ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVIII, 2 (1984), p. 281-296

Я. Д. МАМЕДОВ (Баку) и З. ЗАЛЕВСКИ (Щецин)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Ω — открытый треугольник с вершинами $(0,0)$, $(a_1,0)$, $(a_2,0)$, $b>1$, $a_1>a_2>0$. Границы этого треугольника обозначим через Γ. Пусть

$$L[u] \equiv -\Delta u - f(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}),$$

где $f(x_1, x_2, z, p, q)$ — некоторая заданная непрерывная функция, определенная для всех $(x_1, x_2)\in\bar{\Omega}$ и при всех z, p, q $(-\infty < z, p, q < \infty)$. Будем считать, что частные производные f_z, f_p, f_q существуют и удовлетворяют неравенствам

$$(1)\qquad f_z < 0, \quad |f_p| + |f_q| \leqslant K = \mathrm{const} < \infty.$$

Рассмотрим следующую задачу: Найти непрерывную в $\bar{\Omega}$ функцию $u(x_1, x_2)$, дважды непрерывно дифференцируемую в Ω, удовлетворяющую уравнению

$$(2)\qquad L[u] = 0,$$

и краевому условию

$$(3)\qquad u|_\Gamma = 0.$$

Разностную схему для решения задачи (2), (3) построим по схеме, предложенной в работе [3]. Введем функцию $\varphi(t) = bt^2(3-2t)$. Здесь $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = b$. Положим $N \geqslant 2$ и $h = 1/N$. Покроем область $\bar{\Omega} = \Omega\cup\Gamma$ сеткой таким же образом, как в [3]. Обозначим через Ω_h множество всех точек Ω, являющихся пересечением семейств прямых x_1 и x_2, таких, что

$$x_1 = \frac{a_2}{b}\varphi(ih) \qquad \text{для } 0 \leqslant x_1 \leqslant a_2,$$

$$x_1 = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{b}\varphi(ih)$$

$$\text{для } a_2 < x_1 \leqslant a_1,\ x_2 = \varphi(ih),\ i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

а через Γ_h — множество точек пересечения этих прямых с границей треугольника и положим $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$.

Введем следующие обозначения: Пусть $P_0(x_1, x_2) \in \Omega$. Точки

$$(x_1+\mu_2, x_2), \quad (x_1, x_2+\mu_3), \quad (x_1-\mu_1, x_2), \quad (x_1, x_2-\mu_4)$$

будут соседними точками точки P_0; обозначим их через P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04} соответственно, причем

$$\mu_1 = \begin{cases} \dfrac{a_2}{b}\Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big) & \text{для } 0 \leqslant x_1 \leqslant a_2, \\[2ex] \dfrac{a_2-a_1}{b}\Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big) & \text{для } a_2 < x_1 \leqslant a_1, \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} \dfrac{a_2}{b}\Big(\varphi\big((i+1)h\big)-\varphi(ih)\Big) & \text{для } 0 \leqslant x_1 \leqslant a_2, \\[2ex] \dfrac{a_2-a_1}{b}\Big(\varphi\big((i+1)h\big)-\varphi(ih)\Big) & \text{для } a_2 < x_1 \leqslant a_1, \end{cases}$$

$$\mu_3 = \varphi\big((i+1)h\big)-\varphi(ih), \qquad \mu_4 = \varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big),$$

где $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Точки множества Ω_h обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_{N_1}$, для которых $P_{j\nu} \in \bar{\Omega}_h$, $j = 1, 2, \ldots, N_1$, $\nu = 1, 2, 3, 4$. Точки множества Γ_h обозначим через $P_{N_1+1}, P_{N_1+2}, \ldots, P_{N_2}$. Обозначим через ξ_j (или $\xi_{j\nu}$) зависимость некоторой функции ξ, определенной в $\bar{\Omega}$, от точки P_j (или $P_{j\nu}$). Аппроксимируем оператор L в узлах Ω_h разностными операторами

$$L_h[u_j] \equiv -\Delta_h[u_j]-f\{x_{1j}, x_{2j}, u_j, D_{h,x_1}[u_j], D_{h,x_2}[u_j]\}, \qquad j = 1, \ldots, N_1,$$

где

$$\Delta_h[u_j] = \Big(u_{\mathring{x}_1\mathring{x}_1}\big(x_1, \varphi(ih)\big)\Big)_j + \Big(u_{\mathring{x}_2\mathring{x}_2}\big(x_1, \varphi(ih)\big)\Big)_j =$$

$$= \left\{\frac{u_j(x_1+\mu_2, x_2)-u_j(x_1, x_2)}{\mu_2} - \frac{u_j(x_1, x_2)-u_j(x_1-\mu_1, x_2)}{\mu_1}\right\}\frac{2}{\mu_1+\mu_2} +$$

$$+ \left\{\frac{u_j(x_1, x_2+\mu_3)-u_j(x_1, x_2)}{\mu_3} - \frac{u_j(x_1, x_2)-u_j(x_1, x_2-\mu_4)}{\mu_4}\right\}\frac{2}{\mu_3+\mu_4},$$

$$D_{h,x_2}[u_j] = \frac{u_j(x_1, x_2)-u_j(x_1, x_2-\mu_4)}{\mu_4},$$

$$D_{h,x_1}[u_j] = \frac{u_j(x_1, x_2)-u_j(x_1-\mu_1, x_2)}{\mu_1}.$$

Ниже будем предполагать, что задача (2), (3) однозначно разрешима и $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, причем

$$\max_{\Omega}\left(\left|d^{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|, \left|d^{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|, \left|d^{1+\varepsilon}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\right|, \left|d^{1+\varepsilon}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right|\right) \leqslant c_1,$$

$$(4) \qquad \max_{x,x'\in\Omega}\left(\frac{\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(x) - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(x')\right|}{|x-x'|^{\alpha}}\min\{d^{1+\alpha+\varepsilon}(x),\ d^{1+\alpha+\varepsilon}(x')\}\right) \leqslant c_1,$$

$$\max_{x,x'\in\Omega}\left(\frac{\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x) - \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x')\right|}{|x-x'|^{\alpha}}\min\{d^{1+\alpha+\varepsilon}(x),\ d^{1+\alpha+\varepsilon}(x')\}\right) \leqslant c_1$$

для любого $\alpha \in (0,1)$ и $\varepsilon \in [0,1)$, $\varepsilon < \alpha$, но константа c_1 зависит от α и ε (см. [3], [5], [6]). Поэтому в дальнейшем мы зафиксируем $\alpha \in (0,1)$ и $\varepsilon \in [0,1)$. Функция $d(x)$ есть расстояние от точки x до ближайшей вершины треугольника. Кроме того, будем предпологать, что область Ω_h связная (см. [4]) и выполняются условия

$$(5) \qquad f_p \leqslant 0, \quad f_q \leqslant 0.$$

Рассмотрим следующую разностную задачу, соответствующую задаче (2), (3):

$$(6) \qquad L_h[u_j^h] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N_1,$$

$$(7) \qquad u_k^h = 0, \quad k = N_1+1, \ldots, N_2.$$

Сначала докажем, что эта система однозначно разрешима.

Определим при $j = 1, \ldots, N_1$ функции (см. [1])

$$(8) \qquad F_j(z;\ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \equiv Z - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{2(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)} f\left(x_{1j}, x_{2j}, \frac{z-\xi_3}{\mu_1}, \frac{z-\xi_4}{\mu_4}\right).$$

Задачу (6), (7) перепишем в виде

$$(9) \qquad F_j(u_j^h, \xi_{j1}, \xi_{j2}, \xi_{j3}, \xi_{j4}) = \sum_{\nu=1}^{4} A_{j\nu}\xi_{j\nu}, \quad j = 1, \ldots, N_1,$$

$$(10) \qquad u_k^h = 0, \quad k = N_1+1, \ldots, N_2,$$

где

$$\xi_{j1} = u_j^h(x_1+\mu_2, x_2), \qquad \xi_{j2} = u_j^h(x_1, x_2+\mu_3),$$

$$\xi_{j3} = u_j^h(x_1-\mu_1, x_2), \qquad \xi_{j4} = u_j^h(x_1, x_2-\mu_4);$$

$$A_{j1} = \frac{\mu_1\mu_3\mu_4}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)}, \qquad A_{j2} = \frac{\mu_1\mu_2\mu_4}{(\mu_3+\mu_4)(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)},$$

$$A_{j3} = \frac{\mu_2\mu_3\mu_4}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)}, \qquad A_{j4} = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{(\mu_3+\mu_4)(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)}.$$

На основании (1) и (5) имеем

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial F_j}{\partial z} = 1 - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{2(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)} f_z - \frac{\mu_2\mu_3\mu_4}{2(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)} f_p - \\ - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{2(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)} f_q > 0.$$

Тогда существует функция

$$\text{(12)} \qquad z = g_j(Z_j;\, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \qquad j = 1, \ldots, N_1,$$

такая, что удовлетворяет тождеству

$$\text{(13)} \qquad F_j[g_j(Z_j;\, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4);\, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] \equiv Z_j, \qquad j = 1, \ldots, N_1.$$

На основании (8) и (12) следует, что функция u_j^h есть решением задачи (9), (10) тогда и только тогда, если

$$\text{(14)} \qquad u_j^h = g_j(u_{j1}^h, u_{j2}^h, u_{j3}^h, u_{j4}^h), \qquad j = 1, \ldots, N_1,$$

$$\text{(15)} \qquad u_k^h = 0, \qquad k = N_1+1, \ldots, N_2.$$

Перенумеруем все узлы Ω_h следующим образом: За первый узел примем один из тех узлов Ω_h, среди соседних которых будет граничный узел; за второй узел примем один из тех узлов, среди соседних которых будет второй узел и т.д. Очевидно, что для доказательства существования решения задачи (6), (7) мы должны доказать существование решения уравнения

$$u_j^h = g_j(u_{j1}^h, u_{j2}^h, u_{j3}^h, u_{j4}^h), \qquad j = 1, \ldots, N_2,$$

где функции $g_j(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$, $j = 1, \ldots, N_2$, непрерывны по всем своим аргументам.

Построим итерационную схему и докажем, что итерационный процесс сходится.

Пусть $u_j^{h(0)}$ некоторая функция, определенная в $\bar{\Omega}_h$, удовлетворяющая граничным условиям $u_k^{h(0)} = 0$, $k = N_1+1, \ldots, N_2$. Определим $u_j^{h(1)}, u_j^{h(2)}, \ldots$ следующим образом:

$$(16)\qquad u_j^{h(n+1)} = g_j(\tilde{u}_{j1}^{h(n)}, \tilde{u}_{j2}^{h(n)}, \tilde{u}_{j3}^{h(n)}, \tilde{u}_{j4}^{h(n)}), \qquad j = 1, \ldots, N_1,$$

$$u_k^{h(n+1)} = u_k^{h(n)} = 0, \qquad k = N_1+1, \ldots, N_2,$$

где

$$\tilde{u}_{j\nu}^{h(n)} = \begin{cases} u_{j\nu}^{h(n+1)}, & \text{если } P_{j\nu} = P_l,\ l < j, \\ u_{j\nu}^{h(n)} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Из (16) следует

$$(17)\qquad u_j^{h(n+1)} - u_j^{h(n)} = \sum_{\nu=1}^{4} \left(\frac{\partial g_j}{\partial \chi_\nu}\right)_* (\tilde{u}_{j\nu}^{h(n)} - \tilde{u}_{j\nu}^{h(n-1)}),$$

где $(\partial g_j/\partial \chi_\nu)_*$ — производная, взятая в точке

$$\chi_\nu = \tau_j \tilde{u}_{j\nu}^{h(n)} + (1-\tau_j)\tilde{u}_{j\nu}^{h(n-1)}, \qquad 0 \leqslant \tau_j \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Учитывая, что $f_z < 0$, легко заметить, что

$$\sum_{\nu=1}^{4} \left|\frac{\partial g_j}{\partial \xi_\nu}\right| = \varrho < 1 \qquad \text{для } j = 1, \ldots, N_1.$$

Введем обозначения

$$q = \min_j \min_\nu \inf \frac{\partial g_j}{\partial \chi_\nu}, \qquad m_j^{(n+1)} = |u_j^{h(n+1)} - u_j^{h(n)}|,$$

$$m^{(n+1)} = \max_j m_j^{(n+1)}, \qquad \overline{m}^{(n+1)} = \max_j |u_j^{h(n+1)} - u_j^h|.$$

Из (17) для $j = 1$ получаем

$$m_1^{(n+1)} \leqslant \varrho m^{(n)}.$$

Для $j = 2$,

$$m_2^{(n+1)} = |u_2^{h(n+1)} - u_2^{h(n)}| \leqslant \sum_{\nu=1}^{4} \left|\frac{\partial g_j}{\partial \chi_\nu}\right|_* |\tilde{u}_{j\nu}^{h(n)} - \tilde{u}_j^{h(n-1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{4} \left(\frac{\partial g_2}{\partial \chi_\nu}\right) m^{(n)} - \frac{\partial g_2}{\partial \chi_1} m^{(n)} + \frac{\partial g_2}{\partial \chi_1} m_1^{(n+1)} \leqslant$$

$$\leqslant m^{(n)}\left[1 - \left(\frac{\partial g_2}{\partial \chi_1} - \varrho \frac{\partial g_2}{\partial \chi_1}\right)\right] \leqslant m^{(n)}[1 - q(1-\varrho)],$$

откуда

$$m_2^{(n+1)} \leqslant [1-q(1-\varrho)]m^{(n)}.$$

Для $j = 3$,

$$m_3^{(n+1)} \leqslant [1-q^2(1-\varrho)]m^{(n)}.$$

Наконец, для $j = N_1$,

$$m_{N_1}^{(n+1)} \leqslant [1-q^{N_1-1}(1-\varrho)]m^{(n)}.$$

Отсюда имеем неравенство

$$m^{(n+1)} \leqslant a m^{(n)},$$

где

(18) $$0 < a = \max\{\varrho, 1-q(1-\varrho), \ldots, 1-q^{N_1-1}(1-\varrho)\} < 1,$$

или

$$m^{(n)} \leqslant a^{n-1} m^{(1)}.$$

Тогда

$$\max_{\Omega_h} |u^{h(n+p)} - u^{h(p)}| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_j^{h(k)} - u_j^{h(k-1)}| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} m^{(k)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a^{k-1} m^{(1)} =$$
$$= m^{(1)} \frac{a^n}{1-a},$$

из которого следует

$$\lim_{n\to\infty} u^{h(n)} = u^{h*},$$

где u^{h*} является решением системы (14), (15), так как функции g_j непрерывны по своим аргументам.

Аналогично (18) получаем оценку

(19) $$\overline{m}^{(n)} \leqslant a^n \overline{m}^{(0)},$$

которая определяет скорость сходимости последовательных приближений (16).

Итак, нами доказана следующая

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (1), (5). *Тогда разностная схема* (6), (7) *однозначно разрешимая и ее решение можно определить методом Зейделя.*

Разностную задачу (6), (7) представим в виде

$$\bar{L}_h[u_j^h] \equiv -\Delta_h[u_j^h] - \frac{\partial f}{\partial p}\left(\eta(x_j), x_j\right) D_{h,x_1}[u_j^h] - \frac{\partial f}{\partial q}\left(\mu(x_j), x_j\right) D_{h,x_2}[u_j^h] = f(x_j, u_j^h, D_{h,x_1}[u_j^h], D_{h,x_2}[u_j^h]) - \frac{\partial f}{\partial p}\left(\eta(x_j), x_j\right) D_{h,x_1}[u_j^h] - \frac{\partial f}{\partial q}\left(\mu(x_j), x_j\right) D_{h,x_2}[u_j^h] = 0 \tag{20}$$

$$\text{для всех } x_j = (x_{1j}, x_{2j}) \in \Omega_h,$$

$$u_k^h|_{\Gamma_h} = 0, \tag{21}$$

где $\eta(x_j)$ лежит между $D_{h,x_1}[u_j^h]$ и $(u_{x_1})_j$, а $\mu(x_j)$ лежит между $D_{h,x_2}[u_j^h]$ и $(u_{x_2})_j$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (1), (5). *Пусть* u_j^h *— решение задачи* (20), (21). *Тогда для любой функции* v_j, *определенной на* $\bar{\Omega}_h$ *и равной нулю на* Γ_h, *справедливо неравенство*

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |u_j^h(x_j) - v_j(x_j)| \leqslant c_4 \left(1 + \frac{1}{h^{2(1-\gamma)}}\right) \delta_j \qquad (\gamma \in (0, 1]),$$

где

$$\delta_j = \max_{x_j \in \bar{\Omega}_h} \left(\left| -\Delta_h v_j(x_j) - f\left(x_j, v_j(x_j), D_{h,x_1}[v_j], D_{h,x_2}[v_j]\right) \right| \times (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{2-\gamma} \right),$$

$$c_4 = \max(c_2, c_3), \qquad c_2 = \frac{4^{2-\gamma}}{\gamma(1-\gamma)}(b^\gamma + 1), \qquad c_3 = \frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma} b. \tag{22}$$

Доказательство. Введем сеточную функцию $\varrho_j(x_j) = \delta_j w_j(x_j)$, где $w_j(x_j)$ решение задачи

$$\bar{L}_h[w_j(x_j)] = (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{-2+\gamma}, \qquad x_j = (x_{1j}, x_{2j}) \in \Omega_h, \tag{23}$$

$$w_j(x_j)|_{\Gamma_h} = 0.$$

Очевидно, что $\varrho_j(x_j) \geqslant 0$ для всех $x_j \in \Omega_h$, так как $\delta_j \geqslant 0$, $w_j(x_j) \geqslant 0$. Поскольку функция $f(x_1, x_2, z, p, q)$ непрерывно дифференцируемая по аргументам z, p, q, то справедливо разложение

$$f\big(x_j, v_j(x_j), D_{h,x_1}[v_j(x_j)], D_{h,x_2}[v_j(x_j)]\big) -$$
$$-f\big(x_j, u_j^h(x_j), D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)], D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)]\big) = \frac{\partial f}{\partial z}\big(\xi(x_j), x_j\big)\big(v_j(x_j) - u_j^h(x_j)\big) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial p}\big(\eta(x_j), x_j\big)\big(D_{h,x_1}[v_j(x_j)] - D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)]\big) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j), x_j\big)\big(D_{h,x_2}[v_j(x_j)] - D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)]\big)$$

для некоторой функции $\xi(x_j)$ — лежащей между $u_j^h(x_j)$ и $v_j(x_j)$ для всех $x_j \in \bar{\Omega}_h$, $\eta(x_j)$ — лежащей между $D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)]$ и $u_{x_1}(x_j)$ для всех $x_j \in \bar{\Omega}_h$, $\mu(x_j)$ — лежащей между $D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)]$ и $u_{x_2}(x_j)$ для всех $x_j \in \bar{\Omega}_h$.

Тогда очевидно, что

$$\left(\bar{L}_h - \frac{\partial f}{\partial z}\big(\xi(x_j), x_j\big)\right)\big(v_j(x_j) + \varrho_j(x_j) - u_j^h(x_j)\big) =$$
$$= \bar{L}_h[v_j(x_j)] + \left(\bar{L}_h - \frac{\partial f}{\partial z}\big(\xi(x_j), x_j\big)\right)\varrho_j(x_j) - f\big(x_{1j}, x_{2j}, u_j^h(x_j), D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)],$$
$$D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)]\big) + \frac{\partial f}{\partial p}\big(\eta(x_j), x_j\big)D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)] + \frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j), x_j\big)D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)] -$$
$$- \frac{\partial f}{\partial z}\big(\xi(x_j), x_j\big)v_j(x_j) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(\xi(x_j), x_j\big)u_j^h(x_j).$$

Из (1), (5), (23), определения δ_j и неотрицательности ϱ получаем

$$\left(\bar{L}_h - \frac{\partial f}{\partial z}\big(\xi(x_j), x_j\big)\right)\big(v_j(x_j) + \varrho_j(x_j) - u_j^h(x_j)\big) \geqslant$$
$$\geqslant -\Delta_h[v_j(x_j)] - \frac{\partial f}{\partial p}\big(\eta(x_j), x_j\big)D_{h,x_1}[v_j(x_j)] - \frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j), x_j\big)D_{h,x_2}[v_j(x_j)] +$$
$$+ \Delta_h[v_j(x_j)] + f\big(x_{1j}, x_{2j}, v_j(x_j), D_{h,x_1}[v_j(x_j)], D_{h,x_2}[v_j(x_j)]\big) -$$
$$- f\big(x_{1j}, x_{2j}, v_j(x_j), D_{h,x_1}[v_j(x_j)], D_{h,x_2}[v_j(x_j)]\big) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial p}\big(\eta(x_j), x_j\big)\big(D_{h,x_1}[v_j(x_j)] - D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)]\big) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j), x_j\big)\big(D_{h,x_2}[v_j(x_j)] - D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)]\big) + \frac{\partial f}{\partial p}\big(\eta(x_j), x_j\big)D_{h,x_1}[u_j^h(x_j)] +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j), x_j\big)D_{h,x_2}[u_j^h(x_j)] \geqslant 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\xi(x_j),\, x_j\right) < 0,$$

на основании принципа максимума имеем

$$v_j(x_j) + \varrho_j(x_j) - u_j^h(x_j) \geqslant 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_h.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$u_j^h(x_j) - v_j(x_j) + \varrho_j(x_j) \geqslant 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_h.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$|u_j^h(x_j) - v_j(x_j)| \leqslant \varrho_j(x_j) = \delta_j w_j(x_j);$$

поэтому

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |u_j^h(x_j) - v_j(x_j)| \leqslant \delta_j \max_{\bar{\Omega}_h} |w_j(x_j)|. \tag{24}$$

Оценим $\max\limits_{\Omega_h} |w(x)|$. Введем функцию

$$z(x) = \frac{4^{2-\gamma}}{\gamma(1-\gamma)}\left(x_2^\gamma + (b-x_2)^\gamma\right) + c(h) x_2 h^{2(\gamma-1)},$$

где

$$h > 0, \qquad 0 < c(h) = \frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\left(1 - \frac{h^{2(1-\gamma)}}{(b-h^2)^{1-\gamma}}\right) \leqslant \frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Рассмотрим сеточную функцию $Z(x) = z(x)$ для всех $x \in \bar{\Omega}_h$. Подсчитаем $\bar{L}_h Z(x)$. Имеем

$$Z_{\mathring{x}_1\mathring{x}_1}(x) = 0,\ x \in \Omega_h, \qquad Z_{\mathring{x}_2\mathring{x}_2}\left(x_1, \varphi(ih)\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(x_1, \eta_i),$$

$$Z_{x_1}(x) = 0,\ x \in \Omega_h\ , \qquad Z_{x_2}\left(x_1, \varphi(ih)\right) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_1, \mu_i),$$

где

$$\eta_i \in \left(\varphi\left((i-1)h\right), \varphi\left((i+1)h\right)\right), \qquad \mu_i \in \left(\varphi\left((i-1)h\right), \varphi(ih)\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}(x_1, \mu_i) = \frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\left(\mu_i^{\gamma-1} - (b-\mu_i)^{\gamma-1}\right) + c(h) h^{2(\gamma-1)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(x_1, \eta_i) = -4^{2-\gamma}\left(\eta_i^{\gamma-2} + (b-\eta_i)^{\gamma-2}\right).$$

Отсюда

$$\bar{L}_h Z\big((x_1,\varphi(ih)\big)\geqslant \varphi^{2-\gamma}\Big(4^{-2+\gamma}\big((i+1)h\big)+\big(b-\varphi\big((i-1)h\big)\big)^{-2+\gamma}\Big)-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j),x_j\big)\left\{\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\Big(\varphi^{-1+\gamma}(ih)-\big(b-\varphi(ih)\big)^{-1+\gamma}\Big)+c(h)h^{2(\gamma-1)}\right\}.$$

Учитывая, что

$$\tfrac{1}{4}\varphi(ih)\leqslant \varphi\big((i+1)h\big)\leqslant 4\varphi(ih),$$
$$\tfrac{1}{4}\big(b-\varphi(ih)\big)\leqslant b-\varphi\big((i+1)h\big)\leqslant 4\big(b-\varphi(ih)\big),$$

имеем

$$\bar{L}_h Z\big(x_1,\varphi(ih)\big)\geqslant 4^{2-\gamma}\Big(\big(4\varphi(ih)\big)^{-2+\gamma}+\Big(4\big(b-\varphi(ih)\big)\Big)^{-2+\gamma}\Big)-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j),x_j\big)\left\{\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\Big(\varphi^{-1+\gamma}(ih)-\big(b-\varphi(ih)\big)^{-1+\gamma}\Big)+c(h)h^{2(\gamma-1)}\right\}\geqslant$$
$$\geqslant(\min\{x_2,b-x_2\})^{-2+\gamma}-\frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j),x_j\big)\left\{\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\left[\left(\frac{1}{\varphi(ih)}\right)^{1-\gamma}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{1}{b-\varphi(ih)}\right)^{1-\gamma}\right]+c(h)h^{2(\gamma-1)}\right\}\geqslant(\min\{x_2,b-x_2\})^{-2+\gamma}-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j),x_j\big)\left\{c(h)h^{2(\gamma-1)}-\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\left(\frac{1}{b-\varphi(ih)}\right)^{1-\gamma}\right\}\geqslant$$
$$\geqslant(\min\{x_2,b-x_2\})^{-2+\gamma}-\frac{\partial f}{\partial q}\big(\mu(x_j),x_j\big)\left\{c(h)h^{2(\gamma-1)}-\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\,b^{\gamma-1}h^{2(\gamma-1)}\right\}.$$

Очевидно, что

$$c(h)\geqslant\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\,b^{\gamma-1}.$$

Тогда

$$\bar{L}_h Z\big(x_1,\varphi(ih)\big)\geqslant(\min\{x_2,b-x_2\})^{-2+\gamma}.$$

Кроме того, $Z(x)\geqslant w(x)=0$ для всех $x\in\Gamma_h$. На основании теоремы сравнения имеем $Z(x)=z(x)\geqslant w(x)$ для всех $x\in\bar{\Omega}_h$ и

$$w(x)\leqslant\max_{\bar{\Omega}_h}z(x). \tag{25}$$

Подсчитаем $\max_{\bar{\Omega}_h}z(x)$. Легко заметить, что $x_2=b-h^2$ является точкой максимума для функции $z(x)$, так как это число является корнем

Уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\left(x_2^{\gamma-1}-(b-x_2)^{\gamma-1}\right)+c(h)h^{2(\gamma-1)} = 0.$$

Тогда

$$\max_{\bar{\Omega}_h} z(x) = z(b-h^2) = \frac{4^{2-\gamma}}{\gamma(1-\gamma)}\left((b-h^2)^{\gamma}+h^{2\gamma}\right)+$$
$$+\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}\left(1-\frac{h^{2(1-\gamma)}}{(b-h^2)^{1-\gamma}}\right)(b-h^2)h^{2(\gamma-1)},$$

(26) $$\max_{\bar{\Omega}_h} z(x) \leqslant \frac{4^{2-\gamma}}{\gamma(1-\gamma)}(b^{\gamma}+1)+\frac{4^{2-\gamma}}{1-\gamma}bh^{2(\gamma-1)} \leqslant$$
$$\leqslant c_2+c_3h^{2(\gamma-1)} \leqslant c_4(1+h^{2(\gamma-1)}),$$

где c_2, c_3, c_4 определяются формулами (22).

Поскольку на основании (25), (26) имеем

$$w(x) \leqslant \max_{\bar{\Omega}_h} z(x) \leqslant c_4(1+h^{2(\gamma-1)}),$$

то неравенство (24) приводит к утверждению леммы 2.

Теперь оценим погрешность метода, отсюда будет следовать и сходимость. В качестве функции $v_j(x_j)$ возьмем решение задачи (2), (3). Вычислим значение разности

$$L_h[u_j]-f(x_j, u_j, D_{h,x_1}[u_j], D_{h,x_2}[u_j]).$$

Рассмотрим случай, когда $i \neq 1$. Тогда

$$u\big(x_1, \varphi((i+1)h)\big) = u\big(x_1, \varphi(ih)\big)+\big(\varphi((i+1)h)-\varphi(ih)\big)\frac{\partial u}{\partial x_2}\big(x_1, \varphi(ih)\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\big(\varphi((i+1)h)-\varphi(ih)\big)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\big(x_1, \varphi(ih)\big)+$$
$$+\frac{1}{6}\big(\varphi((i+1)h)-\varphi(ih)\big)^3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^3}\big(x_1, \varphi(ih)\big)+\frac{1}{6}\big(\varphi((i+1)h)-\varphi(ih)\big)^{3+\alpha}\xi^+(x).$$

Из оценок (4) вытекает неравенство

$$|\xi^+(x)| \leqslant \frac{\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x)-\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x^+)\right|}{|x-x^+|\,\alpha} \leqslant c_1\left(\min\{d\big(x_1, \varphi(ih)\big), d(x^+)\}\right)^{-1-\alpha-\varepsilon}.$$

Точка x^+ лежит на отрезке прямой, соединяющей узлы $x = \big(x_1, \varphi(ih)\big)$ и $x = \big(x_1, \varphi\big((i+1)h\big)\big)$. Вследствие этого получаем

$$|\xi^+(x)| \leqslant$$
$$\leqslant c_1\Big\{\min\Big[\varphi\big((i+1)h\big), \varphi\big((i-1)h\big), b-\varphi\big((i+1)h\big), b-\varphi\big((i-1)h\big)\Big]\Big\}^{-1-a-\varepsilon}.$$

Учитывая, что

$$\tfrac{1}{4}\varphi(ih) \leqslant \varphi\big((i\pm1)h\big) \leqslant 4\varphi(ih)$$

и

$$\tfrac{1}{4}\big(b-\varphi(ih)\big) \leqslant b-\varphi\big((i\pm1)h\big) \leqslant 4\big(b-\varphi(ih)\big),$$

имеем

$$|\xi^+(x)| \leqslant 4^{1+a+\varepsilon}c_1(\min\{x_2, b-x_2\})^{-1-a-\varepsilon}.$$

Аналогично получаем

$$u\Big(x_1, \varphi\big((i-1)h\big)\Big) = u\big(x_1, \varphi(ih)\big) - \Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big)\frac{\partial u}{\partial x_2}\big(x_1, \varphi(ih)\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\big(x_1, \varphi(ih)\big) - \frac{1}{6}\Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big)^3\times$$
$$\times\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\big(x_1, \varphi(ih)\big) + \frac{1}{6}\Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big)^{3+a}\xi^-(x),$$

причем

$$|\xi^-(x)| \leqslant 4^{1+a+\varepsilon}c_1(\min\{x_2, b-x_2\})^{-1-a-\varepsilon}.$$

Оба разложения дают формулу

$$-u_{\mathring{x}_2\mathring{x}_2}\big(x_1, \varphi(ih)\big) =$$
$$= -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\big(x_1, \varphi(ih)\big) - \frac{\varphi\big((i+1)h\big)-2\varphi(ih)+\varphi\big((i-1)h\big)}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\big(x_1, \varphi(ih)\big) -$$
$$-\frac{\Big(\varphi\big((i+1)h\big)-\varphi(ih)\Big)^{2+a}\xi^+(x)+\Big(\varphi(ih)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big)^{2+a}\xi^-(x)}{3\Big(\varphi\big((i+1)h\big)-\varphi\big((i-1)h\big)\Big)}.$$

Проводя аналогичные вычисления как в [3] и учитывая оценки (4), получаем

$$\left|-u_{\mathring{x}_2\mathring{x}_2}(x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)\right| \leqslant \tag{27}$$
$$\leqslant h^{1+a-\varepsilon}c_1 d^{-1-\varepsilon}(x)(\min\{x_2, b-x_2\})^{(1-a+\varepsilon)/2}\cdot(2\mathrm{b})^{(1+a-\varepsilon)/2}+$$
$$+h^{1+(a-\varepsilon)}\cdot\frac{2}{3}\frac{(6\sqrt{2b})^{1+a}}{(2b)^{\varepsilon/2(1+a)}}\cdot 4^{1+a+\varepsilon}c_1(\min\{x_2, b-x_2\})^{(1+a+\varepsilon)/2}\times$$
$$\times(\min\{x_2, b-x_2\})^{-1-a-\varepsilon}$$
$$\leqslant c_5 h^{1+a+\varepsilon}(\min\{x_2, b-x_2\})^{-(1+\epsilon)/2-\varepsilon/2}.$$

В случае $i=1$ имеем

$$u(x_1, 0) = u(x_1, \varphi(h)) - \varphi(h)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \varphi(h)) + \frac{1}{2}(\varphi(h))^2 \zeta^-(x),$$

$$u(x_1, \varphi(2h)) = u(x_1, \varphi(h)) + (\varphi(2h)-\varphi(h))\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \varphi(h)) + \\ + \frac{1}{2}(\varphi(2h)-\varphi(h))^2 \zeta^+(x),$$

где $|\zeta^\pm(x)| \leqslant c_1/d^\varepsilon$. Подставляя эти разложения в разностное отношение, получаем

$$(28)\qquad |u_{\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_2}(x_1, \varphi(h))| = \frac{1}{\varphi(2h)}|(\varphi(2h)-\varphi(h))\zeta^+(x) + \varphi(h)\zeta^-(x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varphi(2h)}\left((\varphi(2h)-\varphi(h))\frac{c_1}{d^\varepsilon} + \varphi(h)\frac{c_1}{d^\varepsilon}\right) = \frac{c_1}{d^\varepsilon} \leqslant \\ \leqslant c_6\frac{\varphi^{(1+\alpha-\varepsilon)/2}(h)}{\varphi^{(1+\alpha+\varepsilon)/2}(h)} \leqslant c_7 h^{1+\alpha-\varepsilon}\varphi^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2}(h).$$

Кроме этого из (4) следует

$$(29)\qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, \varphi(h))\right| \leqslant \frac{c_1}{d^\varepsilon} \leqslant c_8 h^{1+\alpha-\varepsilon}\varphi^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2}(h).$$

Объединяя (28) и (29) приходим к неравенству

$$(30)\qquad \left|-u_{\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)\right| \leqslant c_9 h^{1+\alpha-\varepsilon}\varphi^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2}(h),$$

если $x_2 = \varphi(h)$. Учитывая (27) и (30) имеем

$$(31)\qquad \left|-u_{\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)\right| \leqslant c_{10} h^{1+\alpha-\varepsilon}(\min\{x_2, b-x_2\})^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2}$$

для всех $x \in \Omega_h$,

где $c_{10} = \max(c_5, c_9)$. Оценим теперь разность

$$D_{h,x_2}[u(x)] - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x).$$

Сначала рассмотрим случай, когда $i \neq 1$. Тогда

$$u(x_1, \varphi((i-1)h)) = u(x_1, \varphi(ih)) - (\varphi(ih) - \varphi((i-1)h))\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \varphi(ih)) + \\ + \frac{1}{2}(\varphi(ih) - \varphi((i-1)h))^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\xi_i),$$

где $\xi_i \in \big((i-1)h, ih\big)$. Разложение это дает формулу

$$(32) \qquad D_{h,x_2}[u(x)] = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) - \frac{1}{2}\Big(\varphi(ih) - \varphi\big((i-1)h\big)\Big)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\xi_i).$$

Учитывая, что

$$\big|\varphi(ih) - \varphi\big((i-1)h\big)\big| \leqslant 6\sqrt{2b}\; h(\min\{x_2, b - x_2\})^{1/2},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\xi_i)\right| \leqslant \frac{c_1}{d^\varepsilon},$$

из (32) получаем

$$(33) \qquad \left|D_{h,x_2}[u(x)] - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| \leqslant 3\sqrt{2b}\, c_1 h d^{-\varepsilon}(\min\{x_2, b - x_2\})^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_{11} h (\min\{x_2, b - x_2\})^{1/2-\varepsilon}.$$

Если же $i = 1$, то

$$D_{h,x_2}[u(x)] = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) - \frac{1}{2}\varphi(h)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\xi_i),$$

где $\xi_i \in (0, h)$. Используя

$$\varphi(h) \leqslant 3bh^2 \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\xi_i)\right| \leqslant \frac{c_1}{d^\varepsilon},$$

получаем оценку

$$(34) \qquad \left|D_{h,x_2}[u(x)] - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| \leqslant c_{12} h^2 (\min\{x_2, b - x_2\})^{-\varepsilon},$$

если $x_2 = \varphi(h)$. Объединяя оценки (33) и (34) приходим к неравенству

$$(35) \qquad \left|D_{h,x_2}[u(x)] - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| \leqslant c_{13} h (\min\{x_2, b - x_2\})^{-\varepsilon}$$

для всех $x \in \Omega_h$,

где $c_{13} = \max(c_{11}, c_{12})$.

Аналогичные рассуждения приводят к следующим неравенствам по второй переменной:

$$(36) \qquad \left|-u_{\mathring{x}_1\mathring{x}_1}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)\right| \leqslant c_{14} h^{1+(\alpha-\varepsilon)} (\min\{x_2, b - x_2\})^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2}$$

для всех $x \in \Omega_h$,

$$(37) \qquad \left|D_{h,x_1}[u(x)] - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| \leqslant c_{15} h (\min\{x_2, b - x_2\})^{-\varepsilon}$$

для всех $x \in \Omega_h$.

В силу (31) и (35)-(37), для всех $x_j \in \overline{\Omega}_h$ имеем

$$|D_{h,x_2}[u_j(x_j)] - (u_{x_2})_j| \leqslant c_{13} h (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{-\varepsilon},$$

$$|D_{h,x_1}[u_j(x_j)] - (u_{x_1})_j| \leqslant c_{15} h (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{-\varepsilon},$$

$$\big|f\big(x_j, u_j(x_j), D_{h,x_1}[u_j(x_j)], D_{h,x_2}[u_j(x_j)]\big) - f\big(x_j, u_j(x_j), (u_{x_1})_j, (u_{x_2})_j\big)\big| \leqslant \\ \leqslant c_{16} h (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{-\varepsilon},$$

$$|\Delta_h[u_j(x_j)] - \Delta[u_j(x_j)]| \leqslant c_{17} h^{1+\alpha-\varepsilon} (\min\{x_2, b - x_2\})^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2}.$$

Отсюда следует

$$\big|L_h[u_j(x_j)] - f\big(x_j, u_j(x_j), D_{h,x_1}[u_j(x_j)], D_{h,x_2}[u_j(x_j)]\big)\big| \leqslant \\ \leqslant c_{18} h^{1+\alpha-\varepsilon} (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{-(1+\alpha)/2-\varepsilon/2} + c_{19} h (\min\{x_{2j}, b - x_{2j}\})^{-\varepsilon}$$

для всех $x_j \in \Omega_h$.

Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть решение задачи* (2), (3) *принадлежит* $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ *и для этого решения справедливы оценки* (4). *Пусть выполняются условия* (1), (5). *Тогда разностная задача* (6), (7) *однозначно разрешима и справедлива оценка*

$$\max_{\overline{\Omega}_h} |u_j^h(x_j) - u_j(x_j)| \leqslant c_{20} h^{\alpha-\varepsilon},$$

где $u_j^h(x_j)$ *— решение разностной задачи* (6), (7), $u_j(x_j)$ *— точное решение задачи* (2), (3), α, ε *— фиксированные числа, причем* $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon \in [0, 1)$ *и* $\varepsilon < \alpha$.

Замечание. Мы выше всюду предполагали, что выполнено условие (5): $f_p \leqslant 0$, $f_q \leqslant 0$. Заметим, что задача (2), (3) аппроксимируется разностной схемой

$$-\Delta_h[u_j^h] - f\{x_{1j}, x_{2j}, u_j^h, D_{h,\mathring{x}_1}[u_j^h], D_{h,\mathring{x}_2}[u_j^h]\}, \quad j = 1, \ldots, N_1,$$

$$u_k^h = 0, \quad k = N_1 + 1, \ldots, N_2, \tag{38}$$

где

$$D_{h,\mathring{x}_1}[u_j^h] = \frac{u_j^h(x_1 + \mu_2, x_2) - u_j^h(x_1 - \mu_1, x_2)}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$D_{h,\mathring{x}_2}[u_j^h] = \frac{u_j^h(x_1, x_2 + \mu_3) - u_j^h(x_1, x_2 - \mu_4)}{\mu_3 + \mu_4},$$

и условие (5) можно заменить условием

(39) $$f_p \leqslant 0 \quad \text{или} \quad f_q \leqslant 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 1, доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (39). *Пусть, кроме того, решение задачи* (2), (3) *принадлежит* $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$. *Тогда разностная схема* (38) *однозначно разрешима и для* h, *удовлетворяющих неравенству* (см. [2])

$$h^3 < \frac{1}{3K\min(a_2, b)},$$

справедливы оценки

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |u_j^h(x_j) - u_j(x_j)| \leqslant \bar{c}_1 h^{2(\alpha-\varepsilon)} \quad \text{для всех } \alpha \in (0,1) \text{ и всех } \varepsilon \in [0,1)$$

или

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |u_j^h(x_j) - u_j(x_j)| \leqslant \bar{c}_2 h \quad \text{для } \varepsilon \leqslant \tfrac{1}{2},$$

или

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |u_j^h(x_j) - u_j(x_j)| \leqslant \bar{c}_3 h^{1+\eta} \quad \text{для } 0 \leqslant \eta < \alpha < 1,$$

где $u_j^h(x_j)$ — *решение системы* (38), $u_j(x_j)$ — *точное решение задачи* (2), (3), *а* $\eta, \alpha, \varepsilon$ — *фиксированные числа.*

Цитированная литература

[1] L. Bers, *On mildly nonlinear partial differential equations of elliptic type*, J. Res. Nat. Bur. Standards 51 (1953), стр. 229-236.

[2] — F. John and M. Schechter, *Partial differential equations*, New York 1964.

[3] Г. И. Марчук и В. В. Шайдуров, *Повышение точности решений разностных схем*, Москва 1979.

[4] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Москва 1971.

[5] Е. А. Волков, *Дифференциальные свойства решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике*, Труды МИАН СССР 77 (1965), стр. 89-112.

[6] З. Залевски, *К решению методом сеток задачи Дирихле для эллиптического уравнения в области с угловой точкой*, ВИНИТИ, Но. 3555 (1979), стр. 37.

УНИВЕРСИТЕТ ИМ. С. М. КИРОВА
БАКУ, СССР

ZAKŁAD MATEMATYKI
WYŻSZA SZKOŁA MORSKA, SZCZECIN

Поступило в редакцию 8. 7. 1980