

J. ODERFELD i J. STANISŁAWSKI (Warszawa)

## O PEWNYM PRZEPISIE ODBIORCZYM

**1. Wstęp.** Z populacji ciągłej pobieramy próbkę złożoną z  $n$  elementów i ustawiamy je w kolejności niemalejącej:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Taką próbkę nazywamy *uporządkowaną*.

W niektórych normach technicznych polskich i zagranicznych spotykamy przepisy odbiorcze oparte na pojęciu próbek uporządkowanych. Podajemy kilka przykładów zaczerpniętych<sup>1)</sup> z Polskich Norm [1] zmieniając nieco, dla jasności, sformułowania przepisów i usuwając nieistotne szczegóły.

Ia. PN/B-373 z 1945 r. Badania materiałów kamiennych. „Wytrzymałość kamienia otrzymuje się jako średnią arytmetyczną wyników zgniatania 3 znormalizowanych elementów kamiennych. Wyniki nie powinny się różnić od średniej o więcej niż 20% jej wartości; w przeciwnym przypadku badanie należy uzupełnić na dodatkowych elementach”.

Inne normy szczegółowe ustalają, ile co najmniej powinna wynosić wytrzymałość w ten sposób obliczona.

I b. PN/B-204 z 1931 r. Normalny cement portlandzki. Przepis jest podobny do Ia z następującymi różnicami: bada się 6 elementów znormalizowanych; odchylenia od średniej powinny wynosić co najwyżej 10% jej wartości; liczba dodatkowych elementów jest określona i wynosi sześć.

II. PN/B-304 z 1948 r. Cegły drążone (dziurawki) wypalane z gliny.

W badaniu na wytrzymałość zgniatamy 5 cegieł.

„Średnia arytmetyczna wyników nie powinna być mniejsza od 50 kG/cm<sup>2</sup>, jednakże 40% cegieł może dać wyniki zawarte między 40 a 50 kG/cm<sup>2</sup>”.

---

<sup>1)</sup> Materiał do tych przykładów zawdzięczamy inż. W. Bolińskiemu z Polskiego Komitetu Normalizacyjnego.

III. PN/B—04302 z 1951 r. Cement, badanie cech wytrzymałościowych. Łamiemy 6 znormalizowanych beleczek. „Z wyników badania 6 beleczek oblicza się średnią arytmetyczną. Jeśli jeden z wyników różni się od średniej o więcej niż 5% jej wartości, należy go odrzucić i obliczyć średnią pozostałych 5 wyników, która jest wynikiem ostatecznym. Jeśli wyników różniących się o więcej niż 5% od pierwszej średniej jest więcej niż 2, badanie należy powtórzyć”.

Te przykłady ilustrują trzy odmiany spotykanych przepisów. Nie jest naszym celem ich szczegółowa analiza techniczna. Łatwo zauważyć, że niektóre przepisy nie są jednoznacznie określone, na przykład w Ia nie wiadomo, ile ma być dodatkowych elementów, w Ib i III nie wiadomo, czy przy ponownym badaniu uwzględnia się badanie pierwsze itd.

Nie o to nam jednak chodzi, gdyż wieloznaczność można usunąć przez stosowne uzupełnienie. Interesuje nas co innego, mianowicie to, że każdy zacytowany przepis ma (po usunięciu ewentualnej wieloznaczności) zupełnie określone konsekwencje probabilistyczne. Mianowicie dla każdego rozkładu badanej właściwości w partii przedmiotów i dla każdego przepisu jest zupełnie określone prawdopodobieństwo, że partia będzie uznana za dobrą. Bez znajomości tego prawdopodobieństwa nie wiadomo, jakie jest techniczne i gospodarcze znaczenie przepisu.

Otóż, o ile wiemy, te konsekwencje probabilistyczne nie były znane autorom zacytowanych przepisów. Ponadto nie znaleźliśmy o nich żadnych danych w dostępnym nam piśmiennictwie krajowym ani zagranicznym. Z tego powodu uznaliśmy za celowe zająć się analizą probabilistyczną podobnych przepisów opartych na próbce uporządkowanej o małej liczności.

W dalszym ciągu rozważamy najprostszy przepis tego rodzaju. Oznaczamy go Ic, ponieważ jest podobny do autentycznych przepisów Ia i Ib podanych na początku.

Ic. „Z partii produktu przedstawionego do odbioru pobrać próbkę złożoną z 3 przedmiotów i na każdym z nich zmierzyć badaną właściwość. Wyniki pomiaru uszeregować niemalejąco

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3$$

i obliczyć średnią  $\bar{x}$ . Partię uznać za dobrą, jeśli zachodzi zespół nierówności

$$(1) \quad \bar{x} \geq A, \quad \bar{x} - x_1 \leq k\bar{x},$$

gdzie  $A$  i  $k$  są liczbami stałymi, określonymi z góry”.

Zakładamy (co jest w przybliżeniu słuszne w wielu przypadkach praktycznych), że badana właściwość ma w partii rozkład normalny o nieznannej średniej  $m$  i nieznanym odchyleniu średnim  $\sigma$ ; taki rozkład

oznaczamy symbolem  $N(m, \sigma)$ . Zakładamy, że  $\sigma$  jest o tyle mniejsze od  $m$ , iż prawdopodobieństwo, że  $\bar{x} < 0$ , jest znikomo małe. Drugie założenie ma sens we wszelkich przypadkach praktycznych, do których przepis Ic może się stosować. Pytamy, jakie jest prawdopodobieństwo, że partia będzie uznana za dobrą, zależnie od  $m$  i  $\sigma$ ?

Analiza tego przepisu sprowadza się w znany sposób do zbadania łącznego rozkładu trzech tzw. *statystyk pozycyjnych* w próbie wylosowanej z populacji normalnej. M. Fisż z Instytutu Matematycznego PAN podał rozwiązanie ogólne w postaci całki potrójnej. Niestety jednak oszacowanie tej całki okazało się bardzo kłopotliwe przy użyciu tych środków rachunkowych, jakimi dysponowaliśmy. Jest zaś jasne, że trudności rachunkowe szybko rosną wraz z liczbą statystyk pozycyjnych (w przykładzie III jest 12 statystyk); ponadto wolno przypuszczać, że sprawę do reszty skomplikowałoby przyjęcie skośnego rozkładu w populacji generalnej (np. gamma lub logarytmnormalnego), co wydaje się celowe w zastosowaniu do niektórych materiałów budowlanych.

Z tych powodów uznaliśmy za słusze rozwiązać<sup>2)</sup> zagadnienie w sposób czysto doświadczalny. Sposób postępowania pokażemy na przykładzie przepisu Ic, jednakże bez większych trudności można podobnie zbadać konsekwencje każdego przepisu typu I, II lub III.

**2. Redukcja zagadnienia.** Rozwiązanie sprowadza się, ogólnie biorąc, do stworzenia sztucznej populacji o założonych własnościach, do wielokrotnego wylosowania z niej próbki trójelementowej i do przeliczenia, jaka jest frakcja losowań, w których spełnił się warunek (1).

Byłoby kłopotliwe, a zresztą zupełnie niepotrzebne, badać w ten sposób dla każdego przepisu (określone  $A$  i  $k$ ) różne populacje sztuczne (różne  $m$  i  $\sigma$ ). Można bowiem zredukować nasze zagadnienie do zagadnienia prostszego i przeprowadzić eksperyment na jednej tylko populacji sztucznej  $N(0, 1)$ .

Wprowadzamy nowe zmienne losowe

$$(2) \quad \xi_i = (x_i - m)/\sigma \quad (i = 1, 2, 3),$$

o rozkładzie  $N(0, 1)$ . Średnia  $\bar{\xi}$  próbki trójelementowej ma rozkład  $N(0, 1/\sqrt{3})$ .

Wprowadzamy nowe parametry

$$(3) \quad \dot{a} = \sigma/m,$$

<sup>2)</sup> Artykuł napisaliśmy w lipcu 1953 r. W chwili skierowania go do druku (grudzień 1954 r.) wyłoniła się jeszcze inna możliwość, polegająca na użyciu jednej z maszyn elektronicznych budowanych w Instytucie Matematycznym PAN. Interesujące będzie porównanie wyników.

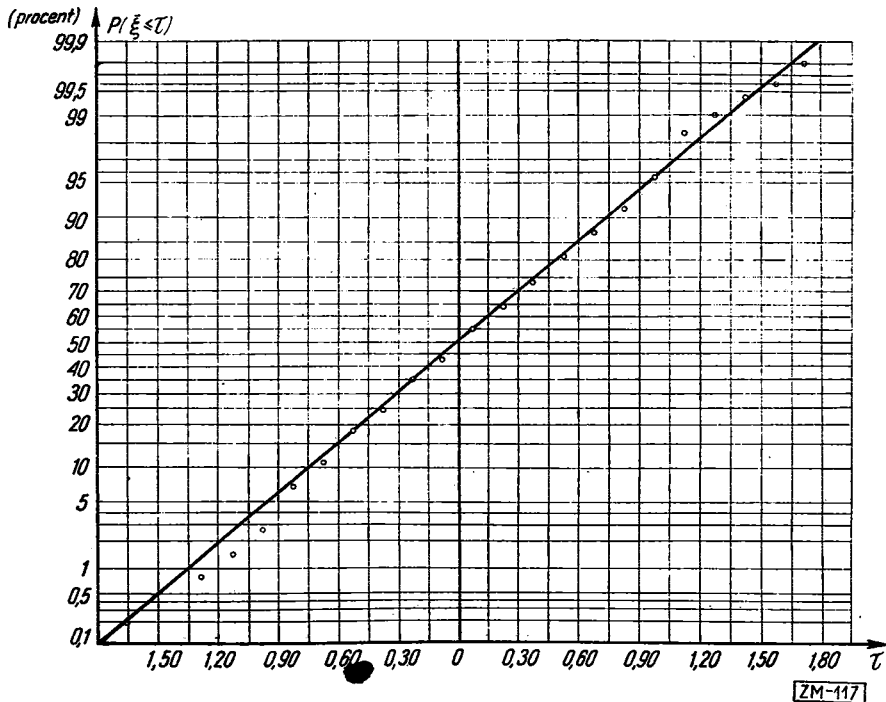
$$(4) \quad t = \sqrt{3}(A - m)/\sigma.$$

Łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo  $P$  uznania partii za dobrą, czyli prawdopodobieństwo spełnienie zespołu nierówności (1), jest

$$(5) \quad P = p(\xi \geq t/\sqrt{3}, (1 + a\xi_1)/(1 + a\bar{\xi}) > 1 - k),$$

a więc jest funkcją tylko trzech parametrów.

3. Opis eksperymentu. Populacją sztuczną był zbiór wartości  $\eta_j = -3,0, -2,9, \dots, 2,9, 3,0$ .



Rys. 1. Porównanie dystrybuanty empirycznej (kółka) z teoretyczną (linia ciągła)

Każdej wartości  $\eta_j$  zostały przyporządkowane numery w granicach od  $10000F(\eta_j - 0,05)$  do  $10000F(\eta_j + 0,05)$ , gdzie  $F(\dots)$  oznacza dystrybuantę rozkładu  $N(0,1)$  z zaokrągleniem do 0,0001.

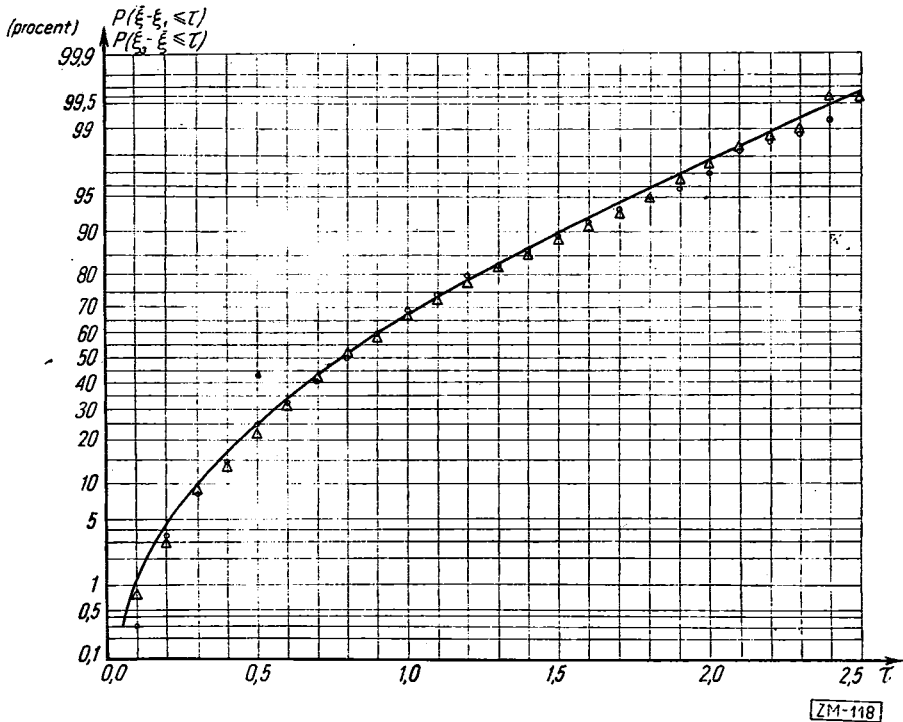
Losowanie jednej wartości  $\eta_j$  polegało na wylosowaniu 4-cyfrowego numeru za pomocą tablicy liczb przypadkowych i na odczytaniu wartości  $\eta_j$ , która temu numerowi odpowiada w populacji sztucznej.

Dokładniejszy opis takiej populacji sztucznej można znaleźć na przykład w pracy M. G. Kendalla [2].

W podany sposób wylosowaliśmy 1500 wartości zmiennej losowej o rozkładzie  $N(0,1)$ , zgrupowaliśmy je w kolejności losowania w 500

próbek uporządkowanych po 3 elementy i dla każdej próbki obliczyliśmy realizacje zmiennych losowych  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\xi} - \xi_1$  oraz  $\xi_3 - \bar{\xi}$ .

Następnie sprawdziliśmy, czy otrzymany zbiór nie wykazuje poważniejszych anomalii co do średnich i co do wartości skrajnych w prób-



Rys. 2. Porównywanie dystrybuanty empirycznej  $\circ$  (kółka) oraz dystrybuanty empirycznej  $\Delta$  (trójkąty) z teoretyczną (linia ciągła)

kach. W tym celu porównaliśmy dystrybuanty zmiennych losowych  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\xi} - \xi_1$  i  $\xi_3 - \bar{\xi}$  z teoretycznymi. Teoretyczny rozkład  $\bar{\xi}$  jest  $N(0, 1/\sqrt{3})$ , a pozostałe dwa rozkłady teoretyczne są jednakowe i znane w postaci tablicy ([3]).

Porównanie graficzne mamy na rysunkach 1 i 2. Zgodność na oko wydaje się dobra. Aby ją ocenić liczbowo, zastosowaliśmy zwykły test zgodności za pomocą kryterium chi-kwadrat. Empiryczne wartości, osobno zmiennych losowych  $\bar{\xi}$ ,  $\xi_1 - \bar{\xi}$  oraz  $\xi_3 - \bar{\xi}$ , ułożyliśmy w szeregi rozdzielcze o  $n$  klasach i obliczyliśmy wyrażenia

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(v_i - f_i)^2}{f_i},$$

gdzie  $v_l$  ( $l=1,2,\dots,n$ ) oznacza licznosc empiryczna w  $l$ -tej klasie, a  $f_l$  — teoretyczna. Nastepnie obliczyliśmy  $p(\chi^2 > \chi_0^2)$  dla  $n-1$  stopni swobody. Wyniki byly nastepujace:

Zmienna losowa	Liczba stopni swobody $n-1$	$p(\chi^2 > \chi_0^2)$
$\bar{\xi}$	16	0,24
$\xi - \xi_1$	18	0,12
$\xi_3 - \bar{\xi}$	19	0,67

Wyniki te uznalismy za dowod dostatecznej zgodnosci.

Nastepnie wybralismy kilka wartosci parametrów  $a$ ,  $k$  i  $t$ , które, jak sádzalismy, obejmujac cały obszar przewidywanych zastosowań przepisu Ic.

Wybierajac wartosci na  $t$  kierowalismy się tym, że wielkosć  $t$  określa jednoznacznie prawdopodobienstwo  $P_1$  zachodzenia pierwszej częsci nierównosci (1), a mianowicie, że

$$(6) \quad P_1(t) = P_1(\bar{x} \geq A) = P_1(\bar{\xi} \geq t/\sqrt{3}).$$

Przyjmujac na  $P_1$  wartosci 0,8, 0,9, 0,95 i 0,975 otrzymalismy z tablic funkcji normalnej wartosci

$$t/\sqrt{3} = -0,4859, -0,7399, -0,9437, -1,1316.$$

Decyzja co do zakresów parametrów  $a$  i  $k$  byla łatwa, bo dostateczna wskazówkę dawaly przepisy Polskich Norm, z których kilka przytoczyliśmy we wstepie. Ustalajac konkretne wartosci na  $a$  i  $k$ , kierowalismy się tym, że  $a$  jest współczynnikiem zmienności w rozkładzie  $N(m, \sigma)$ , a więc miarą jego rozrzutu, natomiast  $k$  jest miarą największego rozrzutu w próbkach, pozwalajac jeszcze uznać partię za dobrą. Dlatego

wydało się sluszne przypuszczenie, że stosunek  $k/a$  gra istotną rolę w prawdopodobienstwie zajścia drugiej częsci nierównosci (1). Ostatecznie przyjeliśmy kombinacje parametrów  $a$  i  $k$  podane tablicy 1:

Przewidywania te byly heurystyczne, jak pokazemy jednak dalej, okazaly się trafne.

TABLICA 1

Wybrane kombinacje parametrów  $a$  i  $k$ 

$a$	$k$			
0,05	0,04	0,06	0,08	0,10
0,10	0,08	0,12	0,16	0,20
0,20	0,16	0,24	0,32	0,40
$k/a$	0,8	1,2	1,6	2,0

Dla każdej kombinacji  $a$ ,  $k$  i  $t$  policzyliśmy, ile trójek z pięciuset wylosowanych spełnia warunki

$$\xi \geq \frac{t}{\sqrt{3}} \quad \text{oraz} \quad \frac{(1 + a\xi_1)}{(1 + a\bar{\xi})} > 1 - k$$

równoważne z zespołem (1). Dzieliąc liczbę tych trójek przez 500 znaleźliśmy oszacowanie prawdopodobieństwa  $P$ , że partia byłaby uznana za dobrą. W ten sposób otrzymaliśmy tablicę 2.

TABLICA 2

$$P = P(\bar{\xi} \geq t/\sqrt{3}, (1 + a\xi_1)/(1 + a\bar{\xi}) > 1 - k)$$

$t/\sqrt{3} \backslash k$	0,04	0,06	0,08	0,10	
-0,4859	0,408	0,640	0,732	0,776	$a = 0,05$
-0,7399	0,468	0,734	0,838	0,884	
-0,9497	0,510	0,782	0,886	0,940	
-1,1316	0,516	0,796	0,904	0,962	
$t/\sqrt{3} \backslash k$	0,08	0,12	0,16	0,20	
-0,4859	0,410	0,642	0,730	0,776	$a = 0,10$
-0,7399	0,468	0,738	0,834	0,884	
-0,9497	0,508	0,784	0,882	0,938	
-1,1316	0,512	0,796	0,900	0,960	
$t/\sqrt{3} \backslash k$	0,16	0,24	0,32	0,40	
-0,4859	0,434	0,642	0,738	0,780	$a = 0,20$
-0,7399	0,490	0,738	0,838	0,888	
-0,9497	0,520	0,784	0,886	0,940	
-1,1316	0,522	0,794	0,904	0,962	
$k/a$	0,8	1,2	1,6	2,0	

4. Opracowanie wyników. Zgodnie z przewidywaniami okazało się, że wartości  $P$  spisane w tablicy 1 zależą przede wszystkim od  $t$  i od  $k/a$ . To pozwoliło streścić wyniki w tablicy 3, w której są spisane średnie wartości  $P$ . W tej tablicy zamiast parametru  $k/a$  podano jego odwrotność

$$(7) \quad r = a/k = \sigma/mk;$$

okazało się to dogodne dla późniejszej interpolacji.

TABLICA 3

$$P = P(t, r)$$

$t/\sqrt{3}$ \diagdown $r$	1,25	0,833	0,625	0,5	0
-0,4859	0,417	0,641	0,733	0,777	$P_1(t) = 0,800$
-0,7399	0,475	0,736	0,836	0,885	$P_1(t) = 0,900$
-0,9437	0,512	0,783	0,884	0,939	$P_1(t) = 0,950$
-1,1316	0,516	0,795	0,902	0,961	$P_1(t) = 0,975$

W ostatniej kolumnie podaliśmy wartości  $P$  dla  $r=0$ , czyli dla  $k=\infty$ . Są to po prostu prawdopodobieństwa  $P_1(t)$  określone przez (6); podaliśmy je, gdyż jest jasne, że dla  $k=\infty$  nasz przepis sprowadza się do zwykłego orzekania na podstawie średniej z próbki wylosowanej z populacji normalnej.

Dalszym naturalnym krokiem było sprawdzenie, czy prawdopodobieństwo  $P$  daje się przedstawić w postaci

$$(8) \quad P(t, r) = P_1(t) P_2(r).$$

W tym celu wystarczyło podzielić wartości  $P$  z tablicy 3 przez odpowiednie wartości  $P_1$  i sprawdzić, czy  $P_2$  jest praktycznie niezależne od  $t$ . Tak powstała tablica 4.

TABLICA 4

$$P_2 = P/P_1$$

$t/\sqrt{3}$ \diagdown $r$	1,25	0,833	0,625	0,5
-0,4859	0,521	0,801	0,916	0,971
-0,7399	0,528	0,818	0,929	0,983
-0,9437	0,534	0,824	0,931	0,988
-1,1316	0,529	0,815	0,925	0,986
średnia	0,528	0,814	0,925	0,982

Jak widzimy, przewidywania potwierdziły się, gdyż w każdej kolumnie tablicy 4 wartości  $P_2$  bardzo mało się różnią między sobą. Dlatego w najniższym wierszu tablicy 4 podaliśmy średnie wartości  $P_2$ . Te wartości doświadczone wyrównaliśmy stosując metodę najmniejszej sumy kwadratów; interpolując parabolicznie otrzymaliśmy ostatecznie tablicę 5.



W ten sposób rozwiązaliśmy postawione zadanie. Jeśli z populacji generalnej  $N(m, \sigma)$  losujemy próbki trójelementowe, to prawdopodobieństwo  $P(\bar{x} \geq A, \bar{x} - x_1 < k\bar{x})$  można obliczyć według następującego schematu roboczego:

1° Obliczyć

$$T = (m - A)\sqrt{3}/\sigma; \quad r = \sigma/mk.$$

2° Odczytać z tablic rozkładu normalnego

$$P_1 = 0,5 + \theta(T),$$

gdzie  $\theta$  oznacza funkcję Laplace'a.

3° Odczytać  $P_2$  z tablicy 5.

4° Obliczyć  $P = P_1 P_2$ .

Można również, po obliczeniu  $T$  i  $r$ , znaleźć od razu  $P$  z nomogramu na rysunku 3.

Na zakończenie zwrócimy uwagę, że wzór (8) wskazuje — w zakresie i w granicach dokładności naszego eksperymentu — że przy losowaniu z populacji normalnej zmienne losowe  $\bar{x}$  oraz  $x_1/\bar{x}$  są praktycznie niezależne.

**5. Przykłady zastosowania.** PRZYKŁAD 1. Z populacji generalnej o rozkładzie  $N(182, 29)$  losujemy próbki trójelementowe.  $x_1$  oznacza najmniejszy element, a  $\bar{x}$  średnią. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jednocześnie zajdą nierówności  $\bar{x} \geq 160$  i  $\bar{x} - x_1 < 0,2\bar{x}$ ?

Obliczamy

$$T = (182 - 160)\sqrt{3}/29 = 1,31, \quad r = 29/182 \cdot 0,2 = 0,796.$$

Z nomogramu na rysunku 3 odczytujemy  $P = 0,744$ .

PRZYKŁAD 2. Partię materiałów budowlanych uznaje się za dobrą, jeśli po zbadaniu na wytrzymałość próbki trójelementowej zachodzą nierówności

$$(9) \quad \bar{x} \geq 160 \text{ kG/cm}^2,$$

$$(10) \quad \bar{x} - x_1 < 0,2\bar{x}.$$

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą zależnie od parametrów rozkładu wytrzymałości, który przyjmujemy w postaci  $N(m, \sigma)$ .

Ponadto należy porównać ten przepis z takim, w którym by warunek (10) był pominięty.

Mamy  $A = 160$ ,  $k = 0,2$ .

Według schematu roboczego

$$(11) \quad T = (m - 160)\sqrt{3}/\sigma, \quad r = 5\sigma/m.$$

TABLICA 5

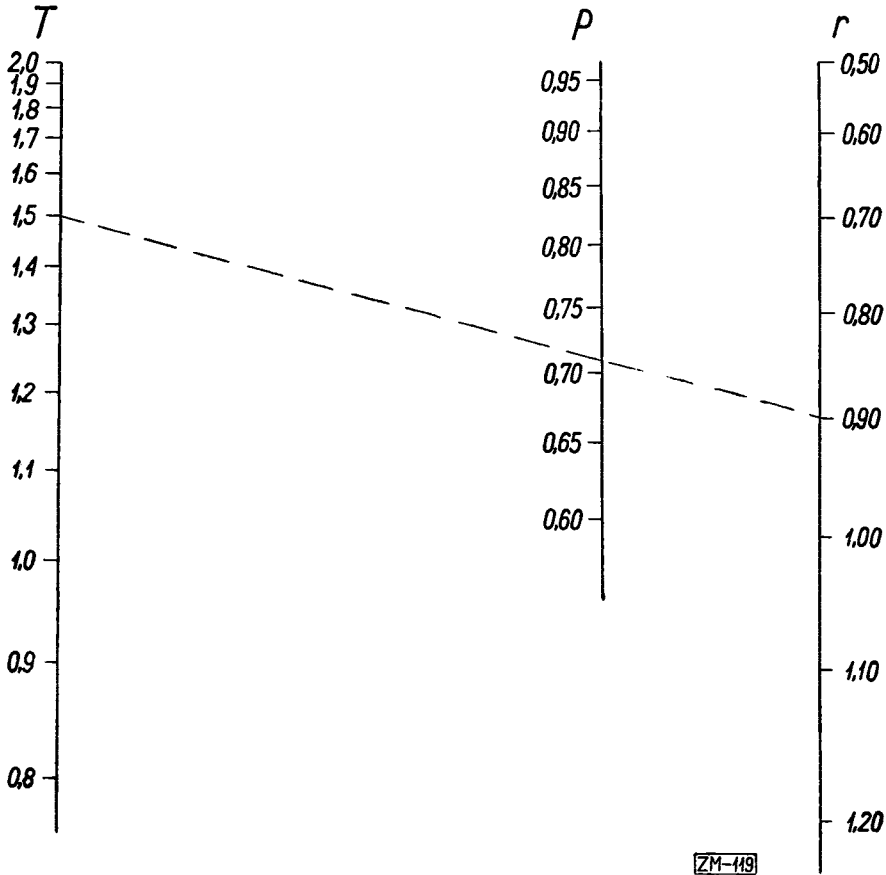
Wyrównane  
wartości  $P_2(r)$

$r$	$P_2$
0,5	0,990
0,6	0,939
0,7	0,880
0,8	0,819
0,9	0,756
1,0	0,692
1,1	0,626
1,2	0,559

Rozwiązując ten układ równań względem  $m$  i  $\sigma$  znajdujemy

$$(12) \quad m = 1386 / (8,66 - Tr), \quad \sigma = 277r / (8,66 - Tr).$$

Następnie na nomogramie zaznaczamy na skali  $P$  punkt odpowiadający jakiejś wartości prawdopodobieństwa, np. 0,71.



Rys. 3. Nomogram  $P$  w zależności od  $T$  i  $r$ . Przykład:  $T=1,5$ ,  $r=0,9$ ,  $P=0,71$

Prowadząc przez ten punkt promienie do przecięcia ze skalami  $T$  i  $r$  odczytujemy odpowiadające sobie wartości  $T$  i  $r$ , które wstawione do wzorów (12) dają pary wartości  $m$  i  $\sigma$ . Każda z tych par określa populację  $N(m, \sigma)$ , która daje prawdopodobieństwo  $P=0,71$ .

Powtarzając te czynności dla różnych wartości  $P$  dochodzimy łatwo do krzywych wykreślonych liniami ciągłymi na rysunku 4.

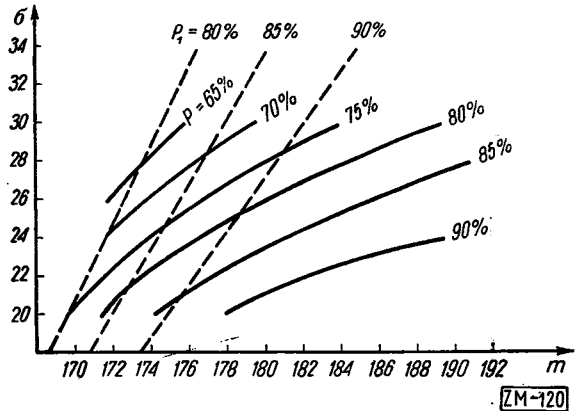
Z tego wykresu można się łatwo zorientować, jakie są konsekwencje przepisu. Jeśli na przykład chcemy, żeby ryzyko odrzucenia partii było

co najwyżej 10% ( $P \geq 90\%$ ), a wiadomo, że odchylenie średnie wytrzymałości jest  $24 \text{ kg/cm}^2$ , to trzeba starać się o to, by średnia wytrzymałość wynosiła co najmniej  $189,5 \text{ kg/cm}^2$ .

Na rysunku 4 pokazano liniami kreskowanymi krzywe stałego prawdopodobieństwa  $P_1$ , gdy jedynym wymaganiem jest (9). Linie  $P_1 = \text{const}$  są w układzie  $m, \sigma$  liniami prostymi o równaniu

$$(m - 160) \sqrt{3} / \sigma = \text{const.}$$

Porównując przebieg linii ciągłych i kreskowanych możemy ocenić zaostwienie przepisu, jakie powoduje dodatkowy warunek (10). Jeśli na przykład prawdopodobieństwo uznania za dobrą partii, w której badana właściwość ma rozkład  $N(m, \sigma)$ , powinno być co najmniej 90%, to otrzymujemy zależnie od odchylenia średniego następujące wymagane średnie  $m$ :



Rys. 4. Zależność między  $\sigma$  a  $m$  dla stałych  $P$  lub  $P_1$  ( $A=160, k=0,2$ )

$\sigma$	$m$ co najmniej przy przepisie		różnica
	według (9)	według (9) i (10)	
20	174,5	178	3,5
24	178	189,5	11,5

Jak widzimy, dodanie warunku (10) zaostrza przepis według (9) tym mocniej, im  $\sigma$  jest większe, czyli im partia jest mniej jednorodna. W tym właśnie tkwi ekonomiczny sens przepisu.

PRZYKŁAD 3. Partię materiałów uznaje się za dobrą, jeśli po zbiorze na wytrzymałość próbki trójelementowej zachodzą nierówności

$$(13) \quad \bar{x} \geq 160 \text{ kg/cm}^2,$$

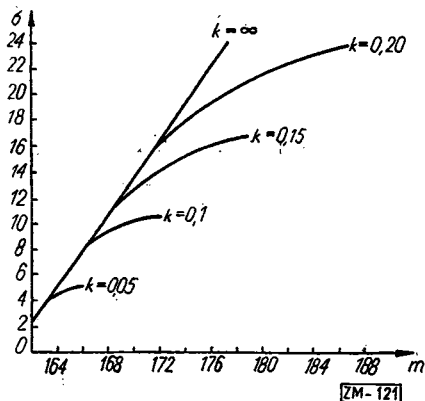
$$(14) \quad \bar{x} - x_1 \leq k\bar{x}.$$

Rozważamy pięć przepisów scharakteryzowanych różnymi wartościami  $k$ , mianowicie  $k=0,05; 0,1; 0,15; 0,20; \infty$ . Należy porównać te przepisy ze sobą.

W sposób analogiczny do opisanego w przykładzie 2 dochodzimy do wykresów na rysunku 5. Każdy z nich daje zależność między  $\sigma$  a  $m$  przy ustalonym prawdopodobieństwie  $P = 90\%$  uznania partii za dobrą i przy różnych wartościach  $k$ .

Im  $k$  jest większe, tym przepis jest łagodniejszy. Wartość  $k = \infty$  odpowiada pominięciu warunku (14).

Dla każdej ustalonej wartości  $k$ , przy dostatecznie jednorodnej partii (dostatecznie małe  $\sigma$ ), jest praktycznie obojętne, czy przepis zawiera dwa warunki (13) i (14), czy też tylko warunek (13).



Rys. 5. Zależność między  $\sigma$  a  $m$  dla różnych wartości  $k$  ( $A = 160$ ,  $P = 90\%$ )

#### Prace cytowane

- [1] Polskie Normy: PN/B-204 z 1931 r.; PN/B-373 z 1945 r.; PN/B-304 z 1948 r.; PN/B-04302 z 1951 r.  
 [2] M. G. Kendall, *The advanced theory of statistics*, t. I, London 1948, str. 196.  
 [3] F. E. Grubbs, *Sample criteria for testing outlying observations*, *Annals of Math. Stat.* 21(1950), str. 27-58.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 27. 7. 1953 r.

ЯН ОДЕРФЕЛЬД и Е. СТАНИСЛАВСКИЙ (Варшава)

#### ОБ ОДНОМ ПРАВИЛЕ ПРИЕМА

##### РЕЗЮМЕ

Правило приема, часто применяемые в практике, заключается в том, что партия признается годной, если в результате проверки выборки состоящей из  $n$  элементов (обычно несколько штук) получаем

$$\bar{x} \geq A, \quad \bar{x} - x \leq k\bar{x},$$

где  $\bar{x}$  — средняя,  $x$  — минимальное значение в выборке,  $A$  и  $k$  — постоянные величины. Правило это применяется в различных видах, перечисленных в работе.

Предположено, что распределение рассматриваемой характеристики в партии — нормальное. Приведено описание экспериментального способа осу-

ществления довольно общего теоретико-вероятностного анализа таких правил; дана номограмма результатов для  $n=3$  и проиллюстрировано применение на нескольких примерах.

---

J. ODERFELD and J. STANISŁAWSKI (Warszawa)

*ON A CERTAIN ACCEPTANCE REGULATION*

SUMMARY

According to an acceptance regulation frequently applied in practice a lot is considered good if on examining a sample consisting of  $n$  (usually a few) elements we obtain

$$\bar{x} \geq A, \quad \bar{x} - x_1 \leq k\bar{x},$$

where  $\bar{x}$  denotes the mean,  $x_1$  — the least result in the sample,  $A$  and  $k$  being constant. This regulation appears in several variants, which are discussed in the paper.

It is assumed that the distribution of the examined characteristics in the lot is normal. An experimental method permitting a fairly general probabilistic analysis of such regulations is described. The paper contains a nomogram listing the results for  $n=3$  and shows the application on a few examples.

---