a) = \left| \int_0^1 dz \int_0^a \varphi_2(i, z, t) - \varphi_1(i, z, t) dt \right| \leq \int_0^1 dz \int_0^a (|\varphi_2| + |\varphi_1|) dt,$$

gdzie dla $k = 1, 2$, $\sigma_{ki} = 1 - (-1)^{k+i}$,

$$\begin{aligned} \varphi_k(i, z, t) &= [t - \sigma_{ki}] [\delta_i^2 f'(u_2, u_1) y'_k(u_k) - \delta_{i-1}^2 f'(v_2, v_1) y'_k(v_k)], \\ u_k &= x_i + \delta_i [tz + \sigma_{ki}(1 - z)], \quad v_k = x_i - \delta_{i-1} [tz + \sigma_{ki}(1 - z)]. \end{aligned}$$

Korzystając z równań (7) i (8) możemy napisać

$$\begin{aligned} \varphi_k(i, z, t) &= \\ &= (t - \sigma_{ki}) \{ f'(x_i, x_i) y'_k(x_i) [f(u'_2, u'_1)/c - f(v'_2, v'_1)/c] (x_{i+1} - x_{i-1}) \delta_i \delta_{i-1} + \\ &+ \delta_i^2 [f'(u_2, u_1) (y'_k(u_k) - y'_k(x_i)) + y'_k(x_i) (f'(u_2, u_1) - f'(x_i, x_i))] - \\ &- \delta_{i-1}^2 [f'(v_2, v_1) (y'_k(v_k) - y'_k(x_i)) + y'_k(x_i) (f'(v_2, v_1) - f'(x_i, x_i))] \}, \end{aligned}$$

gdzie dla $k = 1, 2$, $u'_k = x_i + \delta_i \sigma_{ki}$ oraz $v'_k = x_i + \delta_{i-1} \sigma_{ki}$.

Na mocy warunków (5), (6), (1), (4) i z uwagi na to, że

$$|f(u'_2, u'_1) - f(v'_2, v'_1)| \leq \frac{\nu(x_{i+1} - x_{i-1})}{2} [\mu_2 \sigma_{2i} + \mu_1 \sigma_{1i}]$$

oraz $4^2 \delta_i \delta_{i-1} \leq (x_{i+1} - x_{i-1})^2$ otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} |\varphi_k(i, z, t)| &\leq |t - \sigma_{ki}| \{ (x_{i+1} - x_{i-1})^4 (\mu_2 \sigma_{2i} + \mu_1 \sigma_{1i}) \frac{\nu^2 \mu_k}{2^5 c} + \\ &+ (\delta_i^3 + \delta_{i-1}^3) [\nu \lambda_k (tz + \sigma_{ki}(1 - z)) + \mu_k \omega \mu_2 (tz + \sigma_{2i}(1 - z)) + \\ &+ \mu_k \omega \mu_1 (tz + \sigma_{1i}(1 - z))] \}. \end{aligned}$$

Podstawiając tę nierówność do oszacowania na $I_i(-a, a)$ i całkując otrzymujemy, dla $a \leq 2$,

$$\begin{aligned} I_i(-a, a) &\leq \frac{\nu^4 (x_{i+1} - x_{i-1})^4 a}{4^3 c} [\mu_2^2 \sigma_{2i} (4 - a) + 2\mu_2 \mu_1 a + \mu_1^2 \sigma_{1i} (4 - a)] + \\ &+ \frac{(\delta_i^3 + \delta_{i-1}^3) a}{6} [(\nu \lambda_2 + \omega \mu_2^2) |6\sigma_{2i} - a^2| + (\nu \lambda_1 + \omega \mu_1^2) |6\sigma_{1i} - a^2| + 12\mu_1 \mu_2 \omega a]. \end{aligned}$$

Z założeń (7), (8) i (5) wynika

$$\frac{kc}{g} \leq |x_{i+k} - x_i| \leq \frac{kc}{e},$$

co dla $\chi = 2\delta_i$ oraz dla $\chi = x_{i+1} - x_{i-1}$ daje warunek (12), więc zachodzi w obu przypadkach nierówność (13), a zatem otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_i(-a, a) &\leq \\ &\leq \frac{\nu^2 c^2 a}{2e^3 g^3 (g-e)} \left[[\sigma_{2i} \mu_2^2 + \sigma_{1i} \mu_1^2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{2}] [(x_{i+1} - x_{i-1})(g^4 - e^4) - 2c(g^3 - e^3)] + \right. \\ &+ \frac{ac^2}{2^3 e^3 g^3 (g-e)} \left[2\mu_2 \mu_1 \omega + (\nu \lambda_2 + \omega \mu_2^2) \left| \sigma_{2i} - \frac{\alpha^2}{6} \right| + (\nu \lambda_1 + \omega \mu_1^2) \left| \sigma_{1i} - \frac{\alpha^2}{6} \right| \right] \times \\ &\quad \left. \times [(x_{i+1} - x_{i-1})(g^3 - e^3) - 2c(g^2 - e^2)] \right]. \end{aligned}$$

Sumując te oszacowania i korzystając z (9) i (10) oraz

$$(g^{l+1} - e^{l+1})(x_{i+1} - x_i) - c(g^l - e^l) \geq 0$$

znajdujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} I_i(-1, 1) + I_n(-e, e) &\leq \\ &\leq \frac{\nu^2 c^2}{g^3 e^3 (g-e)} [(q-p)(g^4 - e^4) - m(g^3 - e^3)] \left(\mu_2^2 + \frac{\mu_2 \mu_1}{2} + \mu_1^2 \right) + \\ &+ \frac{c^2}{2e^2 g^2 (g-e)} [(q-p)(g^3 - e^3) - m(g^2 - e^2)] [\nu(\lambda_2 + \lambda_1) + \omega(\mu_2^2 + \mu_2 \mu_1 + \mu_1^2)]. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia (17), mamy zgodnie z (18)

$$(19) \quad I \leq I_0(0, 1) + (q-p)(As_4 + Bs_3)c^2 - m(As_3 + Bs_2)c^2 + \\ + I_n(-1, -2r) + I_{n+1}(-1, 2r-2).$$

Wprost z definicji oraz warunków (1) i (4) znajdujemy

$$\frac{I_{i+1}(-1, 0)}{I_i(0, 1)} \leq \frac{\nu(x_{i+1} - x_i)^2}{2 \cdot 4} [(1 + \sigma_{1i})\mu_2 + (1 + \sigma_{2i})\mu_1] \leq \frac{3\nu c^2}{2 \cdot 4e^2} (\mu_1 + \mu_2).$$

Ponieważ jedno z wyrażeń $I_n(-1, -2r)$ albo $I_{n+1}(-1, 2r-2)$ jest zerem, więc otrzymujemy

$$(20) \quad I_0(0, 1) + I_n(-1, -2r) + I_{n+1}(-1, 2r-2) \leq \frac{3\nu c^2}{4e^2} (\mu_1 + \mu_2) = c^2 D.$$

Ostatnia nierówność łącznie z (19) daje nam (16). Słabsze oszacowanie w (16) otrzymujemy po uwzględnieniu nierówności:

$$m \geq e(q-p); \quad \frac{g^{l+1} - e^{l+1}}{g-e} (q-p) - m \frac{g^l - e^l}{g-e} \leq (q-p)g^l \leq m \frac{g^l}{e}.$$

WNIOSEK 1. *Jeśli funkcje $y_1(x)$, $y_2(x)$, $f(y)$ i stała c spełniają założenia lematu 1, to postępowanie opisane w części I wyznacza m jednoznacznie.*

Rzeczywiście, gdy położymy wykroj punkt $y = 0$, $z = 0$ na punkcie P_{2k+1} wykresu, to punkt P_{2k} leży przy lewym brzegu wykroju, a punkt P_{2k+2} leży przy prawym brzegu wykroju. Wówczas odcięte punktów P_{2k} , P_{2k+1} , P_{2k+2} spełniają równania

$$\begin{aligned} x_{2k} &= x_{2k+1} - c/f[y_2(x_{2k}) - y_1(x_{2k+1})], \\ x_{2k+2} &= x_{2k+1} + c/f[y_2(x_{2k+2}) - y_1(x_{2k+1})]. \end{aligned}$$

Są to równania (7) i (8). Punkty P_{2k} , P_{2k+1} , P_{2k+2} są więc na mocy lematu 1 wyznaczone jednoznacznie. Ponieważ ponadto punkt P_0 ma odciętą $x = p$, liczba n spełnia warunek (9), a równania (7) i (8) są spełnione zgodnie z założeniami lematu 2, więc na mocy tego lematu liczba n wyznaczona jest jednoznacznie. Liczba r obliczona według opisu zawartego w części I spełnia relację (9), więc m podane przez opis i (10) jest wyznaczone jednoznacznie.

Uwaga 1. Jeśli funkcje $f(y)$, $y_2(x)$, $y_1(x)$ nie spełniają warunków (2) i (5), albo stałe e i g są małe dając złe oszacowania, możemy je przekształcić na funkcje spełniające wymagane założenia. Wartości poszukiwanych całek znajdujemy przez odjęcie odpowiednich poprawek.

III. Oszacowanie błędów.

TWIERDZENIE 3. *Niech m będzie wyznaczone, zgodnie z opisem w części I, wykrojem o stałej c spełniającej (6). Jeśli bezwzględne błędy przy wyznaczaniu punktów P_j , $j = 0, 1, \dots, n, n+1$, nie będą przekraczały*

- (a) *w dla odległości punktów P_{2k} od brzegu wykroju $|z| = c/f(y)$,*
- (b) *u dla odległości naktu punktów P_{2k} od krzywej $y = y_2(x)$,*
- (c) *t dla odległości punktów P_{2k+1} od krzywej $y = y_1(x)$,*
- (d) *s dla bezwzględnej wartości kąta pomiędzy osiami y -ów wykroju i wykresu,*

to błąd bezwzględny Δm , z dokładnością do błędów w, u, t, s pierwszego rzędu, będzie

$$\begin{aligned} (21) \quad \Delta m &\leq \frac{2}{c} \left[w + \frac{\mu_2 u}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \right] [m(e+g) - eg(q-p)] + \\ &+ 2v(u+t + \mu_1 s d)(q-p) + 2m\mu_2 s + 2cs \left\{ d + \frac{v}{eg} [(e+g)(q-p) - m] \right\}. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $y_{j\pm 1}$ będzie współrzędną na osi y -ów wykroju punktu $P_{j\pm 1}$ wykresu, gdy punkt $z = 0, y = 0$ wykroju leży w punkcie P_j . Wprowadzimy punkty P'_j na wykresie określone jak następuje: dla $j = 2k$, $P'_{2k} = P_{2k}$, oraz dla $j = 2k + 1$ punkt P'_j jest wyznaczony przez punkt $z = 0, y = (y_{j-1} + y_{j+1})/2$ wykroju, gdy punkt $z = 0, y = 0$ wykroju leży w punkcie P_j . Niech x'_j będzie odcięta punktu P'_j na wykresie. Dla błędu bezwzględnego $\Delta(x'_{2k} - x'_j)$ różnicy odciętych sąsiednich punktów P'_{2k} i P'_j , $|2k - j| = 1$, na podstawie opisu postępowania z części I i z (4), otrzymujemy

$$\Delta(x'_{2k} - x'_j) \leq \Delta x(a) + \Delta x(b) + \Delta x(d) + \frac{\nu}{c} |x'_{2k} - x'_j|^2 \Delta y(b, c, d), \quad |2k - j| = 1,$$

gdzie $\Delta x(a), \Delta x(b), \Delta x(d)$, są składowymi błędami spowodowanymi przez błędy (a), (b), (d). Ponieważ spełniony jest warunek (1), więc zachodzą nierówności

$$\Delta x(a) \leq w; \quad \Delta x(b) \leq \frac{u\mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}; \quad \Delta x(d) \leq s\mu_2 |x'_j - x'_{2k}|.$$

$\Delta y(b, c, d)$ jest bezwzględnym błędem wyznaczenia rzędnej punktu P_{2k} w układzie współrzędnych na wykroju. Przedstawmy go w składowych

$$\Delta y(b, c, d) \leq \Delta y(b) + \Delta y(c) + c\Delta y(d') + \Delta y(d''),$$

gdzie $\Delta y(b), \Delta y(c), \Delta y(d) = \Delta y(d') + \Delta y(d'')$ są składowymi błędami spowodowanymi błędami (b), (c) i (d). Ponieważ zachodzi (1) i (2), mamy

$$\begin{aligned} \Delta y(b) &\leq u, & \Delta y(c) &\leq t, \\ \Delta y(d') &\leq \mu_1 s |y_2(x'_{2k}) - y_1(x'_j)| \leq \mu_1 s d, \\ \Delta y(d'') &\leq s |x'_{2k} - x'_j| \quad \text{dla} \quad |2k - j| = 1. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc dla błędu bezwzględnego

$$\begin{aligned} (22) \quad \Delta(x'_{2k} - x'_j) &\leq w + \frac{u\mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} + s\mu_2 |x'_{2k} - x'_j| + \\ &+ \frac{\nu}{c} (u + t + \mu_1 s d) |x'_{2k} - x'_j|^2 + \frac{s\nu}{c} |x'_{2k} - x'_j|^3, \quad |2k - j| = 1. \end{aligned}$$

Niech x_j będzie odcięta punktu P_j , a x'_j jak poprzednio odcięta punktu P'_j . Błąd różnicy tych odciętych dla j nieparzystych zgodnie z (d) i (2) będzie

$$(23) \quad \Delta(x'_j - x_j) \leq s \frac{y_{j-1} - y_{j+1}}{2} \leq s d.$$

Dla błędu bezwzględnego pomiaru, zgodnie z (10) i (20), mamy

$$\begin{aligned} \Delta m &= \Delta [c(n+r)] = c\Delta \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x'_{i+1} - x'_i}{x'_{i+1} - x'_i} + \frac{q - x_n}{x_{n+1} - x_n} \right] \leq \\ &\leq 2c \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta(x'_{i+1} - x'_i)}{x'_{i+1} - x'_i} + cr \frac{\Delta(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1} - x_n} + c \frac{\Delta(q - x_n)}{x_{n+1} - x_n} \leq \\ &\leq 2c \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta(x'_{i+1} - x'_i)}{x'_{i+1} - x'_i} + cr \frac{\Delta(x'_{n+1} - x'_n) + \Delta(x_k - x'_k)}{x_{n+1} - x_n} + c \frac{\Delta(x'_k - x_k)}{x_{n+1} - x_n} \leq \\ &\leq 2c \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta(x'_{i+1} - x'_i)}{x'_{i+1} - x'_i} + 2cr \frac{\Delta(x'_{n+1} - x'_n)}{x_{n+1} - x_n} + 2c \frac{\Delta(x'_k - x_k)}{x_{n+1} - x_n}, \end{aligned}$$

gdzie $k = n$ dla n nieparzystych i $k = n + 1$ dla n parzystych.

W dalszym ciągu rozważymy wyrażenia (22) i (23), przyjmując $x'_{i+1} - x'_i = x_{i+1} - x_i$. Pominęliśmy w ten sposób błędy wyższych rzędów niż pierwszego, ze względu na s, w, u, t . Stąd łatwo wynika

$$\begin{aligned} \Delta m &\leq \left[w + \frac{\mu_2 u}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \right] \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2s}{x_{i+1} - x_i} + \frac{2rc}{x_{n+1} - x_n} \right] + 2c(n+r)\mu_2 s + 2c ds + \\ &+ 2v(u+t + \mu_1 s d)(q-p) + 2vs \left[\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 + r(x_{n+1} - x_n)^2 \right]. \end{aligned}$$

Z (5) mamy

$$\frac{c}{g} \leq x_{i+1} - x_i \leq \frac{c}{e},$$

korzystając więc z nierówności (13), otrzymujemy (21).

WNIOSEK 2. *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3, to zachodzi nierówność*

$$\begin{aligned} (24) \quad \left| \int_p^q f(x, x) dx - m \right| &\leq \frac{2}{c} \left[w + \mu_2 \frac{u}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \right] [m(e+g) - eg(q-p)] + \\ &+ 2v(u+t + \mu_1 s d)(q-p) + 2\mu_2 sm + \\ &+ c \left\{ 2ds + \frac{2vs}{eg} [(e+g)(q-p) - m] + \frac{v(\mu_1 + \mu_2)(q-p)}{2e} \right\}, \end{aligned}$$

ponadto jeśli dla

$$(25) \quad c' = (vs)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{v} + (q-p) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{e} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{ges} \right) - \frac{m}{eg} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times [m(e+g) - eg(q-p)]^{-\frac{1}{2}} \left(w + \frac{\mu_2 u}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

zachodzi warunek (6), to c' jest „optymalnym”, to znaczy prawa strona nierówności (24) osiąga dla niego kres dolny.

Dla pomiaru wykonanego w sposób dokładny według opisu zachodzi lemat 1, a więc i twierdzenie 1. Niech m' będzie wynikiem dokładnego pomiaru. Dla pomiaru wykonanego w sposób niedokładny zachodzi twierdzenie 3. Niech m będzie wynikiem tego pomiaru. Dla m' i m , mamy

$$\left| \int_p^q f(x, x) dx - m \right| \leq \left| \int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx - m' \right| + |m - m'|.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1 i twierdzeniem 3 będzie

$$\left| \int_p^q f(x, x) dx - m' \right| \leq \frac{cv(\mu_1 + \mu_2)}{2e} (q-p); \\ |m - m'| \leq \frac{2}{c} \left[w + \frac{\mu_2 u}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \right] [m(e+g) - eg(q-p)] + 2v(u+t + \mu_1 sd) + \\ + 2\mu_2 sm + 2cs \left\{ d + \frac{v}{eg} [(e+g)(q-p) - m] \right\}.$$

Wstawiając ostatnie nierówności do poprzedniej, otrzymujemy (24). Prawa strona nierówności (24) jest dla $0 < c < \infty$ funkcją różniczkowalną nieujemną i nieograniczenie rosnącą, gdy c dąży do 0 lub ∞ , więc dla kresu dolnego pochodna jej musi być równa zero. Wprowadzając odpowiednie oznaczenia dla nierówności (24) możemy napisać

$$\left| \int_p^q f(x, x) dx - m \right| \leq \frac{\alpha}{c} + \beta + \gamma c;$$

warunek na znikanie pochodnej będzie

$$\gamma = \alpha/c^2,$$

czyli, zgodnie z (6), dla $c > 0$ mamy

$$c = \sqrt{\gamma/\alpha}.$$

Wobec tego istnieje tylko jeden punkt, w którym pochodna prawej strony nierówności (24) jest równa zero, jest to więc punkt, w którym prawa strona nierówności (24) osiąga kres dolny. Podstawiając właściwe wartości na γ i α otrzymujemy (25).

Uwaga 2. Dokładne dopasowanie do pomiaru „optymalnego” jest nieuzasadnione, bowiem do jego wyznaczenia opieramy się na wartościach w , u , t i s określonych na ogół bardzo orientacyjnie. Podobnie do „optymalnego” c , można określić „optymalną” ilość przyłożeń wykroju i wygodnie jest by liczba przyłożeń zawierała się pomiędzy kilkunastu do kilkudziesięciu.

Uwaga 3. Nawijając do uwagi 1 zauważmy, że przez dodanie stałych dobranych do funkcji, możemy poprawić oszacowania przybliżenia całek i błędów metody.

IV. Zastosowania i modyfikacje.

1. Czas przebycia drogi. Niech będzie dany wykres szybkości $v(x)$ ciała w punkcie x . Celem znalezienia czasu T przebycia drogi od punktu $x = p$ do punktu $x = q$, przyjmujemy

$$y_2(x) = v(x), \quad y_1(x) = 0, \quad f(y) = 1/y.$$

Korzystamy z wykroju funkcji $f(y)$ o stałej c i znajdujemy, zgodnie z opisem podanym w części I, m_1 , dla którego zachodzi warunek

$$m_1 = c(n_1 + r_1) \approx \int_p^q \frac{dx}{v(x)} = T.$$

2. Metoda graficznego całkowania. Niech będzie dany wykroj funkcji $f(x) = y$ o stałej c , oraz wykresy funkcji $y_2(x)$ i $y_1(x) = 0$. Postępujemy według opisu pomiaru znajdując liczbę

$$m_2 = c(n_2 + r_2) \approx \int_p^q y_2(x) dx = J.$$

3. Graficzne całkowanie kwadratu funkcji. Niech będzie dany wykroj funkcji $f(y) = y^2$ o stałej c , oraz wykresy funkcji $y_2(x)$ i $y_1(x) = 0$; znajdujemy m_3

$$m_3 = c(n_3 + r_3) \approx \int_p^q [y_2(x)]^2 dx = L.$$

4. Metoda graficznej analizy harmonicznej. Mając wykroj funkcji $f(y) = y^2$ o stałej c , oraz wykresy funkcji $y_2(x)$ i $y_1(x) = \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi kx}{q-p}$ znajdujemy liczbę m_{ck}

$$m_{ck} = c(n_{ck} + r_{ck}) \approx \int_p^q \left[y_2(x) - \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi kx}{q-p} \right]^2 dx = C_k.$$

Mając wykres funkcji $y_1 = \frac{1}{k} \sin \frac{2\pi kx}{q-p}$ znajdujemy m_{sk}

$$m_{sk} = c(n_{sk} + r_{sk}) \approx \int_p^q \left[y_2(x) - \frac{1}{k} \sin \frac{2\pi kx}{q-p} \right]^2 dx = S_k.$$

Współczynniki szeregu Fouriera obliczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{1}{2k} + k \frac{L - C_k}{q-p} \approx \frac{1}{2k} + k \frac{m_3 - m_{ck}}{q-p},$$

$$b_k = \frac{1}{2k} + k \frac{L - S_k}{q-p} \approx \frac{1}{2k} + k \frac{m_3 - m_{sk}}{q-p}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

gdzie L oraz m_3 są wyznaczone jak w punkcie 3. Współczynnik Fouriera a_0 znajdujemy jak w punkcie 2,

$$a_0 = \frac{J}{q-p} \approx \frac{m_2}{q-p}.$$

Należy zauważyć, że metoda ta daje rosnące błędy dla wyższych współczynników szeregu Fouriera. Niech, zgodnie z wnioskiem 2, ΔL będzie oszacowaniem błędu dla L , a ΔF będzie oszacowaniem błędu dla C_k , albo S_k , które, jak widać ze wzoru (24), będą jednakowe jeśli przyjmiemy

$$m = \max_{l \leq k} (m_{ck}, m_{sk}), \quad b = \inf_{p \leq x \leq q} (y_2(x) - 1), \quad d = \sup_{p \leq x \leq q} (y_2(x) + 1).$$

Oszacowanie błędu k -tego współczynnika Fouriera Δ_k znajdujemy na podstawie wzorów dla a_k i b_k

$$\Delta_k \leq k \frac{\Delta L + \Delta F}{q-p}.$$

5. Druga metoda analizy harmonicznej. Korzystamy z wykroju funkcji $f(y) = (y-a)^2 + h$ o stałej c , oraz wykresów funkcji $y_2(x)$ i $y_{1,l,k}(x) = a(k) \cos \left(\frac{2\pi k(x-p)}{q-p} + \frac{l\pi}{2} \right)$ w przedziale $p \leq x \leq q$, albo funkcji $y_{1,k} = a(k) \cos \frac{2\pi kx}{q-p}$ w odpowiednio zmienionym przedziale.

Znajdujemy liczby

$$m_{l,k} = c(n_{lk} + r_{lk}) \approx \int_p^q [(y_2(x) - y_{1,l,k}(x) - a)^2 + h] dx$$

dla $l = 0, 1, 2, 3$, oraz $k = 0, 1, 2, \dots$

Współczynniki szeregu Fouriera

$$y_2(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k(x-p)}{q-p} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi k(x-p)}{q-p}$$

obliczamy ze wzorów

$$a_k = \frac{m_{2k} - m_{0k}}{2\alpha(k)(q-p)}, \quad b_k = \frac{m_{1k} - m_{3k}}{2\alpha(k)(q-p)}.$$

Przedstawiona metoda, przy zastosowaniu wykresów i wykroju, opisanych w punkcie 4, daje co najmniej dwukrotnie mniejsze błędy, jednak wymaga prawie dwukrotnie więcej pomiarów. Dowolne stałe a i h występujące w funkcji wykroju, oraz odpowiednio dobrane do funkcji $y_2(x)$, pozwalają zmniejszyć oszacowanie błędu. Wydaje się, że celem uzyskania najlepszej dokładności trzeba ciąg $a(k)$ dobrać tak, by zachowywał się w przybliżeniu jak współczynniki Fouriera analizowanej funkcji.

6. Modyfikacja metody dla układu biegunowego. Przyjmijmy nowe założenia dotyczące wykresu i wykroju. Niech krzywa $y = y_2(x)$ będzie wykreślona w biegunowym układzie współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem, a y promieniem. Niech również wykroj funkcji $f(y)$ o stałej c będzie wykonany w biegunowym układzie współrzędnych (z, y) , gdzie z jest argumentem, a y promieniem. Wyznaczamy na krzywej $y = y_2(x)$ punkty P_k dla $k = 0, 1, 2, \dots, n_0, n_0 + 1$. Niech punkt P_0 ma argument $x_0 = p$. Przykładamy wykroj do wykresu tak, by pokrywały się bieguny ich układów współrzędnych, oraz punkt P_k leżał na lewym brzegu, a P_{k+1} na prawym brzegu okienka wykroju. Punkt P_{n_0} będzie ostatnim dla którego argument $x_{n_0} \leq q$. Znajdujemy w ten sposób liczby n_0 i $r_0 = (q - x_{n_0}) / (x_{n_0+1} - x_{n_0})$, a następnie

$$m_0 = 2c(n_0 + r_0) \approx \int_p^q yf[y_2(x)]dx.$$

Niech wykres krzywej zamkniętej $y_2(x)$ obejmuje biegun, obierzmy wykres funkcji $f(y) = y/2$. Pomiar od $x = 0$ do $x = 2\pi$ dla tego przypadku daje wielkość powierzchni objętej przez krzywą $y_2(x)$.

7. Modyfikacja metody do szacowania całki. Niech wykroj będzie wykrojem niesymetrycznym o okienku ograniczonym przez $z = 0$ i $z = c/f(y)$. Dokonując pomiaru takim wykrojem w przedziale $p \leq x \leq q$, dla którego funkcja $f[y_2(x) - y_1(x)]$ jest monotoniczna, otrzymujemy wynik pomiaru m' , następnie dokonujemy pomiaru tym samym wykrojem lecz obróconym na drugą stronę, to jest z okienkiem ograniczonym przez

funkcje $z = 0$ i $z = -c/f(y)$, znajdujemy m'' i niech $m' \leq m''$, wówczas mamy

$$m' \leq \int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx \leq m'',$$

m' i m'' są po prostu odpowiednio dolnymi i górnymi sumami tej całki o punktach podziału x_i .

8. Przystosowanie metody do rachunku numerycznego. Najprostsza w użyciu numerycznym jest modyfikacja metody z niesymetrycznym wykrojem. Niech funkcja $f(x, x) = f[y_2(x) - y_1(x)]$ będzie monotoniczna w przedziale $p \leq x \leq q$. Oszacowanie całki

$$\int_p^q f(x, x) dx$$

znajdujemy licząc operacje, które są obliczaniem kolejnych wartości $z_i = c/f(x_i, x_i)$, gdzie $x_0 = p$, $x_{i+1} = x_i + z_i$ od $i = 0$ do $i = n$, dla których mamy

$$0 \leq r = \frac{q - x_n}{x_{n+1} - x_n} < 1.$$

Jeśli $f(x)$ jest funkcją niemalejącą znajdujemy

$$c(n+r) = m' \leq \int_p^q f(x, x) dx.$$

Oszacowanie z góry znajdujemy dla funkcji nierosnącej. Oba oszacowania znajdujemy dla danej całki zmieniając znak argumentu funkcji.

Uwaga 4. Przedstawiona metoda graficznego postępowania jest dosyć bogata co do możliwości rachunkowych, pozwala korzystać w różnych rachunkach z tych samych wykresów funkcji, dobierając jedynie odpowiednio wykroje, oraz używać tych samych wykrojów przy różnych funkcjach. Dzięki tym właściwościom metoda ta zmniejsza poważnie pracę wykreślną jaką się spotyka w innych metodach graficznych. Jeszcze większą wygodę w użyciu tej metody dałoby produkowanie przez przymysł wykrojów dla pewnych typowych funkcji.

K. ФЛЪОРЕК (Вроцлав)

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ
И ГРАФИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

РЕЗЮМЕ

В статье указывается метод графического нахождения интеграла

$$\int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

Он состоит в том, что интервал интегрирования делится на части (x_i, x_{i+1}) на которых величины интегралов

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[y_2(x) - y_1(x)] dx \approx c \quad \text{при } i = 0, 1, \dots, n$$

приблизительно постоянны. Это делается с помощью шаблона (черт. 1), который прикладывается к графику функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соблюдая параллельность прямоугольных сторон шаблона к соответственным осям x и y графика, при чем так, чтобы на кривой $y_1(x)$ точка P_i с абсциссой x_i совпадала с центральной точкой нижней стороны шаблона. Точки P_{i-1} и P_{i+1} находятся тогда на кривой $y_2(x)$ и на внутренней границе шаблона, описываемой кривой $|z| = c/f(y)$. Если выполняются (1)-(9), то указанный выше процесс однозначно определяет (10) и справедлива теорема 1, т. е. оценка (11). Если кроме того выполняется (14) и (15), то справедлива теорема 2, т. е. оценка (16). Теорема 3 дает оценку ошибок, происходящих от неточности измерения (прикладываний шаблона).

В четвертой части статьи указаны применения и видоизменения метода, а именно:

- 1) Определение времени прохождения пути при данном графике скорости;
- 2) и 3) Нахождение интеграла функции и интеграла квадрата функции;
- 4) и 5) Нахождение коэффициентов разложения по ортонормальным функциям;
- 6) Видоизменение метода в случае полярной системы координат;
- 7) Видоизменение метода для оценки интеграла;
- 8) Видоизменение метода для численных вычислений.

K. FLOREK (Wrocław)

**ON A CERTAIN METHOD OF GRAPHICAL INTEGRATION
AND GRAPHICAL HARMONIC ANALYSIS**

SUMMARY

The paper presents a method of graphical computation of the integral

$$\int_p^q f[y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

The integration is performed by partitioning the interval of integration into subintervals (x_i, x_{i+1}) such that

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[y_2(x) - y_1(x)] dx \approx c \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n,$$

is approximately constant. This is attained by preparing a stencil (fig. 1) and placing it on the graph of functions $y_1(x)$ and $y_2(x)$ so that its outer sides are parallel to the axes x and y of the graph, with additional condition that the point P_i of the curve $y_1(x)$ with the abscissa x_i lies at the middle of the lower side of the stencil. The points P_{i-1} and P_{i+1} lie on the curve $y_2(x)$ and on the inner edges of the stencil described by the curve $|z| = c/f(y)$. If the conditions (1) to (9) are satisfied, then the described procedure determines uniquely (10), and Theorem 1, hence estimate (11), holds. If, in addition, we have (14) and (15), then also Theorem 2, or the estimate (16) holds. Theorem 3 gives the estimates of errors due to inaccuracies of graphical readings.

Chapter IV presents applications and modifications of the method, namely:

- 1) computation of time needed for a certain path when the graph of velocity is given;
- 2) and 3) computation of the integral and the integral of the square of the function;
- 4) and 5) computation of the coefficients of expansion with respect to an orthonormal system;
- 6) modification of the method for polar coordinates;
- 7) modification of the method for estimation of the integral;
- 8) modification of the method for the numerical analysis.