

W. A. WOYCZYŃSKI (Wrocław)

*DRGANIA SWOBODNE PEWNEGO UKŁADU
Z ADIABATYCZNĄ CHARAKTERYSTYKĄ SIŁ SPRĘŻYSTYCH*

1. Wstęp. W niniejszej nocie rozważa się drgania układu konserwatywnego, opisane równaniem

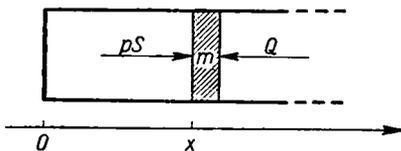
$$(1.1) \quad z'' + (1-z)^{-\kappa} - 1 = 0,$$

gdzie $z = z(\tau) < 1$, $' = \frac{d}{d\tau}$, a κ oznacza pewną stałą dodatnią. Do postaci (1.1) można doprowadzić równanie ruchu tłoka, poruszającego się bez tarcia w cylindrze o przekroju S , przy czym na tłok działa stała siła Q , pochodząca bądź od ciśnienia atmosferycznego, bądź od ciężaru własnego, bądź też od innych czynników.

Jeżeli oznaczymy przez m masę, biorącą udział w ruchu tłoka i założymy, że powietrze zawarte w cylindrze spręża się w czasie ruchu zgodnie z równaniem adiabaty: $pv^{\kappa} = p_0 v_0^{\kappa}$, to z prawa Newtona otrzymamy następujące równanie ruchu

$$(1.2) \quad mx'' = Cx^{-\kappa} - Q, \quad \text{gdzie} \quad C = \frac{p_0 v_0^{\kappa}}{S^{\kappa-1}}.$$

Współrzędna $x > 0$ oznacza tutaj odległość tłoka od dna cylindra (rys. 1). Układ pokazany na rysunku można traktować jako fragment urządzeń



ZM-463

Rys. 1

amortyzatorowych lub indykatorowych (patrz np. [1]). Dla pełniejszego opisanie takich układów należy równanie ruchu (1.2) uzupełnić członami opisującymi tarcia, a w wyrażeniu dla Q trzeba uwzględnić składową zmienną (patrz np. [2], § 4.199).

Aby z równania (1.2) otrzymać równanie (1.1) oznaczamy przez x_0 punkt równowagi, wyznaczany z równania

$Cx_0^{-\kappa} - Q = 0$ i wprowadzamy zamiast $x(t)$ i t nowe zmienne bezwymiarowe

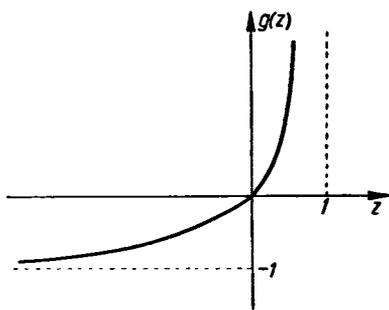
$$(1.3) \quad z(\tau) = 1 - \frac{x(t)}{x_0}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{Q}{mx_0}}.$$

Jeżeli z tych równań wyliczymy $x(t)$ i podstawimy do równania (1.2), to przejdzie ono w równanie (1.1). Nierówność $x > 0$ zapewnia nam przy tym nierówność $z < 1$.

2. Równanie (1.1) opisuje drgania jednostkowej masy uczonej do nieważkiej sprężyny o silnie nieliniowej charakterystyce sił sprężystych $g(z)$, gdzie

$$(2.1) \quad g(z) = (1-z)^{-\kappa} - 1.$$

Ta charakterystyka pokazana jest na rysunku 2, dla wartości $\kappa = 1,4$ (co odpowiada stosunkowi C_p/C_v dla powietrza (zob. np. [3], § 44)).



Rys. 2

ZM-464

Posiada ona dwie asymptoty: pionową $z = 1$ i poziomą, odpowiadającą granicy $\lim_{z \rightarrow -\infty} g(z) = -1$. Łatwo stąd wyciągnąć wniosek, że dla początkowych wychyleń w prawo, dostatecznie bliskich wartości $z = 1$, okres powstałych drgań będzie dowolnie wielki. A zatem badany układ o charakterystyce (2.1) jest anizochroniczny (uwaga: fakt ten nie wpływa bezpośrednio z nieliniowości charakterystyki, zob. [4], [5], str. 297 i następne oraz [6]).

Za pomocą metod, podanych w pracach [7] i [8], w niniejszej nocie przeanalizowano bliżej zależność częstości drgań układu o charakterystyce (2.1) od amplitudy drgań. Otrzymane wyniki streszcza poniższa tablica 1.

TABLICA 1

a_1	a_2	ω	$\omega \approx$
0,000	0,000	1,183	1,183
0,100	0,109	$1,175 \pm 0,007$	1,182
0,300	0,395	$1,162 \pm 0,010$	1,167
0,500	0,840	$1,129 \pm 0,016$	1,108

W tablicy 1 przez a_1 oznaczono maksymalne wychylenie w prawo punktu drgającego, a odpowiednio przez a_2 — maksymalne wychylenie w lewo. W kolumnie ω podano częstości drgań odpowiadające zadanemu przedziałowi drgań wraz z oszacowaniem błędów jakim obciążona jest odpo-

wiednia wartość numeryczna. Wreszcie w kolumnie ostatniej podano przybliżone wartości częstości drgań, obliczone metodą Newcomba-Lindstedta (zob. [9] a także [2], zadanie 9.246) w drugim przybliżeniu.

Przedstawimy wnioski jakie wynikają z tablicy 1. Jak widać, w miarę wzrostu przedziału drgań silnie wzrasta ich asymetria względem punktu równowagi. Częstość drgań przy tym maleje. Niemniej jednak spadek częstości jest bardzo powolny, tak że iloraz $\Delta\omega/\Delta a$, gdzie $a = (a_1 + a_2)/2$, wynosi dla obliczonych wartości numerycznych około $3,6\%$. Wynika stąd praktyczny wniosek, że przy obliczaniu konkretnych urządzeń, w skład których wchodzi układ opisany na wstępie, można go w dość dużym przedziale drgań traktować jako izochroniczny.

Na koniec, przeglądając wartości umieszczone w ostatniej kolumnie, widzimy, że częstości otrzymane metodą Newcomba-Lindstedta w drugim przybliżeniu, która w naszym przypadku daje formuły

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + \delta(a)), \quad \text{gdzie} \quad \delta(a) = -a^2(0,180 + 0,144a), \quad \omega_0^2 = g'(0);$$

(dokładniej patrz [9], str. 259-263) zgadzają się w zasadzie dla niewielkich amplitud (w granicach błędu) z wielkościami ω . Dla dużych amplitud zgodność wyraźnie się pogarsza. Poza tym stosowanie drugiego przybliżenia metody Newcomba-Lindstedta jest ograniczone warunkiem $\delta(a) > -1$ lub równoważnym $a < 1,57$. Wynika stąd następujący wniosek: metoda Newcomba-Lindstedta ze względu na swoją prostotę jest użyteczna dla małych amplitud. Wadą jej jest brak ogólnych oszacowań błędu.

3. W tym punkcie, oraz w następnych przedstawimy formuły dzięki którym uzyskano dane tablicy 1. Rozpoczynamy od wyznaczenia przedziału drgań.

Dla wyznaczenia przedziału, w którym odbywają się drgania opisane równaniem (1.1), przy warunkach początkowych

$$(3.1) \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = 0,$$

skorzystamy z całki pierwszej (całki energii) równania (1.1), która ma kształt

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} (z')^2 - \frac{(1-z)^{1-\kappa}}{1-\kappa} - z = \text{const.}$$

Oznaczmy przez a_1 maksymalne wychylenie dodatnie układu i odpowiednio przez $-a_2$ maksymalne wychylenie ujemne.

Ponieważ w chwilach, w których te wychylenia są osiąganymi przez drgania, mamy $z' = 0$, więc na mocy (3.2) wielkości a_1 i a_2 związane są równaniem

$$(3.3) \quad -\frac{(1-a_1)^{1-\kappa}}{1-\kappa} - a_1 = -\frac{(1+a_2)^{1-\kappa}}{1-\kappa} + a_2.$$

Co najmniej jedna z liczb a_1, a_2 określona jest bezpośrednio warunkami (3.1). W istocie, z równania (1.1) i warunków (3.1) znajdujemy dla $\tau = 0$ wartość $z'' = 1 - (1 - z_0)^{-\kappa} \neq 0$ dla $z_0 \neq 0$. Ponieważ w tejże chwili $\tau = 0$ mamy $z'(0) = 0$, więc liczba z_0 przedstawia maksymalną lub minimalną wartość funkcji $z(\tau)$, a zatem jest równa albo liczbie a_1 , albo liczbie $-a_2$. W ten sposób równanie (3.3) staje się równaniem przestępnym dla określenia pozostałej z liczb a_1 i a_2 .

W przykładach numerycznych, które przytaczamy, zadajemy z góry wartość a_1 , która zgodnie z nierównością $z(\tau) < 1$ leży w otwartym przedziale $(0, 1)$. Przybliżone wartości dla a_2 znajdujemy wtedy metodą Newtona.

Zgodnie z tą metodą, jeżeli x_i jest i -tym przybliżeniem rozwiązania równania $f(x) = 0$, to przybliżenie następne znajdujemy ze wzoru $x_{i+1} = x_i + h_i$, gdzie poprawkę h_i obliczamy z równości

$$\frac{1}{h_i} = -\frac{f'(x_i)}{f(x_i)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}.$$

(Dokładniej patrz [10], str. 28, wzory (1-5.12).) W naszym przypadku funkcja $f(x)$ ma kształt:

$$f(x) = \frac{(1+x)^{1-\kappa}}{1-\kappa} - x + C_1, \quad \text{gdzie} \quad C_1 = -\frac{(1-a_1)^{1-\kappa}}{1-\kappa} - a_1;$$

jako najniższe przybliżenie $a_{2,0}$ pierwiastka a_2 równania $f(x) = 0$ przyjmujemy wielkość a_1 , a dla wyższych przybliżeń $a_{2,i}$ dostajemy formułę rekurencyjną $a_{2,i+1} = a_{2,i} + h_i$, gdzie

$$\frac{1}{h_i} = -\frac{(1+a_{2,i})^{-\kappa} - 1}{\frac{(1+a_{2,i})^{1-\kappa}}{1-\kappa} - a_{2,i} + C_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa(1+a_{2,i})^{-\kappa-1}}{(1+a_{2,i})^{-\kappa} - 1}.$$

Obliczenia numeryczne prowadzono dla trzech wartości a_1 . Wyniki przedstawia tablica 2.

TABLICA 2

a_1	a_2
0,100000	0,108735
0,300000	0,395133
0,500000	0,839783

4. Przybliżone wzory dla częstości drgań w przedziale $\langle -a_2, a_1 \rangle$ znajdziemy za pomocą formuł podanych w pracy [7], modyfikując je dla przypadku niesymetrycznej charakterystyki jaką jest charakterystyka

$$(4.1) \quad g(z) = (1-z)^{-\kappa} - 1.$$

Zgodnie z metodą omówioną np. w książce [5] (por. także [8]) rozważamy zamiast charakterystyki pierwotnej dwie charakterystyki nieparzyste $g_1(z)$ i $g_2(z)$ identyczne z $g(z)$ odpowiednio dla dodatnich i ujemnych wychyleń. Mamy więc

$$(4.2) \quad \begin{aligned} g_1(z) &= g(z) & \text{dla } z \geq 0 & \quad \text{oraz} & \quad g_1(-z) = -g_1(z); \\ g_2(z) &= g(z) & \text{dla } z \leq 0 & \quad \text{oraz} & \quad g_2(-z) = -g_2(z). \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz przez ω częstotliwość drgań układu opisanego równaniem (1.1), dla przedziału drgań $\langle -a_2, a_1 \rangle$. Oznaczmy dalej przez ω_i częstotliwości drgań układów o charakterystykach $g_i(z)$, dla przedziału drgań $\langle -a_i, a_i \rangle$, gdzie $i = 1, 2$. Wtedy wprowadzone wielkości łączą prosta zależność

$$(4.3) \quad \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Dla przybliżonego obliczenia częstotliwości ω_i stosujemy wzory

$$(4.4) \quad \omega_i^2 \approx \omega_{ias}^2 = \frac{2}{\pi a_i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_i(a_i \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

a dla częstotliwości ω przyjmujemy przybliżenie

$$(4.4.1) \quad \omega \approx \omega_{ap},$$

gdzie wielkość ω_{ap} określamy równością

$$(4.4.2) \quad \frac{1}{\omega_{ap}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_{1as}} + \frac{1}{\omega_{2as}} \right).$$

W paragrafie następnym zajmiemy się oszacowaniem błędu wprowadzonych przybliżeń, teraz zaś zbadamy bliżej wzory (4.4).

Wykorzystując nieparzystość funkcji $g_i(z)$ znajdujemy na mocy (4.1) i (4.2)

$$(4.5.1) \quad \omega_{1as}^2 = \frac{4}{\pi a_1} \int_0^{\pi/2} [(1 - a_1 \sin \alpha)^{-n} - 1] \sin \alpha d\alpha$$

oraz

$$(4.5.2) \quad \omega_{2as}^2 = \frac{4}{\pi a_2} \int_{-\pi/2}^0 [(1 - a_2 \sin \alpha)^{-n} - 1] \sin \alpha d\alpha.$$

Całkę

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (1 - a_1 \sin \alpha)^{-n} \sin \alpha d\alpha$$

obliczamy rozwijając funkcję podcałkową w szereg dwumienny, zbieżny jednostajnie dla $a_1 < 1$. Ta nierówność jest spełniona w rozważanym przypadku (patrz § 3). Całkując wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\kappa}{n} (-a_1)^n \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} \alpha d\alpha,$$

lub też po obliczeniu całek i odpowiednim uporządkowaniu

$$(4.6) \quad I_1 = 1 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\kappa}{2k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} a_1^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\kappa}{2k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} a_1^{2k}.$$

Ten szereg służy nam do numerycznych obliczeń, po których wykonaniu znajdujemy ω_{1as}^2 ze wzoru

$$(4.7) \quad \omega_{1as}^2 = \frac{4}{\pi a_1} (I_1 - 1).$$

Dla wielkości ω_{2as}^2 otrzymujemy po przeprowadzeniu podobnych rozważań wzór

$$(4.8) \quad \omega_{2as}^2 = \frac{4}{\pi a_2} (I_2 + 1),$$

gdzie dla krótkości oznaczamy

$$(4.9) \quad I_2 = -1 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\kappa}{2k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} a_2^{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\kappa}{2k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} a_2^{2k}.$$

Łatwo stwierdzić, że szereg potęgowy, którym wyraża się wielkość I_2 , jest szeregiem naprzemiennym o wyrazach malejących monotonicznie do zera dla wystarczająco wielkich wskaźników. Ten szereg jest więc zbieżny dla dowolnych wartości $a_2 \geq 0$.

Szeregi (4.6) i (4.9) mało nadają się do bezpośrednich obliczeń. Obliczając ich pierwszych siedem wyrazów otrzymujemy z (4.7) i (4.8) wyrażenia

$$(4.10.1) \quad \frac{\pi}{4} \omega_{1as}^2 = 1,099557 + 1,120000a_1 + 1,125671a_1^2 + \\ + 1,117013a_1^3 + 1,110331a_1^4 + 1,102970a_1^5 + 1,095528a_1^6 + \dots$$

oraz

$$(4.10.2) \quad \frac{\pi}{4} \omega_{2as}^2 = 1,099557 - 1,120000a_2 + 1,125671a_2^2 - \\ - 1,117013a_2^3 + 1,110331a_2^4 - 1,102970a_2^5 + 1,095528a_2^6 - \dots$$

Jak widać, zachowanie się współczynników tych szeregów utrudnia wykonanie obliczeń numerycznych z należytą dokładnością. Dlatego też do wyrażeń (4.10) stosujemy przekształcenie Eulera (zob. np. [11], str. 269-273). Zgodnie z tym przekształceniem szereg

$$f(a) = b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \dots$$

przekształcamy na

$$f(a) = \frac{b_0}{1-a} + \frac{a}{1-a} (\Delta_1 b_1 + \Delta_1 b_2 \cdot a + \Delta_1 b_3 \cdot a^2 + \dots),$$

gdzie $\Delta_1 b_n = b_n - b_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Stosując raz jeszcze przekształcenie Eulera, otrzymujemy

$$f(a) = \frac{b_0}{1-a} + \frac{a}{(1-a)^2} (\Delta_1 b_1 + \Delta_2 b_2 \cdot a + \Delta_2 b_3 \cdot a^2 + \dots),$$

gdzie $\Delta_2 b_n = \Delta_1 b_n - \Delta_1 b_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

W ten sposób sprowadzamy wzory (4.10) do postaci

$$(4.11.1) \quad \frac{\pi}{4} \omega_{1as}^2 = \frac{1,099557}{1-a_1} + \frac{a_1}{(1-a_1)^2} [0,020443 - 0,014772a_1 - \\ - 0,014329a_1^2 + 0,001976a_1^3 - 0,000679a_1^4 - 0,000081a_1^5 + \dots]$$

oraz

$$(4.11.2) \quad \frac{\pi}{4} \omega_{2as}^2 = \frac{1,099557}{1+a_2} - \frac{a_2}{(1+a_2)^2} [0,020443 + 0,014772a_2 - \\ - 0,014329a_2^2 - 0,001976a_2^3 - 0,000679a_2^4 + 0,000081a_2^5 + \dots]$$

dogodnej do obliczeń numerycznych.

A oto wyniki obliczone dla wartości a_1 i a_2 podanych w § 3, w tabelicy 2:

TABLICA 3

a_1	ω_{1as}	ω_{2as}	ω_{ap}
0,100000	1,248404	1,222602	1,182166
0,300000	1,418277	0,998653	1,172038
0,500000	1,680667	0,868470	1,145179

W ostatniej kolumnie tabelicy podano przybliżone wartości odpowiednich częstości drgań, obliczone za pomocą wzoru (4.4.2). W następnych punktach pracy zajmiemy się oszacowaniem błędów podanych przybliżeń, adaptując odpowiednio wzory podane w pracach [7] i [8].

5. W nierównościach, za pomocą których będziemy szacować błędy podanych przybliżeń, występują pewne wielkości pomocnicze, którymi obecnie się zajmiemy.

Pierwszymi z takich wielkości są wyrażenia

$$(5.1) \quad r_i = 2 \inf_{(-a_i, a_i)} \frac{G_i(a_i) - G_i(z)}{a_i^2 - z^2}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie $G_i(z) = \int_0^z g_i(z) dz$. Funkcje $g_1(z)$ i $g_2(z)$ określone są tutaj wzorami (4.1) i (4.2), skąd dla funkcji $G_1(z)$, $G_2(z)$ otrzymamy wyrażenia:

$$(5.2.1) \quad G_1(z) = \begin{cases} \frac{(1-z)^{1-\kappa}}{\kappa-1} - z - \frac{1}{\kappa-1} & \text{dla } z \geq 0, \\ G_1(-z) & \text{dla } z \leq 0 \end{cases}$$

oraz

$$(5.2.2) \quad G_2(z) = \begin{cases} \frac{(1-z)^{1-\kappa}}{\kappa-1} - z - \frac{1}{\kappa-1} & \text{dla } z \leq 0, \\ G_2(-z) & \text{dla } z \geq 0. \end{cases}$$

Łatwo wykazać, co zresztą widać na rysunku 2, że charakterystyka $g(z)$ jest twarda dla $z \geq 0$, a miękka dla $z \leq 0$. Stąd wynika, że charakterystyka $g_1(z)$ jest twarda, a charakterystyka $g_2(z)$ jest miękka. Jak zauważono w pracy [7], kres dolny po prawej stronie wzoru (5.1) jest osiągnięty w punkcie $z = 0$ w przypadku twardych charakterystyk antysymetrycznych i jest równy granicy prawej strony przy $z \rightarrow a_i$ w przypadku miękkich charakterystyk nieparzystych. Na mocy tych uwag wyprowadzamy za pomocą wzorów (5.1) i (5.2) oraz (4.1) i (4.2) następujące formuły na r_1 i r_2 :

$$(5.3.1) \quad r_1 = \frac{2[(1-a_1)^{1-\kappa} + (1-\kappa)a_1 - 1]}{(\kappa-1)a_1^2}$$

oraz

$$(5.3.2) \quad r_2 = \frac{1 - (1+a_2)^{-\kappa}}{a_2}.$$

Następna wielkość, której znajomość będzie potrzebna przy oszacowaniach błędów, określona jest wzorem

$$\omega_{iop}^4 = \frac{4}{\pi a_i^2} \int_0^{\pi/2} g_i^2(a_i \sin a) da,$$

gdzie $i = 1, 2$. Na mocy wzoru (4.2) wynika stąd

$$(5.4.1) \quad \omega_{1op}^4 = \frac{4}{\pi a_1^2} \int_0^{\pi/2} g^2(a_1 \sin a) da$$

oraz

$$(5.4.2) \quad \omega_{2op}^4 = \frac{4}{\pi a_2^2} \int_{-\pi/2}^0 g^2(a_2 \sin a) da.$$

W przypadku, gdy funkcja $g(z)$ określona jest wzorem (4.1), całki te można rozwinąć w szeregi względem parametrów a_1 i a_2 . Jednakże szeregi te są dosyć wolno zbieżne a ich współczynniki mają budowę niewygodną dla rachunków numerycznych. Dlatego w przykładach numerycznych przy obliczeniu wielkości ω_{iop}^4 posługujemy się wzorami Gaussa, które dla całek (5.4) przyjmują kształt

$$(5.5.1) \quad \omega_{1op}^4 \approx \frac{1}{a_1^2} \sum_{i=1}^n w_i \left[\left(1 - a_1 \sin \frac{\pi}{4} (1 + x_i) \right)^{-x} - 1 \right]^2$$

oraz

$$(5.5.2) \quad \omega_{2op}^4 \approx \frac{1}{a_2^2} \sum_{i=1}^n w_i \left[\left(1 + a_2 \sin \frac{\pi}{4} (1 + x_i) \right)^{-x} - 1 \right]^2.$$

Oznaczyliśmy tu przez x_i kolejne zera wielomianów Legendre'a n -tego stopnia, a przez w_i odpowiednie wagi jakie można znaleźć np. w książce [10] (str. 515, tab. XIII). Rachunki numeryczne przeprowadzono za pomocą wzorów (5.5) przyjmując $n = 6$.

Na zakończenie podajemy wyniki obliczeń numerycznych wielkości r_i oraz ω_{iop}^4 .

TABLICA 4

a_1	r_1	r_2	ω_{1op}^4	ω_{2op}^4
0,100000	1,5200	1,255741	2,508200	1,619809
0,300000	1,8522	0,942994	4,228144	1,017152
0,500000	2,3902	0,683605	8,482904	0,591452

Obecnie możemy przystąpić do oszacowania błędu względnego

$$e = \frac{|\omega - \omega_{ap}|}{\omega},$$

z jakim wielkość ω_{ap} , określona wzorami (4.4.2), (4.5) przybliży prawdziwą częstotliwość drgań ω .

Obliczeń dokonamy za pomocą nierówności

$$(5.6) \quad e \leq \frac{\omega_{2as}}{\omega_{1as} + \omega_{2as}} \cdot \frac{|\omega_{1as} - \omega_1|}{\omega_1} + \frac{\omega_{1as}}{\omega_{1as} + \omega_{2as}} \cdot \frac{|\omega_{2as} - \omega_2|}{\omega_2},$$

która łatwo wynika z wzorów (4.3) i (4.4.2). Prawą stronę tej nierówności szacujemy za pomocą nierówności podanych w pracy [7]:

$$(5.7) \quad e_i \leq 0,43 r_i^{-5/2} \omega_{ias} (\omega_{iop}^4 - \omega_{ias}^4), \quad i = 1, 2,$$

gdzie $e_i = |\omega_{ias} - \omega_i|/\omega_i$. Wielkości występujące w nierównościach (5.6) i (5.7) zostały już poprzednio obliczone. A oto wyniki obliczeń numerycznych

TABLICA 5

a_1	$e_1 \leq$	$e_2 \leq$	$e \leq$
0,100000	$1,5 \times 10^{-2}$	$0,9 \times 10^{-2}$	$1,2 \times 10^{-2}$
0,300000	2,4	1,2	1,7
0,500000	4,2	2,2	2,9

Jak widać, w rozpatrywanym przedziale zmienności amplitud błędy aproksymacji nie są duże. Interesujące jest spostrzeżenie poczynione w pracy [7], iż powyższe przybliżenia są przybliżeniami z góry, tzn. zawsze są prawdziwe nierówności $\omega_{ias} \geq \omega_i$ i $\omega_{ap} \geq \omega$. Na podstawie tej uwagi otrzymano dane tablicy 1.

Należy na koniec zauważyć, że w pracy niniejszej nie przeprowadzono analizy błędów popełnianych przy rachunkach numerycznych.

Prace cytowane

- [1] Н. Ф. Кираковский, *Ремонт и монтаж стационарных двигателей внутреннего сгорания*, Москва 1953 (tłum. pol. Warszawa 1956).
- [2] N. W. Mc Lachlan, *Ordinary Nonlinear Differential Equations*, New York 1955 (tłum. pol. Warszawa 1963).
- [3] Л. Ландау и Е. Ли́фшиц, *Статистическая физика*, Москва 1951 (tłum. pol. Warszawa 1959).
- [4] H. Ehrmann, *Z. angew. Math. u. Mech.* 32 (1952), str. 307.
- [5] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958 (tłum. ros. Moskwa 1961).
- [6] M. Urabe, *Potential forces which yield periodic motions of a fixed period*, *Journal of Math. a. Mech.* 10 (4-6), 1961.
- [7] A. Rybarski, *Angenäherte Schwingungsfrequenzformeln für konservative Systeme*, cz. I i II, *Zastosow. Mat.* 7 (1964), str. 235-239.
- [8] A. Rybarski i E. Strzelecki, *On the frequency of the vibrations of a synchronous machine*, (w przygotowaniu dla *Zastosow. Mat.*).
- [9] Б. В. Булгаков, *Колібания*, Москва 1954.
- [10] C. Lanczos, *Applied analysis*, Prentice Hall, Inc., 1956 (tłum. ros. Moskwa 1961).
- [11] К. Кнопп, *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, 4. Aufl., 1947 (tłum. pol. Warszawa 1956).

В. А. ВОЙЧИНСКИ (Вроцлав)

*СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ
С АДИАБАТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГИХ СИЛ*

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются колебания консервативной динамической системы описываемые уравнением

$$z'' + (1-z)^{-\kappa} - 1 = 0,$$

где $z = z(\tau) < 1$, $\kappa > 0$.

К этому виду можно привести уравнения движения поршня движущегося без трения в цилиндре заполненном газом.

С помощью методов разработанных в статьях [7] и [8] автор рассматривает зависимость частоты колебаний ω указанной выше системы от амплитуды колебаний. Приведены также оценки погрешностей вычисляемых величин. Проведено, наконец, сравнение полученных приближений частот с частотами вычисленными методом Ньюкома-Линдштедта.

W. A. WOYCZYŃSKI (Wrocław)

*FREE VIBRATIONS OF A CERTAIN SYSTEM
WITH ADIABATIC CHARACTERISTIC OF ELASTIC FORCES*

SUMMARY

The author considers vibrations of a dynamical conservative system described by the equation

$$z'' + (1-z)^{-\kappa} - 1 = 0,$$

where $z = z(\tau) < 1$ and $\kappa > 0$.

The equation of motion of a piston moving without friction in a cylinder filled with gas can be reduced to the above form.

In this note the author used methods given in [7] and [8] and studied the relation between the frequency ω and the amplitude of vibrations of the above system. The estimates of errors of the corresponding numerical values are also given. Finally, the approximate values of frequencies are compared with those computed by Newcomb-Lindstedt method.