ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 4 (1968)

D. RASCH (Dummerstorf) und R. RAUSCHENBACH (Berlin)

DIE EFFIZIENZ VERSCHIEDENER VERFAHREN ZUR SCHÄTZUNG DES NICHTLINEARITÄTSPARAMETERS DER FUNKTION $\eta(x) = a+\beta\exp(\gamma x)$

0. Zusammenfassung.

Effizienz hinsichtlich der Maximum-Likelihood-Methode und Erwartungstreue von linearen und quadratischen Quotientenschätzfunktionen (einschliesslich der Hartleyschen internen Regression), der Trapezsummenmethode und der logarithmischen Methode zur Schätzung der Parameter β und γ wurden für 9 Parameterkombinationen (β, γ) mit Hilfe von Simulationen abgeschätzt. Für eine Parameterkombination wurden Effizienz und Erwartungstreue auch für ein nomographisches Verfahren angegeben. Das logarithmische Verfahren erwies sich als wenig effizient und erwartungstreu. Die effizientesten Verfahren waren die interne Regression, die Trapezsummenmethode und die nomographische Methode.

1. Einführung.

Die Funktion $\eta(x) = a+\beta e^{\gamma x}$ wird häufig als Ausgleichsfunktion für solche Zusammenhänge verwendet, deren Kurven ein asymptotisches Verhalten zeigen und keinen Wendepunkt besitzen. Solche Verhältnisse liegen beispielsweise beim postnatalen Wachstum der meisten Haustiere, bei der Abhängigkeit des Ertrages von der Nährstoffmenge (Mitscherlichfunktion) und bei bestimmten Produktionsfunktionen vor. Allen praktischen Fällen ist gemeinsam, daß zu vorgegebenen Werten $x_1, \ldots, x_n$ $(x_i \geqslant 0)$ der Regressorvariablen x Beobachtungswerte $y_1, \ldots, y_n$ vorliegen. Man unterstellt, daß die Beobachtungswerte y_i um ε_i von den Funktionswerten $\eta_i = \eta(x_i)$ abweichen, wobei die ε_i Realisationen von Zufallsvariablen ε_i^*, die den Erwartungswert Null und die gleiche Varianz σ^2 haben sind. Die ε_i^* werden als voneinander unabhängig vorausgesetzt. Folglich postuliert man für die y_i die Modellgleichung

(1) $$y_i = a+\beta e^{\gamma x_i}+\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \gamma < 0)$$

mit den Nebenbedingungen

$$E(\varepsilon_i^*) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_i^*) = \sigma^2 \quad \text{für alle} \quad i,$$

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Es soll darüber hinaus vorausgesetzt werden, daß die ε_i^* normalverteilt sind. Aus den n Wertepaaren (x_i, y_i) gilt es, die Parameter α, β und γ zu schätzen. Ist über die Art der Verteilung der ε_i^* nichts bekannt, so schätzt man die Parameter am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, kennt man dagegen die Verteilung der ε_i^*, so ist die Maximum-Likelihood-Methode ein geeignetes Schätzungsprinzip. Für den vorliegenden Fall, daß die ε_i^* normalverteilt sind, führen beide Verfahren zu den gleichen Ergebnissen. Schätzwerte $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ wählt man nach der Methode der kleinsten Quadrate, so daß der Ausdruck

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} e^{\hat{\gamma} x_i})^2 \tag{2}$$

ein Minimum wird. Die Schätzwerte, für die S zum Minimum wird, werden mit a, b bzw. c bezeichnet; sie sind die Maximum-Likelihood-Schätzwerte (MLS). Die MLS erhält man aus

$$a = \frac{1}{n} G - \frac{b}{n} A, \tag{3}$$

$$b = \frac{L - \frac{1}{n} GB}{D - \frac{1}{n} AB} \tag{4}$$

bzw.

$$\left(F - \frac{GA}{n}\right)\left(D - \frac{AB}{n}\right) - \left(C - \frac{A^2}{n}\right)\left(L - \frac{GB}{n}\right) = f(c) = 0. \tag{5}$$

Hierbei und im folgenden bedeuten

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n} e^{cx_i}; & B &= \sum_{i=1}^{n} x_i e^{cx_i}; & C &= \sum_{i=1}^{n} e^{2cx_i}; & D &= \sum_{i=1}^{n} x_i e^{2cx_i}; \\ E &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 e^{2cx_i}; & F &= \sum_{i=1}^{n} y_i e^{cx_i}; & G &= \sum_{i=1}^{n} y_i; & L &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i e^{cx_i}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Gleichungen (3)-(5) erhält man durch Umformungen aus den Normalgleichungen, die entstehen, wenn man die partiellen Ableitungen von S nach $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ bzw. $\hat{\gamma}$ gleich Null setzt. Aus (5) kann c nur approximativ bestimmt und damit können auch für a und b nur Näherungswerte angegeben werden. Näherungswerte für c kann man aus (5) iterativ durch irgendein Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Funktionen berechnen. Wie unsere Erfahrungen zeigten, konvergiert z. B. das Newtonsche Verfahren sehr schlecht, wenn nicht gute Ausgangswerte für die Iteration zur Verfügung stehen. Für äquidistante x_i wurden von verschiedenen Autoren Tabellen angegeben, mit deren Hilfe die Normalgleichungen für ein leicht modifiziertes Problem näherungsweise gelöst werden können. Diese Tabellen können auch für den hier beschriebenen Fall Verwendung finden ([2], [4], [5], [6], [11], [12], [13]).

Neben der Maximum-Likelihood-Methode gibt es Schnellverfahren zur Schätzung von α, β und γ, die einfacher zu handhaben und mit Tischrechenmaschinen durchführbar sind, deren Schätzwerte jedoch eine größere Varianz aufweisen als die MLS. Die wichtigsten dieser Verfahren werden in Abschnitt 2 kurz beschrieben. Der Sinn dieser Arbeit ist, eine Aussage darüber zu erhalten, wie stark die Varianzen der Schätzwerte nach den einzelnen Schnellverfahren von der Varianz der MLS abweichen. Zu diesem Zweck wurden Simulationsexperimente durchgeführt, die in Abschnitt 3 beschrieben werden.

2. Schnellmethoden zur Schätzung der Parameter α, β und γ.

2.1. Linearisierung durch Logarithmieren. In zahlreichen Lehrbüchern der Statistik wird vorgeschlagen, die Funktion $\eta_1(x) = \eta(x) - \alpha$ bzw. bei unbekannten α, aber vorliegendem Schätzwert a die Funktion $\hat{\eta}_1(x) = \eta(x) - a$ zu logarithmieren und für $\ln \eta_1(x)$ bzw. $\ln \hat{\eta}_1(x)$ ein neues Regressionsmodell

$$\ln y_i' = \ln \beta + \gamma x_i + \varepsilon_i \tag{7}$$

anzusetzen. Die Schätzwerte b und c aus diesem Modell sollen gleichzeitig als Schätzwerte für β und γ in (1) verwendet werden. In (7) bedeutet y_i' entweder $y_i - \alpha$ oder $y_i - a$. Die Schätzwerte b und c für das Regressionsmodell (7) erhält man nach den Methoden der linearen Regression aus

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i' - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i'}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{8}$$

und

$$\ln b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln y_i' - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{9}$$

2.2. Die Trapezsummenmethode von Verhagen. Verhagen [14] schlug vor, die Integrale $I(x_i) = \int\limits_{x_1}^{x_i} \eta(x)\,dx$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ durch Trapezsummen

$$T(x_i) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} (y_{j-1} + y_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = T_i \tag{9}$$

$(i = 2, 3, \ldots, n)$ zu approximieren. Wählt man $x_1 = 0$ (das ist o. B. d. A. möglich), so gilt

$$I(x_i) = \int\limits_0^{x_i} (\alpha + \beta e^{\gamma x})\,dx = \alpha x_i + \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma x_i} - 1). \tag{10}$$

Setzt man in (10) $I(x_i) \sim IT_i$, so ergibt sich

$$y_i = \gamma T_i - \alpha\gamma x_i + \alpha + \beta + \varepsilon_i \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{11}$$

als neues Regressionsmodell.

Dieses Modell kann nach den Methoden der linearen Regression behandelt werden. Aus der Forderung $\sum\limits_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2 = \text{Min}$ erhält man drei Normalgleichungen, die nach den Schätzwerten a_v, b_v, c_v aufgelöst, die Form

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{S_{Ty} S_{xx} - S_{Tx} S_{xy}}{S_{TT} S_{xx} - S_{Tx}^2}, \\ a_v &= \frac{c_v S_{Tx} - S_{xy}}{c_v S_{xx}}, \\ b_v &= \bar{y} - c_v \bar{T} + a_v(c_v \bar{x} - 1) \end{aligned} \tag{12}$$

haben. In (12) bedeuten

$$S_{uv} = \sum_{i=2}^{n} u_i v_i - \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} u_i \sum\limits_{i=2}^{n} v_i}{n-1}$$

und

$$\bar{u} = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} u_i}{n-1}.$$

2.3. Ein nomographisches Verfahren. Von Rasch und Stammberger [10] Rasch [9] wurde ein nomographisches Verfahren zur Schätzung der Parameter des Regressionsmodells (1) entwickelt. Man geht bei diesem Verfahren von einem Schätzwert a für α aus und bildet die Differenzen $y_i' = a - y_i$. Die y_i' und die zugehörigen x_i trägt man auf den entsprechenden Skalen eines Nomogamms ab und verbindet die erhaltenen Punkte durch Geraden. Wenn alle $\varepsilon_i = 0$ wären, würden sich die Verbindungsgeraden von x_i zu y_i in einem Punkt schneiden. Für $\varepsilon_i \neq 0$ gibt es mehrere Schnittpunkte, deren Schwerpunkt man abschätzen muß. Für diesen Schwerpunkt liest man auf den Netzskalen die Schätzwerte b und c ab. War a ein schlechter Schätzwert, so ergeben sich für die Schnittpunkte der erwähnten Verbindungsgeraden Gleitkurven. Um die Schätzung zu verbessern, kann man aus den Schätzwerten b und c aus einem zweiten Nomogramm einen neuen Schätzwert für a erhalten und das Verfahren wiederholen.

Die im folgenden beschriebenen Verfahren sind nur für äquidistante x_i anwendbar.

2.4. Das Verfahren der internen Regression von Hartley. Von Hartley [3] wurde zur Schätzung von α, β und γ das Verfahren der internen Regression für äquidistante x_i verwendet ($x_{i+1} = x_i + d$). Hartley kommt durch Approximation der Differentialgleichung $\eta' = \gamma(\eta - \alpha)$ (deren Integral $\eta(x)$ ist) durch eine Differenzengleichung nach einigen Umformungen zu dem Regressionsmodell

$$y_i = k_1 Y_i + k_2 x_i + k_3 + \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

In (13) bedeutet

$$Y_i = Y_{i-1} + \tfrac{1}{2}(y_{i-1} + y_i) \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

und $Y_1 = -\frac{1}{2}y_1 - (y_2 + y_3 + \ldots + y_{\frac{n-1}{2}}) - \frac{1}{2}y_{\frac{n+1}{2}}$ für ungerade n bzw. $Y_1 = -\frac{1}{2}y_1 - (y_2 + y_3 + \ldots + y_{\frac{n}{2}})$ für gerade n; ferner gilt

$$a = -\frac{k_2}{dk_1}; \qquad \gamma = \ln\frac{2+k_1}{2-k_1}; \qquad \beta = a - k_3. \tag{14}$$

Aus (13) kann man nach den Methoden der linearen Regression k_1, k_2 und k_3 schätzen; setzt man diese Schätzwerte an Stelle der Parameter in (14), so erhält man Schätzwerte a_H, b_H und c_H für α, β bzw. γ.

2.5. Die Quotientenschätzfunktionen. Von Patterson and Lipton [8] wurde gezeigt, daß die Methode der internen Regression der Spezialfall eines allgemeineren Schätzprinzipes, der Quotientenschätzfunktionen Q. S. für äquidistante x_i ist.

Als Q. S. für $\varrho = e^{\gamma}$ bezeichnet man Ausdrücke der Form

$$r = \frac{\sum_{i=2}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=2}^{n} w_i y_{i-1}}. \tag{15}$$

Es werden besonders 2 Haupttypen, die linearen Q. S. (w_i konstant) und die quadratischen Q. S. (die w_i sind lineare Funktionen der y_i), verwendet. Ist ϑ eine quadratische Matrix der Ordnung $n-1$ von von ϱ abhängigen Konstanten und

$\mathfrak{y}_1' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ bzw.

$\mathfrak{y}_2' = (y_2, y_3, \ldots, y_n)$, so kann man die quadratischen Q. S. in der Form

$$r(p, q) = r(p/q) = \frac{\mathfrak{y}_2'\vartheta(p\mathfrak{y}_1 + q\mathfrak{y}_2)}{\mathfrak{y}_1'\vartheta(p\mathfrak{y}_1 + q\mathfrak{y}_2)} \tag{16}$$

schreiben. Zwei quadratische Q. S. mit gleichem Quotienten p/q sind gleich. Patterson [7] konnte zeigen, daß man durch geeignete Wahl von ϑ quadratische Q. S. erhalten kann, die für bestimmte Parameterwerte $\varrho = \varrho_0$ Minimalvarianz besitzen; solche quadratischen Q. S. werden als Q. S. vom Typ $r(\varrho_0, p/q)$ bezeichnet. Patterson and Lipton [8] zeigten, daß das Verfahren der internen Regression einer Schätzung von ϱ mit einer Q. S. vom Typ r (1, 1/1) entspricht.

Aus dem Schätzwert r für ϱ erhält man einen Schätzwert c_Q für γ aus $c_Q = \ln r$. Schätzwerte a_Q und b_Q für α und β können durch lineare Regression von $e^{c_Q x_i}$ auf y_i aus dem Regressionsmodell

$$y_i = \alpha + \beta e^{c_Q x_i} + \varepsilon_i \tag{17}$$

berechnet werden.

3. Simulationsexperimente.

3.1. Beschreibung der Experimente. Da allgemeine Formeln für die relative Effizienz der unter 2 angeführten Verfahren bezogen auf die Maximum-Likelihood-Methode nicht vorliegen, sollte mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode geprüft werden, ob bestimmte Schnellverfahren bei geringerem Arbeitsaufwand trotzdem zu befriedigenden Ergebnissen führen. Interessant ist in diesem Zusammenhang die Erwartungstreue und die relative Effizienz ausgedrückt als Quotient der Varianz eines MLS zur Varianz des gleichen Schätzwertes nach der Vergleichsmethode bzw. die entsprechende Prozentangabe.

Es wurde folgendes Simulationsexperiment durchgeführt, dem etwa die Verhältnisse beim Wachstum der Höhenmaße von Rindern entsprechen. Ausgehend von einem festen Wert für $\alpha = 135$ (α beeinflußt weder die Erwartungstreue noch die Effizienz von Schätzverfahren), wurden für $\beta_1 = -50$, $\beta_2 = -60$ bzw. $\beta_3 = -70$ und $\gamma_1 = -0{,}04$, $\gamma_2 = -0{,}05$ bzw. $\gamma_3 = -0{,}06$ die 9 möglichen Parameterkombinationen $(\alpha, \beta_j, \gamma_k)$ $(j, k = 1, 2, 3)$ betrachtet.

Für 17 x-Werte $x_i = 5(i-1)$ $(i = 1, \ldots, 17)$ der Regressorvariablen x ergaben sich daraus für jede Parameterkombination die Funktionswerte $\eta_i = \eta(x)$. Das im folgenden beschriebene Vorgehen kam für jede Parameterkombination zur Anwendung. Aus den η_i erhielten wir „Beobachtungswerte" y_i, indem wir entsprechend der Modellgleichung (1) Fehlerglieder ε_i addierten. Die ε_i wurden als Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz 0,6 erzeugt. Die Rechenarbeiten wurden auf dem Rechenautomaten ZRA 1 des Rechenzentrums der DAL durchgeführt.

Das Verfahren zur Erzeugung der normalvertelten Zufallsvariablen wird in Abschnitt 3.2 beschrieben. Zu jeder Reihe von Funktionswerten $\eta_i (i = 1, \ldots, 17)$ (d. i. für jede Parameterkombination) erzeugten wir 100 Reihen von Beobachtungswerten $y_{ij} (i = 1, \ldots, 17;\ j = 1, \ldots, 100)$. Aus den y_{ij} wurden für jedes j die Parameter α, β und γ nach folgenden Verfahren geschätzt:

1. Maximum-Likelihood-Methode.
2. Logarithmieren.
3. Trapezsummen.
4. Interne Regression.
5. Q. S.

$$r_1 = \frac{4y_{15}+y_{10}-5y_5}{4y_{10}+y_5-5y_0}.$$

6. Q. S.

$$r_2 = \frac{4y_{16}+y_{11}-5y_6}{4y_{11}+y_6-5y_1}.$$

7. Q. S.

$$r_3 = \frac{4y_{15}^2-4y_{15}y_{10}-3y_{15}y_5-y_{15}y_0-y_{10}^2+7y_{10}y_5-y_{10}y_0-3y_5^2+2y_5y_0}{4y_{15}y_{10}-4y_{15}y_0-4y_{10}^2+4y_{10}y_0+2y_5^2-4y_5y_0+2y_0^2}.$$

8. Q. S.

$$r_4 = \frac{4y_{16}^2-4y_{16}y_{11}-3y_{16}y_6-y_{16}y_1-y_{11}^2+7y_{11}y_6-y_{11}y_1-3y_6^2+2y_6y_1}{4y_{16}y_{11}-4y_{16}y_1-4y_{11}^2+4y_{11}y_1+2y_6^2-4y_6y_1+2y_1^2}.$$

r_1 und r_2 sind lineare Q. S. mit 4 Beobachtungswerten; formal sind r_1 und r_2 (und auch r_3 und r_4) identisch, die Beobachtungswerte in r_2 (und r_4) liegen um 5 Einheiten höher als in r_1 (bzw. r_3). Kompliziertere lineare Q. S. zu wählen ist zu aufwendig. r_3 bzw. r_4 sind quadratische Q. S. mit den gleichen Werten y_i wie r_1 bzw. r_2. Es sollte geprüft werden, ob sich der erheblich höhere Rechenaufwand für quadratische Q. S. lohnt.

Für jede der 100 Beobachtungsreihen ergaben sich nach jedem Verfahren 100 Schätzwerte a_i, b_i, c_i $(i = 1, \ldots, 100)$ aus denen das arithmetische Mittel ($\bar{a}$, $\bar{b}$ bzw. $\bar{c}$) und die Varianz (s_a^2, s_b^2 bzw. s_c^2) berechnet wurden.

Den Schätzwert a für das Verfahren des Logarithmierens berechneten wir nach $\mathrm{Max}(y_i)+1 = a$.

3.2. Die Methode der Erzeugung normalverteilter Zufallsvariablen. Alle rechentechnischen Arbeiten wurden auf dem digitalen Rechenautomaten ZRA 1 durchgeführt. Es bot sich daher an, einen Zufallszahlengenerator zu verwenden, der die Besonderheiten dieses Automaten weitgehend ausnutzt. Es wurde ein im Rechenzentrum des Zentralinstituts für Kernforschung Rossendorf entwickelter Generator verwendet. In diesem Generator wird der großen Flexibilität des ZRA 1-Befehlswortes und den speziellen Eigenheiten des Automaten Rechnung getragen; dadurch ergab sich auch eine verhältnismäßig kurze Rechenzeit.

Der Generator unterscheidet sich von anderen gebräuchlichen Generatoren vor allem durch das Mitvarieren einer Hilfsgröße eines zweiten Parameters λ unabhängig von den Werten der Pseudozufallszahl z_i. Dieses Mitvarieren wird mittels einer Indexoperation eines Indexregisters (zyklisch Datum) hervorgerufen. Da diese Operation neben den Rechenoperationen durchgeführt wird (die einzelnen Operationen im Befehlswort werden parallel abgearbeitet!) ist hierbei keine zusätzliche Rechenzeit erforderlich. Der Wertebereich dieses zweiten Parameters λ besteht aus allen 2^{12} verschiedenen Werten des Datumsteiles eines ZRA 1-Wortes. Diese Werte werden aber nicht in natürlicher Reihenfolge angenommen. Das Verfahren zur Erzeugung der Pseudozufallszahlen z_i kann dem Prinzip nach folgendermaßen dargestellt werden:

$$x_{i+1} = A^*(x_i) + \lambda_i = A(x_i) \tag{18}$$

und

$$z_{i+1} = g(x_{i+1}). \tag{19}$$

Zunächst zu (19): Man erhält in (18) nur eine Zufallsinformation, und zwar ein Wort von gewöhnlich 40 Stellen. Aus diesem Wort x_{i+1} wird mittels der logischen Operation „&" mit Hilfe einer dualen Siebzahl, die m hintereinander besetzte Stellen hat, ein Teil eliminiert. Dieser Teil wird dann als Zufallszahl z_{i+1} interpretiert, er besitzt m Stellen.

Zu (18): Beim Algorithmus A^* wird eine Linksverschiebung von x_i vorgenommen und mittels der logischen Operation „&" mit Hilfe einer weiteren Siebzahl ein Teil eliminiert; von der so erhaltenen Größe wird x_i subtrahiert.

Da sich die Größe λ unabhängig von x verändert, kann man sagen, daß bei Wiederholung eines Wertes von x λ kaum wieder denselben Wert aufweisen wird. Damit ist der Algorithmus A in bezug auf z erst recht nicht mehr eindeutig, da nicht alle Stellen von x zu z gehören. Sie werden aber beim nächsten Schritt wieder mit verarbeitet.

Da die analytische Formulierung der Algorithmen wegen der verwendeten Operationen nicht einfach ist, wurde auf eine solche Darstellung verzichtet. Der Generator wurde in einer Version von 7 ZRA 1-Befehlszeilen verwendet; innerhalb dieser Zeilen gibt es keinen Zyklus, ein Durchlauf liefert eine gleichverteilte Pseudozufallszahl.

Zur Gewinnung von Zufallszahlen y mit einer normierten Normalverteilung aus gleichverteilten Zufallszahlen z wurde folgende Beziehung verwendet:

$$y = \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{n}{2} \right) \qquad (n \geqslant 15). \tag{20}$$

3.3. Ergebnisse. In Tabelle 1 wurden die wichtigsten Ergebnisse der Simulationsstudie aufgenommen. Um eine Aussage über die Erwartungstreue der einzelnen Verfahren zu ermöglichen, enthält die Tabelle die Mittelwerte der Schätzwerte für α, β und γ aus den 100 Meßreihen. Die geringsten Abweichungen von den Parameterwerten weisen die Maximum-Likelihood-Methode, die Trapezsummenmethode und die Methode der internen Regression auf. Eine Abhängigkeit von β und von γ (im betrachteten Bereich) ist nicht erkennbar. Die effizienteste Methode ist die der internen Regression mit einer Effizienz nahe 1 für alle Parameterkombinationen. Die Effizienz der Q. S. ist niedriger als nach Rasch und Stammberger [9] für die Kombination (β_2, γ_3) zu erwarten war. Mit wachsendem γ nimmt die Effizienz der Q. S. für alle β ab. Die Effizienz der Q. S. mit den um 5 Monate später liegenden Terminen ist stets geringer als die der Q. S. mit den früheren Terminen. Die quadratischen Q. S. haben in den meisten Fällen keine höhere Effizienz als die linearen. Die Effizienz des logarithmischen Verfahrens nimmt mit wachsendem γ zu und mit wachsendem β leicht ab. Die Trapezsummenmethode ist nach der internen Regression das effizienteste Schnellverfahren; seine Effizienz wird von β und γ kaum beeinflußt. Für die Variante $\beta = -50$, $\gamma = -0{,}05$ wurden die Parameter der 100 Meßreihen dach der nomographischen Methode geschätzt. Als Mittelwerte der Schätzwerte erhielten wir

$$\bar{a} = 135{,}64, \qquad \bar{b} = -50{,}56, \qquad \bar{c} = -0{,}0487.$$

Die Effizienz hinsichtlich der Schätzung von c betrug 0,48. Das entspricht etwa dem von Rasch und Stammberger [9] gefundenen Wert für eine Beobachtungsreihe.

TABELLE 1. Mittelwerte $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{c}$ der Schätzwerte aus 100 simulierten Meßreihen nach 8 Verfahren und Effizienzen e_c bezüglich der Schätzung von γ relativ zur Maximum-Likelihood-Methode (MLM)

Verfahren		$\beta_1 = -50$			$\beta_2 = -60$			$\beta_3 = -70$		
		$\gamma_1 = -0{,}04$	$\gamma_2 = -0{,}05$	$\gamma_3 = -0{,}06$	$\gamma_1 = -0{,}04$	$\gamma_2 = -0{,}05$	$\gamma_3 = -0{,}06$	$\gamma_1 = -0{,}04$	$\gamma_2 = -0{,}05$	$\gamma_3 = -0{,}06$
Logarithmieren	$\bar{a}$	134,25	135,56	136,21	133,74	135,34	136,10	133,44	135,04	136,01
	$-\bar{b}$	53,93	47,71	41,31	66,54	59,12	51,18	79,48	70,71	60,67
	$-\bar{c}$	0,0457	0,0461	0,0457	0,0478	0,0484	0,0484	0,0490	0,0506	0,0500
	e_c	0,44	0,36	0,63	0,21	0,23	0,31	0,17	0,22	0,33
Trapezsummen	$\bar{a}$	135,02	135,01	135,02	135,00	135,01	135,03	135,02	135,01	135,02
	$-\bar{b}$	50,09	50,00	49,97	60,01	60,04	60,06	70,14	70,01	69,98
	$-\bar{c}$	0,0400	0,0498	0,0594	0,0399	0,0498	0,0595	0,0400	0,0497	0,0595
	e_c	0,64	0,60	0,63	0,60	0,62	0,40	0,58	0,54	0,45
Interne Regression	$\bar{a}$	135,01	134,99	135,01	135,05	135,01	135,04	135,04	135,03	135,01
	$-\bar{b}$	50,10	49,98	49,86	59,93	59,91	60,24	70,14	69,94	69,82
	$-\bar{c}$	0,0401	0,0501	0,0600	0,0398	0,0500	0,0599	0,0400	0,0498	0,0600
	e_c	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	0,96	0,98	0,99	0,97

Lineare Q. S. r_1	$\bar{a}$	135,06	135,00	135,04	135,07	135,03	134,91	135,04	134,97	135,02
	$-\bar{b}$	50,12	50,03	50,03	59,93	60,02	60,07	70,10	69,93	70,00
	$-\bar{c}$	0,0411	0,0502	60,04	0,0399	0,0500	0,0607	0,0405	0,0502	0,0600
	e_c	0,27	0,23	0,22	0,30	0,23	0,20	0,40	0,26	0,26
Lineare Q. S. r_2	$\bar{a}$	134,83	135,04	135,14	134,88	135,11	135,10	135,15	134,93	134,98
	$-\bar{b}$	50,06	50,04	50,00	59,89	60,02	60,01	70,15	69,94	70,03
	$-\bar{c}$	0,0409	0,0502	0,0595	0,0440	0,0498	0,0598	0,0399	0,0534	0,0604
	e_c	0,22	0,14	0,11	0,20	0,17	0,09	0,24	0,16	0,11
Quadratische Q. S. r_3	$\bar{a}$	135,07	135,02	135,05	135,08	135,03	134,92	135,05	134,98	135,02
	$-\bar{b}$	50,12	50,03	50,03	59,93	60,02	60,07	70,11	69,93	70,00
	$-\bar{c}$	0,0401	0,0501	0,0600	0,0398	0,0500	0,0607	0,0400	0,0501	0,0600
	e_c	0,27	0,23	0,22	0,29	0,23	0,19	0,41	0,26	0,25
Quadrat. Q. S. r_4	$\bar{a}$	134,84	135,06	135,16	134,88	135,12	135,08	135,15	134,93	134,99
	$-\bar{b}$	50,07	50,04	50,00	59,89	60,02	60,02	70,15	69,94	70,03
	$-\bar{c}$	0,0408	0,0501	0,0594	0,0440	0,0498	0,0599	0,0399	0,0503	0,0603
	e_c	0,22	0,14	0,11	0,20	0,16	0,09	0,23	0,17	0,11
MLM	$\bar{a}$	135,00	134,99	135,00	135,05	135,01	135,04	135,04	135,03	135,01
	$-\bar{b}$	50,08	50,01	50,03	59,91	60,01	60,01	70,09	69,91	70,00
	$-\bar{c}$	0,0401	0,0501	0,0610	0,0398	0,0500	0,0598	0,0400	0,0498	0,0600

Literaturverzeichnis

[1] H. Böttger, *Neue Zufallszahlengeneratoren für den* ZRA 1, Zentralinstitut für Kernforschung, Rossendorf 1964.

[2] F. P. Gomes, *The use of Mitscherlich's regression law in the analysis of experiments with fertilizers*, Biometrics 9 (1953), S. 498-516.

[3] H. O. Hartley, *The estimation of non-linear parameters by "internal least squares"*, Biometrika 35 (1948), S. 32-45.

[4] H. Linhart, *Notes on Stevens' estimation of parameters in an exponential model*, Nat. Inst. for Personnel Res., Johannesburg 1959.

[5] —, *Tables for W. L. Stevens' asymptotic regression*, Biometrics 16 (1960), S. 125-000.

[6] S. Lipton, *On the extension of Stevens' tables for asymptotic regression*, Biometrics 17 (1961), S. 321-000.

[7] H. D. Patterson, *The use of autoregression in fitting an exponential curve*, Biometrika 45 (1958), S. 389-400.

[8] H. D. Patterson und S. Lipton, *An investigation of Hartley's method for fitting an exponential curve*, Biometrika 46 (1959), S. 281-292.

[9] D. Rasch, *Elementare Einführung in die Mathematische Statistik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

[10] D. Rasch und A. Stammberger, *Verschiedene Schätzverfahren für die Parameter der Funktion* $\eta = a + \beta e^{\gamma x}$, Biom. Zeitschr. 9 (1967), S. 34-49.

[11] B. Schneider, *Die Bestimmung der Parameter im Ertragsgesetz von E. A. Mitscherlich*, Biom. Zeitschr. 5 (1963), S. 78-95.

[12] W. L. Stevens, *Asymptotic regression*, Biometrics 7 (1951), S. 247-286.

[13] P. K. Tomlinson und N. I. Abramson, *Fitting a von Bertalanffy growth curve by least squares including tables of polynomials*, Fish Bull. 116 (1961), S. 3-69.

[14] A. M. W. Verhagen, *Growth curves and their functional form*, Austral. J. Statist. 2 (1960), S. 122-127.

INSTITUT FÜR TIERZUCHTFORSCHUNG, DUMMERSTORF
RECHENZENTRUM DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER LANDWIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN, BERLIN

Eingegangen am 10. 10. 1967

D. RASCH (Dummerstorf) i R. RAUSCHENBACH (Berlin)

EFEKTYWNOŚĆ RÓŻNYCH METOD ESTYMACJI PARAMETRU NIELINIOWEGO FUNKCJI $\eta(x) = a + \beta \exp(\gamma x)$

STRESZCZENIE

Za pomocą metod symulacyjnych zbadano efektywność (w odniesieniu do metody największej wiarogodności) i nieobciążoność następujących metod estymacji parametrów β i γ: ilorazowe funkcje estymacyjne typu liniowego i kwadratowego (w tym wewnętrzna regresja Hartleya), metoda trapezów i metoda logarytmiczna. Symulacje przeprowadzono dla 9 kombinacji parametrów (β, γ). Dla jednej kombinacji parametrów podano ponadto efektywność i nieobciążoność pewnej metody nomograficznej. Mało efektywna i mocno obciążona okazała się metoda logarytmiczna. Najbardziej efektywnymi były: wewnętrzna regresja, metoda trapezów i metoda nomograficzna.

Д. РАШ (Думмерсторф) и Р. РАУШЕНБАХ (Берлин)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРА ФУНКЦИИ $\eta(x) = a + \beta \exp(\gamma x)$

РЕЗЮМЕ

Авторы применяют метод Монте-Карло для оценки эффективности (по сравнению с методом максимума правдоподобия) и несмещенности следующих методов оценки параметров β и γ: методы линейных и квадратных функций оценки (включая внутреннюю регрессию Хартлея), метод трапеций и логарифмический метод. Испытания проведены для 9 комбинаций параметров (β, γ). Для одной комбинации дается также эффективность и несмещенность некоторого номографического метода. Логарифмический метод оказался мало эффективным и сильно смещенным. Наиболее эффективными были: внутренная регрессия, метод трапеций и номографический метод.

D. RASCH (Dummerstorf) and R. RAUSCHENBACH (Berlin)

EFFICIENCY OF SEVERAL METHODS OF ESTIMATING THE NON-LINEAR PARAMETER OF THE FUNCTION $\eta(x) = a + \beta \exp(\gamma x)$

SUMMARY

Efficiency with respect to the maximum likelihood method and unbiasedness of estimating the parameters β and γ by linear and quadratic estimation functions of a quotient type (including Hartley's internal regression), by the trapezium method and by the logarithmic method were investigated. For this purpose the Monte Carlo method has been applied and 9 combinations of parameters (β, γ) were examined. For one combination of parameters this was done also for a nomographic method. The logarithmic method proved to be mostly biased and of little efficiency. The most efficient methods were the internal regression (0,96-1,00), the trapezium method (0,40-0,64), and the nomographic method (0,48).