

M. GUTMAN (Wrocław)

*O PRZEWIDYWANIU SEZONOWOŚCI SKUPU MLEKA**

1. Wstęp. W Polsce skupem mleka zajmują się⁽¹⁾ Zjednoczenia Przemysłu Mleczarskiego. Dla sprawnego funkcjonowania tych przedsiębiorstw niezmiernie ważna jest umiejętność przewidywania, jakie ilości mleka będą dostarczone przez dostawców w poszczególnych miesiącach. Napotyka to szczególne trudności. Biorą się one stąd, że produkcja mleka nie jest rozłożona jednostajnie na wszystkie miesiące, lecz wykazuje pewien rytm związany z porami roku: na ogół krowy cielą się na wiosnę, co powoduje, że zimą jest mleka szczególnie mało, a za to latem i wiosną dużo.

Jest wiele innych przyczyn wpływających na rytm produkcji mleka. Wspomnijmy na przykład takie, jak sposób żywienia, warunki klimatyczne, rasa bydła, zmiany w liczności pogłowia. Gdyby te wszystkie czynniki były ustalone, byłby także ustalony rytm produkcji mleka, który powtarzałby się z roku na rok. Tak jednak nie jest. Niektóre czynniki, na przykład klimatyczne, powodują pewne zmiany, które można traktować jako przypadkowe. Inne, jak na przykład sposób żywienia lub rozkład wycieleń, są celowo regulowane. Dąży się, po pierwsze, do zwiększenia produkcji mleka i, po drugie, do jak najrównomierniejszego rozkładu produkcji mleka w ciągu całego roku. Do tego jeszcze trzeba dodać, że sieć placówek zajmujących się skupem mleka wciąż się rozszerza. Wskutek wszystkich zmian Zjednoczenia Przemysłu Mleczarskiego w kolejnych latach zakupują coraz to inną ilość mleka i z roku na rok zmienia się rozkład dostaw mleka w poszczególnych miesiącach.

Celem niniejszej pracy jest podanie nowej metody przewidywania rozkładu miesięcznych dostaw w roku przyszłym na podstawie danych o skupie mleka z lat ubiegłych. Na przykładzie danych dotyczących skupu

* Praca zredagowana do druku przez S. Zubrzyckiego na podstawie pracy magisterskiej M. Gutmana, wykonanej w roku 1955 w Katedrze Zastosowań Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego pod kierunkiem prof. J. Perkala.

⁽¹⁾ Od daty złożenia tego artykułu do Redakcji do chwili wydrukowania zaszyły zmiany w gospodarce rolnej. Mimo to ogłaszamy artykuł uważając, że metoda tu wyłożona może mieć zastosowanie ogólniejsze. (*Redakcja*).

mleka w województwie wrocławskim w latach 1949-1954 pokazujemy, że proponowana metoda daje dużo lepsze wyniki niż dotychczasowe.

2. Dane statystyczne. W pracy niniejszej opracowano dane o skupie mleka w województwie wrocławskim w latach 1949-1954, udostępnione przez Zjednoczenie Przemysłu Mleczarskiego we Wrocławiu. Przedstawiamy je w tablicach 1, 2, i 3.

TABLICA 1

Wskaźniki miesięczne P_m^t dla województwa wrocławskiego

Miesiąc <i>m</i>	R o k r					
	1949	1950	1951	1952	1953	1954
I	3,6	4,95	5,9	4,6	6,0	5,86
II	4,2	4,9	5,8	4,6	5,9	5,70
III	5,2	6,15	6,2	5,2	6,4	7,08
IV	5,4	6,1	7,3	5,3	7,05	6,56
V	11,6	11,0	10,8	10,4	11,6	10,10
VI	14,5	14,1	13,4	13,7	12,95	12,58
VII	13,4	11,9	12,2	12,8	11,6	12,08
VIII	11,3	10,9	10,9	11,0	11,1	10,67
IX	9,6	9,5	9,8	10,3	9,0	9,35
X	8,5	8,5	7,7	9,2	7,3	8,05
XI	6,5	6,8	5,4	7,2	6,0	6,45
XII	6,2	5,2	4,6	5,7	5,1	5,52

W tablicy 1 podano dla każdego roku z osobna *wskaźniki miesięczne* P_m^t obliczone według następującego wzoru:

$$(1) \quad P_m^t = \frac{M_m^t \cdot 100}{M^t},$$

gdzie M_m^t oznacza ilość mleka zakupioną w miesiącu m roku i , a M^t oznacza ogólną ilość mleka zakupioną w roku i . Brano tu sumaryczne ilości mleka z całego województwa. W tablicy 2 podano wskaźniki miesięczne $P_m^{(1953)}$ dla poszczególnych powiatów województwa wrocławskiego tylko dla roku 1953. Wreszcie w tablicy 3 podano ogólne ilości mleka zakupione w poszczególnych latach w województwie wrocławskim.

TABLICA 3

Ilość mleka zakupiona w województwie wrocławskim w milionach litrów

Rok	1949	1950	1951	1952	1953	1954
Zakupiona ilość mleka	51,0	86,2	114,9	136,0	134,6	143,9

TABLICA 2

Wskaźniki miesięczne P_m^{1953} dla powiatów województwa wrocławskiego

Lp.	Powiat	Wskaźnik sezonowości	M i e s i ą c e m											
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	Bolesławiec	228,1	3,1	4,2	5,8	8,0	13,7	14,8	13,9	12,6	10,2	6,9	4,2	2,6
2	Kamienna Góra	183,0	5,8	6,0	6,8	7,2	12,3	15,2	13,5	12,1	9,3	5,6	3,1	3,1
3	Wolów	167,7	4,0	4,2	5,5	7,4	12,4	14,0	13,1	13,1	9,4	7,4	5,5	4,0
4	Zgorzelec	165,1	5,2	4,9	5,0	6,2	13,1	14,3	12,7	11,5	10,2	8,7	4,8	3,4
5	Złotoryja	162,8	4,6	5,5	5,7	6,9	13,2	14,5	13,0	12,3	9,0	5,8	5,0	4,5
6	Lwówek Śląski	148,2	5,9	5,8	5,8	7,1	12,7	14,4	13,0	11,6	8,9	6,4	5,0	3,4
7	Lubań	147,2	5,5	4,5	5,1	5,4	11,6	13,5	12,7	12,1	11,1	9,0	5,4	4,1
8	Lubin	131,0	4,7	4,8	5,7	6,9	12,3	13,7	12,0	12,1	9,9	7,6	5,8	4,5
9	Oleśnica	128,0	4,9	4,9	5,9	6,6	12,1	14,4	12,2	11,9	8,9	7,3	6,2	4,7
10	Jelenia Góra	117,9	7,0	6,4	6,9	6,9	11,8	12,5	11,7	12,4	10,7	5,8	3,4	4,5
11	Oława	112,9	5,2	6,0	6,1	7,5	12,1	13,6	12,2	11,7	8,5	6,8	5,9	4,4
12	Milicz	101,6	5,2	5,9	6,4	6,3	11,5	13,7	12,1	11,6	8,4	7,1	6,0	4,8
13	Trzebnica	98,1	5,4	5,7	6,0	6,7	11,6	13,5	11,9	11,3	8,9	7,5	6,5	5,0
14	Bystrzyca	84,2	6,9	6,2	5,3	5,5	9,7	13,4	11,8	11,2	9,8	8,3	6,4	5,5
15	Kłodzko	80,5	6,7	6,3	6,2	5,8	10,8	13,0	12,0	9,8	9,7	8,7	6,3	4,7
16	Syców	74,8	5,6	5,2	6,5	7,7	12,2	12,2	10,4	11,1	9,5	7,3	6,4	5,9
17	Góra Śląska	73,3	6,0	5,8	6,5	7,4	11,9	12,7	10,9	10,8	8,7	7,4	6,4	5,5
18	Legnica	71,6	5,3	5,5	6,5	6,5	11,2	12,7	11,2	10,8	8,6	8,2	7,5	6,0
19	Środa Śląska	58,5	6,8	6,0	6,6	7,3	11,4	12,2	10,9	10,5	8,7	7,3	6,5	5,8
20	Jawor	57,0	6,6	6,6	6,9	6,8	10,6	12,2	11,5	10,5	8,9	7,1	6,5	5,9
21	Wałbrzych	42,6	8,5	7,6	6,9	6,4	11,5	12,3	9,4	9,3	8,0	7,2	6,5	6,4
22	Wrocław	40,7	6,2	6,4	6,9	7,9	11,2	11,3	10,3	10,2	8,6	7,5	6,9	6,6
23	Strzelin	38,8	7,1	6,9	7,6	7,4	10,3	11,4	11,1	10,1	8,2	7,2	6,9	5,8
24	Świdnica	32,2	7,4	7,1	7,5	7,5	10,6	10,9	10,5	9,5	9,3	7,2	6,5	6,0
25	Dzierżonów	31,3	7,9	7,0	7,1	7,6	10,7	11,3	10,2	9,6	8,2	7,3	6,9	6,2
26	Ząbkowice Śląskie	28,9	7,5	7,6	7,7	7,3	9,9	11,2	10,3	10,0	8,4	7,3	6,8	6,0

3. Dotychczasowe metody przewidywania sezonowości skupu mleka. Będziemy w dalszym ciągu nazywali *sezonowością* roku odpowiadający mu układ dwunastu wskaźników miesięcznych.

W pracy zbiorowej [1] podano trzy metody przewidywania sezonowości: metoda średniej arytmetycznej, metoda średniej ważonej i metoda wskaźnika wzrostu. Przypuśćmy, że mamy kompletne dane statystyczne dotyczące skupu mleka w latach $1, 2, \dots, i, \dots, r$ i że chcemy na ich podstawie przewidzieć sezonowość skupu w roku $r+1$. Wówczas metodą średniej arytmetycznej oblicza się przewidywaną sezonowość według następujących wzorów:

$$(2) \quad P_m^{r+1} = \bar{P}_m = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_m^i \quad \text{dla} \quad m = \text{I, II, } \dots, \text{XII.}$$

Metodą średniej ważonej oblicza się sezonowość według wzorów

$$(3) \quad P_m^{r+1} = \bar{P} = \left(\sum_{i=1}^r M^i P_m^i \right) / \sum_{i=1}^r M^i \quad \text{dla} \quad m = \text{I, II, } \dots, \text{XII.}$$

Metoda wskaźnika wzrostu (zobacz [1], str. 66) polega na tym, że za przewidywaną sezonowość w roku $r+1$ przyjmuje się sezonowość tak zwanego roku wyjściowego. Autorzy pracy [1] piszą:

„Metoda ta ma tę wielką zaletę, że możemy posługiwać się jako rokiem wyjściowym dowolnym rokiem uznanym za prawidłowy lub sprowadzonym do stanu prawidłowości, ponadto jest szybsza w pracy, gdyż nie wymaga w ogóle obliczenia wskaźników sezonowości^(*).”

Wymaga natomiast bardzo wnikliwej i sumiennej pracy nad ustalaniem prawidłowych wyników miesięcznych w roku wyjściowym, który uznajemy za wzorcowy”.

Ponieważ jednak poza cytowanym ustępem nie jest sprecyzowane, w jaki sposób ma się ustalać rok wyjściowy, nie jest to metoda obiektywna. Dlatego w tablicy 6 obok prognozy sezonowości roku 1954, obliczonej metodą średniej arytmetycznej i metodą średniej ważonej, nie podajemy prognozy sezonowości obliczonej metodą wskaźnika wzrostu. Zanotowaliśmy jednak sezonowość planu operatywnego na rok 1954. (Plan operatywny powstaje z planu rocznego w ten sposób, że bezpośrednio przed kwartałem lub miesiącem poprawia się liczby planu rocznego).

4. Metoda proponowana i otrzymane wyniki. Metoda, którą proponujemy, jest bardziej skomplikowana rachunkowo niż dotychczasowe i jest w gruncie rzeczy rozszerzeniem metody średniej arytmetycznej.

(*) Autorzy mają na myśli wskaźniki miesięczne P_m^i .

Składa się ona z następujących kroków: 1° obliczenie średniej sezonowości, 2° obliczenie dyspersji wskaźników miesięcznych, 3° prognoza wskaźnika sezonowości, 4° wprowadzenie zmian do średniej sezonowości.

1° Obliczenie średniej sezonowości. Obliczamy średnią sezonowość tak jak w metodzie średniej arytmetycznej, to jest według wzoru (2).

2° Obliczenie dyspersji wskaźników miesięcznych. Dla $m = \text{I, II, ..., XII}$ obliczamy dyspersję σ_m według następującego wzoru:

$$(4) \quad \sigma_m = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (P_m^i - \bar{P}_m)^2}.$$

Poniżej, w tablicy 4 podajemy średnią sezonowość oraz dyspersję wskaźników miesięcznych obliczone na podstawie danych zawartych w tablicy 1 (lata 1949-1954).

TABLICA 4

Średnia sezonowość i dyspersja wskaźników miesięcznych

Mie- siące m	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
\bar{P}_m	5,01	5,08	5,83	6,23	11,08	13,73	12,38	11,04	9,64	8,24	6,38	5,36
σ_m	0,88	0,66	0,52	0,81	0,45	0,60	0,58	0,14	0,42	0,66	0,62	0,55

3° Prognoza wskaźnika sezonowości. Ideałem dla nas jest sezonowość jednostajna, to znaczy taka, że wszystkie wskaźniki P_m^i są jednakowe i równe $\frac{100}{12} = 8\frac{1}{3}$. Wskaźnikiem sezonowości K^i i -tego roku nazywamy odchylenie sezonowości danego roku od sezonowości jednostajnej, określone przez następujący wzór

$$(5) \quad K^i = \sum_{m=1}^{XII} (P_m^i - 8\frac{1}{3})^2.$$

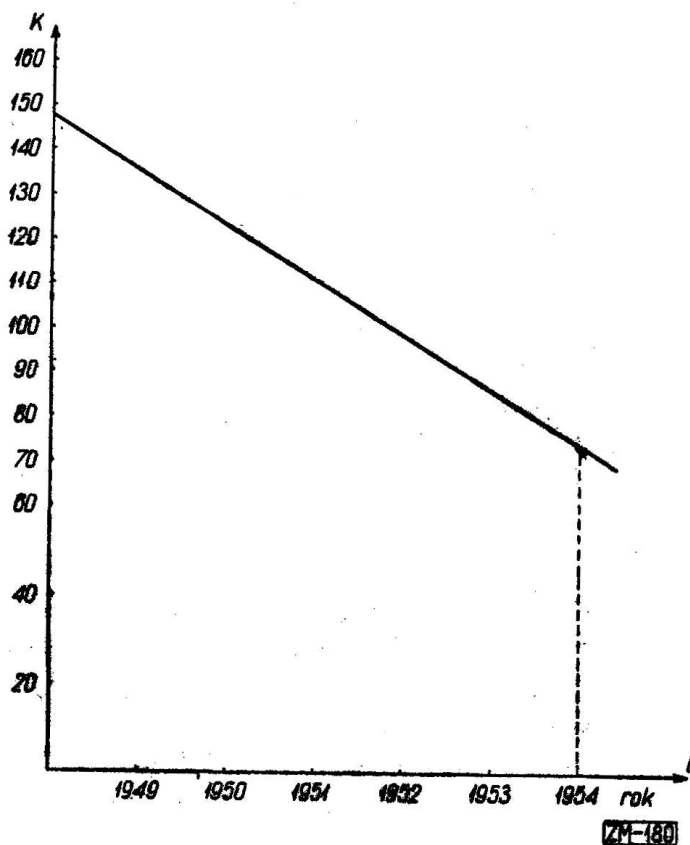
Teoretycznie wskaźnik K^i zmienia się od 0 do $9166\frac{2}{3}$. Wartość 0 przyjąłby przy sezonowości jednostajnej, a $9166\frac{2}{3}$, gdyby całoroczny skup mleka skupił się w jednym miesiącu. Poniżej podajemy, obliczone dla poszczególnych lat, wskaźniki sezonowości skupu mleka w województwie wrocławskim.

TABLICA 5

Wskaźniki sezonowości

Rok i	1949	1950	1951	1952	1953	1954
K^i	150,7	105,1	96,3	120	81,5	70,7

Zauważmy, że wskaźniki sezonowości systematycznie maleją. Jedyne wyjątek stanowi rok 1952, ale wydaje się, że jest to skutek wejścia w życie w maju 1952 roku dekretu o obowiązkowych dostawach mleka, co wpłynęło na znaczny wzrost skupu w miesiącach letnich. Znając wskaźniki sezonowości dla lat $1, 2, \dots, i, \dots, r$, rysujemy w układzie współrzędnych i, K punkty (i, K^i) przedstawiające wskaźniki sezonowości dla poszczególnych lat. Prowadzimy między tymi punktami linię prostą mija-



Rys. 1

jącą je możliwie najbliżej i z linii tej odczytujemy, jaki powinien być wskaźnik sezonowości w roku $r+1$. Na wykresie na rysunku 1 wyznaczaliśmy w ten sposób sezonowość na rok 1954 ze wskaźników sezonowości w latach 1949-1954 (zob. tablica 5). Z wykresu odczytujemy, że wskaźnik sezonowości na rok 1954 powinien wynosić około 74.

4° Wprowadzenie zmian do średniej sezonowości. Wreszcie za przewidywaną sezonowość w roku $r+1$ bierzemy sezonowość

$$(6) \quad \{\tilde{P}_I, \tilde{P}_{II}, \dots, \tilde{P}_{XII}\}, \quad \text{gdzie} \quad P_i = \begin{cases} \bar{P}_i & \text{dla } i = IV, X, \\ \bar{P}_i + n\sigma & \text{dla } i = I, II, III, \\ & XI, XII, \\ \bar{P}_i - l\sigma_i & \text{dla } i = V, VI, VII, \\ & VIII, IX. \end{cases}$$

Liczby n i l wyznacza się z równań

$$(6a) \quad \tilde{P}_I + \tilde{P}_{II} + \dots + \tilde{P}_{XII} = 100, \quad \sum_{i=I}^{XII} (\tilde{P}_i - 8\frac{1}{3})^2 = K^{r+1},$$

które dają następujące rozwiązanie:

$$(7) \quad l = \left(n \sum_{m=I,II,III,XI,XII} \sigma_m \right) / \sum_{m=V}^{IX} \sigma_m,$$

$$(8) \quad n = (-b - \sqrt{b^2 - a(\bar{K} - K^{r+1})}) / a,$$

przy tym

$$b = \sum_{m=I,II,III,XI,XII} \bar{P}_m \sigma_m - \left(\sum_{m=I,II,III,XI,XII} \sigma_m / \sum_{m=V}^{IX} \sigma_m \right) \sum_{m=V}^{IX} \bar{P}_m \sigma_m,$$

$$a = \sum_{m=I,II,III,XI,XII} \sigma_m^2 + \sum_{m=V}^{IX} \sigma_m^2 \cdot \left(\sum_{m=I,II,III,XI,XII} \sigma_m / \sum_{m=V}^{IX} \sigma_m \right)^2;$$

symbol \bar{K} oznacza wskaźnik sezonowości średniej sezonowości $\{\bar{P}_I, \dots, \bar{P}_{XII}\}$. Metodą tą obliczono przewidywaną sezonowość na 1954 r. Przy tym obliczeniu przyjęto dla roku 1954, na podstawie wykresu 1, wskaźnik sezonowości $K = 74$. Dla kontroli obliczono także przewidywaną sezonowość przyjmując za wskaźniki sezonowości liczby: 65, 80 i 89. Uzyskane sezonowości podajemy poniżej w tabelicy 6. Podajemy w niej również prognozy sezonowości obliczone metodą średniej arytmetycznej, metodą średniej ważonej oraz sezonowość planu operatywnego na rok 1954, a także sezonowość rzeczywistego wykonania skupu w roku 1954.

5. Analiza wyników. Zaczniemy od sprecyzowania miary, którą będziemy mierzyli odchylenie przewidywanej sezonowości od sezonowości rzeczywistego wykonania skupu. Niech $\{P_I, \dots, P_{XII}\}$ oznacza sezonowość rzeczywiście zaobserwowaną, a $\{P'_I, \dots, P'_{XII}\}$ przewidywaną. Za miarę odchylenia przyjmujemy liczbę Z określoną wzorem

$$Z = \sum_{m=I}^{XII} (P_m - P'_m)^2,$$

lub liczbę \hat{Z} określoną wzorem

$$\hat{Z} = 100 \sum_{m=I}^{XII} ((P_m - P'_m)/P_m)^2.$$

TABLICA 6

Sezonowość skupu mleka w 1954 r. i przewidywane sezonowości obliczone różnymi metodami

Mie- siąc <i>m</i>	Prognoza sezonowości uzyskana:							Sezono- wość rze- czywiste- go wyko- nania skupu
	metodą średniej arytm.	metodą średniej ważonej	z planu opera- tywnego	metodą proponowaną				
				<i>K</i> = 89	<i>K</i> = 65	<i>K</i> = 80	<i>K</i> = 74	
I	5,01	5,19	5,61	5,39	6,01	5,61	5,78	5,86
II	5,08	5,23	5,69	5,38	5,84	5,55	5,66	5,70
III	5,83	5,88	5,96	6,06	6,42	6,18	6,28	7,08
IV	6,23	6,34	6,60	6,22	6,22	6,22	6,22	6,56
V	11,08	10,98	11,10	10,78	10,32	10,62	10,50	10,10
VI	13,73	13,57	12,51	13,32	12,70	13,11	12,94	12,58
VII	12,38	12,29	12,29	12,00	11,40	11,80	11,63	12,08
VIII	11,04	11,01	11,64	10,95	10,81	10,90	10,86	10,67
IX	9,64	9,68	9,63	9,36	8,94	9,22	9,10	9,35
X	8,24	8,18	7,52	8,24	8,24	8,24	8,24	8,05
XI	6,38	6,38	6,18	6,66	7,10	6,81	6,93	6,45
XII	5,36	5,27	5,27	5,64	6,00	5,74	5,86	5,52

W tablicy 7 podajemy odchylenia *Z* i odchylenia \hat{Z} przewidywanych sezonowości skupu na rok 1954 od sezonowości rzeczywistego wykonania.

TABLICA 7

Odchylenia przewidywanych sezonowości od sezonowości rzeczywistego wykonania skupu

L.p.	Metoda	<i>Z</i>	\hat{Z}
1	Średniej arytmetycznej	5,46	8,87
2	Średniej ważonej	4,28	7,53
3	Na podstawie planu operatywnego r. 1954	3,78	5,43
4	Proponowana	<i>K</i> = 89	2,69
		$65 \leq K \leq 80$	< 2,1
		<i>K</i> = 74	1,74
			3,04

Na podstawie wyników obliczeń podanych w tablicy 7 stwierdzamy, że przewidywane sezonowości opracowane metodą średniej arytmetycznej lub metodą średniej ważonej są o wiele gorsze nie tylko od przewidywa-

nych sezonowości opracowanych proponowaną metodą, lecz również od sezonowości planu operatywnego. Słusznie przeto autorzy pracy [1] stwierdzają, że stosowanie zwykłej średniej arytmetycznej z poszczególnych lat jest błędne. Stwierdzamy dalej, że prognoza sezonowości opracowana proponowaną metodą jest dużo bliższa (około 2 razy) sezonowości wykonania niż sezonowość planu operatywnego i to nie tylko wtedy, gdy przyjmiemy do naszych obliczeń wskaźnik sezonowości odczytany z wykresu 1, to jest $K = 74$, lecz także, jak można pokazać, gdy przyjmujemy dowolne K ze stosunkowo dużego przedziału $65 \leq K \leq 80$. Spróbowaliśmy przyjąć do obliczenia prognozy wskaźnik sezonowości planu operatywnego, tj. $K = 89$ i nawet wówczas proponowana przez nas metoda dała lepszą prognozę niż plan operatywny. Zauważmy z kolei, że w roku 1954 plan operatywny wykonano poniżej 100% tylko w maju, lipcu, sierpniu i wrześniu. W tablicy 6 widzimy zaś, że właśnie w tych czterech miesiącach wskaźniki miesięczne prognozy opracowanej proponowaną metodą są niższe niż odpowiednie wskaźniki miesięczne planu operatywnego.

Wszystko to świadczy, że trudności rachunkowe proponowanej przez nas metody są z niewielką okupione dokładnością wyników.

6. Uwagi o konstrukcji proponowanej metody. Proponowana metoda składa się z czterech kroków: 1° obliczenia średniej sezonowości, 2° obliczenia dyspersji wskaźników miesięcznych, 3° prognozy wskaźnika sezonowości, 4° wprowadzenia zmian do średniej sezonowości.

Konstruowanie prognozy zaczynamy od obliczenia średniej sezonowości dlatego, że średnia sezonowość jest najlepszą prognozą w przypadku występowania jedynie losowych wahań, ponieważ wyrównuje je możliwie dobrze. Zaletę tę średnia arytmetyczna zachowuje również wtedy, gdy oprócz wahań przypadkowych występuje jeszcze tendencja polegająca, w naszych przykładzie, na systematycznym zmniejszaniu się wskaźnika sezonowości.

Średnia sezonowość, jak to zauważyliśmy już wcześniej, nie uwzględnia tendencji, dlatego w dalszym ciągu korygujemy ją i to proporcjonalnie do dyspersji. Dlaczego tak? Weźmy dla przykładu wskaźniki miesięczne ustalonego miesiąca z r lat $P_m^1, \dots, P_m^t, \dots, P_m^r$. Gdyby nie było zjawiska dynamiki sezonowości, dyspersja obliczona według wzoru 4 pokazałaby, jakie są wahania przypadkowe tego wskaźnika. Gdy jednak zjawisko dynamiki sezonowości występuje, wskaźniki P_m^t zwiększają się na przykład z roku na rok, wtedy dyspersja jest większa i to tym większa, im szybszy jest ten wzrost. To naprowadziło nas na myśl korygowania średniej sezonowości proporcjonalnie do dyspersji.

Znajomość prognozy wskaźnika sezonowości jest nam potrzebna, aby wiedzieć, o ile trzeba skorygować średnią sezonowość. Oczywiście

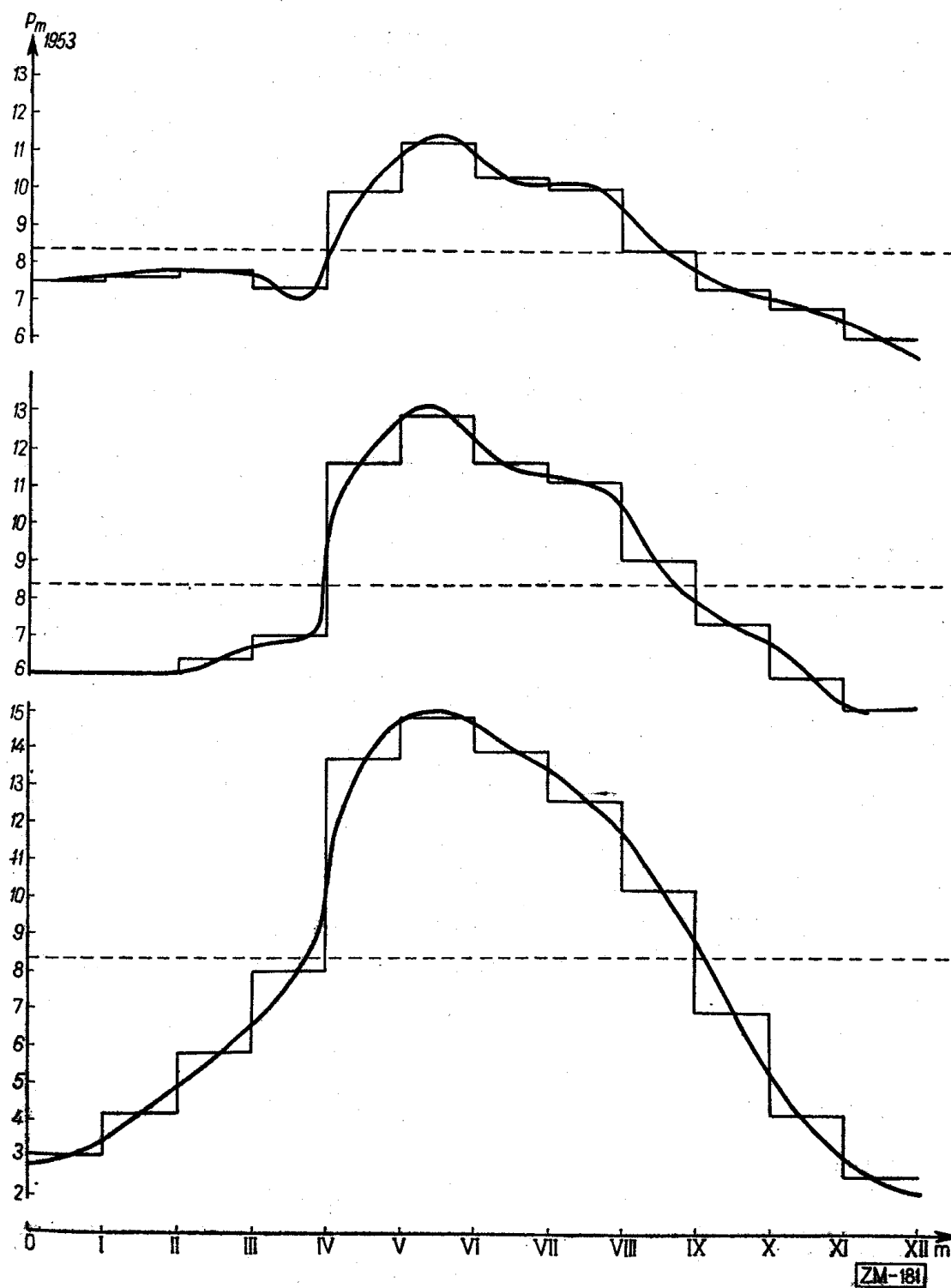
im bardziej prognoza wskaźnika sezonowości będzie się różniła od wskaźnika średniej sezonowości, tym większe wprowadzimy zmiany do średniej sezonowości, a tym samym większe będą współczynniki n i l przy dyspersjach.

W ustępie 4 proponujemy używać do prognozy wskaźnika sezonowości empiryczną prostą regresji. Zauważmy tu, że daje ona prognozę wskaźnika sezonowości na rok 1954 równą 74, a prognoza obliczona za pomocą prostej regresji wynosi 73,6.

Powiedzenie, że korygujemy średnią sezonowość proporcjonalnie do dyspersji — nie jest ściśle. Naprawdę dzielimy miesiące na trzy grupy.

Pierwsza składa się z kwietnia i października. W miesiącach tych zachowujemy jako prognozę średnią arytmetyczną wskaźników miesięcznych. Druga grupa składa się z stycznia, lutego, marca, listopada i grudnia. W miesiącach tych średnią arytmetyczną wskaźników miesięcznych zwiększamy o n -krotność dyspersji. Pozostałe miesiące tworzą trzecią grupę, w której średnie arytmetyczne wskaźników miesięcznych zmniejszamy o l -krotność dyspersji.

Podział miesięcy na takie grupy jest zupełnie zrozumiały, jeśli się weźmie pod uwagę kierunek, w jakim postępują zmiany sezonowości. Idą one mianowicie ku równomiernemu rozłożeniu skupu na wszystkie miesiące, a na początku tego rozwoju główna część skupu przypada na miesiące letnie, a minimalna na miesiące zimowe. Można by odczytać z tablicy 1, w których miesiącach wskaźniki miesięczne rosną, w których maleją, a w których utrzymują się na ustalonym poziomie. Jest to jednak utrudnione tym, że tablica jest mało obszerna i przez to wahania przypadkowe zasłaniają obraz dynamiki wskaźników miesięcznych. Do znalezienia podziału miesięcy na wspomniane grupy posłużyliśmy się tablicą 2, która podaje sezonowość w roku 1953 poszczególnych powiatów województwa wrocławskiego, uporządkowanych według ich wskaźników sezonowości. Przyjęliśmy hipotezę, że sezonowości podane w tablicy 2 dla różnych powiatów w tym samym roku obrazują zmiany sezonowości występujące w jednym powiecie (lub województwie) w kolejnych latach. Traktujemy przeto wszystkie sezonowości z tablicy 2 jako sezonowości jednego powiatu w kolejnych etapach rozwoju. Z tablicy 2 odczytaliśmy, że wskaźniki miesięcy pierwszej grupy utrzymują się na jednakowym poziomie (tj. występują tylko wahania przypadkowe), wskaźniki miesięcy drugiej grupy wzrastają a trzeciej maleją. Ilustruje to wykres 2, na którym przedstawiono sezonowości powiatów o największym i najmniejszym wskaźniku sezonowości oraz sezonowość województwa wrocławskiego. Chcemy więc korygować średnią sezonowość w ten sposób, żeby wskaźniki miesięczne miesięcy z pierwszej grupy zostawić bez zmian, wskaźniki miesięczne drugiej grupy zwiększyć proporcjonalnie do dyspersji, a wskaźniki trzeciej



Rys. 2. Krzywe sezonowości roku 1953 kolejno dla Zabkowic Śląskich ($K = 28,9$), województwa wrocławskiego ($K = 81,5$), Bolesławca ($K = 226,1$)

grupy analogicznie zmniejszyć. Żądamy teraz, żeby po tej zmianie wskaźnik sezonowości prognozy był równy ekstrapolowanemu wskaźnikowi sezonowości i żeby przewidywana sezonowość była sezonowością, żeby był spełniony warunek $P_I + \dots + P_{XII} = 100$.

Prowadzi to do układu równań

$$\sum_{m=I,II,III,XI,XII} (\bar{P}_m + n\sigma_m)^2 + \sum_{m=V}^{IX} (\bar{P}_m - l\sigma_m)^2 + \bar{P}_{IV}^2 + \bar{P}_X^2 - 833\frac{1}{3} = K^{r+1},$$

$$n \sum_{m=I,II,III,XI,XII} \sigma_m - l \sum_{m=V}^{IX} \sigma_m = 0,$$

którego jedno rozwiązanie dla n i l przedstawione jest we wzorach (7) i (8). Drugiego rozwiązania nie podaliśmy, gdyż przedstawia ono sezonowość o niedobrej strukturze, w której mianowicie największe wskaźniki miesięczne przypadają na miesiące zimowe.

KATEDRA ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI UNIwersYTETU WROCLAWSKIEGO

Praca wpłynęła 1. 6. 1956

Prace cytowane

- [1] Praca zbiorowa, *Ekonomika Przemysłu Mleczarskiego*, Warszawa 1954.
- [2] M. Gębka, T. Kmita, K. Zieliński, *Skup mleka*, Warszawa 1954.

M. ГУТМАН (Вроцлав)

О ПРЕДСКАЗАНИИ СЕЗОННОСТИ СКУПКИ МОЛОКА

РЕЗЮМЕ

Месечным индексом месяца m года i называем число определенное формулой (1).

Сезонностью года i называем систему 12 месячных индексов $\{P_I^i, \dots, P_{XII}^i\}$. Индексом сезонности года i называем число определенное формулой (5). Зная сезонность в годы $1, 2, \dots, r$ можно предсказать сезонность в годе $(r+1)$ -ом следующим образом:

- 1° вычисляем среднюю сезонность $\{\bar{P}_I, \dots, \bar{P}_{XII}\}$ по формуле (2);
- 2° вычисляем дисперсию σ_m месячных индексов для каждого месяца по формуле (4);
- 3° из регрессии находим прогноз K^{r+1} ;
- 4° в качестве прогноза сезонности в годе $r+1$ берём сезонность $\{\tilde{P}_I, \dots, \tilde{P}_{XII}\}$ определенную по формуле (6), где числа n и l определяются по (7) и (8). Это одно из решений системы (9) (второе решение отбрасываем, так как представляет оно сезонность имеющую плохую структуру).

На основании скупки молока за годы 1943 - 1953 методом этим вычислено прогноз сезонности на 1954 год. Оказывается, что прогноз вычисленный предлагаемым методом лучше чем прогноз вычисленный методами употребляемыми до сих пор планировщиками молочной промышленности.

M. GUTMAN (Wrocław)

ON SEASONALITY FORECASTS IN THE TRADE BUYING OF MILK

SUMMARY

The paper contains the method of forecasting seasonality in the trade buying of milk.

The number defined by formula (1), where M_m^i denotes the amount of milk bought in the month m of the year i and M^i denotes the total amount of milk bought in the year i , is called the month index of month m and year i .

A set of twelve month indices, $\{P_1^i, \dots, P_{XII}^i\}$ is called the seasonality of year i . Let us call the number defined by formula (5) the seasonality index of year i . Knowing the seasonality of the years $1, 2, \dots, r$ we forecast the seasonality of the year $(r+1)$ in the following way:

- 1° we calculate the mean seasonality $\{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{XII}\}$ by means of formula(2);
- 2° we calculate the standard deviation σ_m of month indices for each month separately by means of formulas (4);
- 3° from a linear regression we find the forecast K^{r+1} ;
- 4° as a forecast of seasonality in the year $r+1$ we take the seasonality $\{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{XII}\}$ defined by formula (6), in which numbers n and l are determined from formulas (7) i (8). They constitute one of the solutions of the system of equations (9) (the other solution is rejected since it represents seasonality of a bad structure).

This method was used to calculate the seasonality forecast for the year 1954 on the basis of the data concerning the buying of milk in the years 1943-1953. The forecast proved to be far better than those obtained by methods hitherto used by the dairy industry plants.
