ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

T. KACZOREK (Warszawa)

O MACIERZACH, KTÓRYCH MACIERZE ODWROTNE MAJĄ ELEMENTY DODATNIE

W różnych zagadnieniach technicznych, a w szczególności w zagadnieniach elektrotechniki teoretycznej i stosowanej, spotykamy się z następującym zagadnieniem: Dla jakiej klasy macierzy o elementach będących liczbami rzeczywistymi macierze odwrotne mają wszystkie elementy dodatnie? Zagadnienie to wyłania się między innymi przy analizie liniowych obwodów elektrycznych [1], [2], [6], [8], [10]. Spotykamy się z nim również w zagadnieniu chłodzenia maszyn elektrycznych [5]. Sprecyzowanie własności tej klasy macierzy pozwoli wyciągnąć, na przykład we wspomnianych wyżej zagadnieniach, wnioski mające ważne znaczenie teoretyczne i praktyczne.

TWIERDZENIE (¹). *Niech macierz $A = (a_{kl})$ będzie macierzą symetryczną spełniającą następujące warunki:*

$$(\alpha) \qquad a_{ll} \geqslant \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n} |a_{li}|,$$

$$(\beta) \qquad a_{kl} \leqslant 0 \quad dla \quad k \neq l,$$

(γ) *w każdym wierszu (kolumnie) macierzy $A_p = (a_{kl})$ stopnia p $(p = 2,\ldots,n)$ powstałej przez rozszerzenie z macierzy $A_{p-1} = (a_{kl})$, są przynajmniej dwa elementy różne od zera.*

Wtedy macierz odwrotna A^{-1} istnieje i ma wszystkie elementy dodatnie.

Dowód. Udowodnimy najpierw, że macierz symetryczna spełniająca warunki (α), (β) i (γ) ma wyznacznik większy od zera. Wykażemy to przez indukcję ze względu na stopień macierzy. Załóżmy, że dla wszystkich

(¹) W czasie opracowywania tego artykułu zapoznałem się z pracą W. Ledermana *On the asymptotic probability distribution for certain Markoff processes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 46 (1950). W pracy tej podano warunki dostateczne do istnienia macierzy dołączonej o wszystkich elementach nieujemnych. Z rozważań Ledermana nie wynika twierdzenie podane niżej. Ponadto metoda dowodu twierdzenia podana w tym artykule różni się od metod stosowanych w pracy Ledermana.

macierzy symetrycznych $A^{(1)}$ stopnia $n-1$ spełniających warunki (α), (β) i (γ) $\det A^{(1)} > 0$. Niech A będzie dowolną macierzą symetryczną stopnia n spełniającą warunki (α), (β) i (γ). Z warunku (α) i (γ) wynika, że $a_{ll} > 0$, więc

(1) $$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mnożąc kolejno elementy pierwszego wiersza $\det A$ przez $-a_{21}, -a_{31}, \dots \dots, -a_{n1}$ i dodając je odpowiednio do elementów wiersza drugiego, trzeciego, aż do n-tego włącznie, otrzymujemy

(2) $$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$a_{kl}^{(1)} = a_{kl} - \frac{a_{1l}\, a_{k1}}{a_{11}} \qquad (k, l = 2, \dots, n).$$

Niech $A^{(1)} = (a_{kl}^{(1)}), k, l = 2, \dots, n$. Mamy $\det A = a_{11}\det A^{(1)}$. Wobec $a_{11} > 0$ oraz założenia indukcyjnego wystarczy udowodnić, że macierz $A^{(1)}$ jest macierzą symetryczną spełniającą warunki (α), (β) i (γ).

Otóż symetria macierzy $A^{(1)}$ oraz to, że spełnia ona warunki (β) i (γ), są widoczne bezpośrednio z wzorów na $a_{kl}^{(1)}$. Aby udowodnić, że macierz $A^{(1)}$ spełnia warunek (α), zwróćmy uwagę na to, że

$$a_{ll}^{(1)} = a_{ll} - \frac{a_{1l}\, a_{l1}}{a_{11}} \geqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} |a_{li}| - \frac{a_{2l}\, a_{l1}}{a_{11}} = \sum_{\substack{i=2 \\ i\neq l}}^{n} |a_{li}| + |a_{l1}|\left(1 - \frac{|a_{1l}|}{a_{11}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{\substack{i=2 \\ i\neq l}}^{n} |a_{li}| + |a_{l1}| \sum_{\substack{i=2 \\ i\neq l}}^{n} \frac{|a_{1i}|}{a_{11}} = \sum_{\substack{i=2 \\ i\neq l}}^{n} \left(|a_{li}| + \frac{|a_{l1}|\,|a_{1i}|}{a_{11}}\right) \geqslant \sum_{\substack{i=2 \\ i\neq l}}^{n} |a_{li}^{(1)}|,$$

co dowodzi, że $A^{(1)}$ spełnia warunek (α).

Dla macierzy A_2 stopnia 2 macierz odwrotna ma postać

(3) $$A_2 = \frac{1}{\det A_2}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\det A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

oraz

$$a_{ll} > 0 \quad \text{dla} \quad l = 1, 2, \; a_{12} = a_{21} < 0.$$

Twierdzenie dla macierzy A_2 stopnia 2 jest więc spełnione. Przypuśćmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla macierzy A_{n-1} stopnia $n-1$. Wykażemy, że jest ono wtedy też prawdziwe i dla macierzy A_n stopnia n. Korzystając z metody rozszerzania [3], możemy macierz nieosobliwą A_n rozpatrywać jako macierz powstałą przez rozszerzenie z macierzy nieosobliwej A_{n-1}

(4) $$A_n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \phantom{A_{n-1}} & n \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array},$$

gdzie:

A_{n-1} jest macierzą spełniającą warunki twierdzenia, o postaci

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix},$$

A_{12} jest macierzą kolumnową stopnia $(n-1)\times 1$, posiadającą przynajmniej jeden element niezerowy,

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

A_{21} jest macierzą wierszową stopnia $1\times(n-1)$, posiadającą przynajmniej jeden element niezerowy,

$$A_{21} = [a_{n1} a_{n2} \; \dots \; a_{n,n-1}],$$

A_{22} jest macierzą niezerową, jednoelementową,

$$A_{22} = [\dot{a}_{nn}].$$

Niech macierz A_{n-1}^{-1} o postaci

$$(5)\qquad A_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

będzie macierzą odwrotną do macierzy A_{n-1}. Wówczas wobec (4) macierz A_n^{-1} jest postaci

$$(6)\qquad A_n^{-1} = \begin{array}{r} \\ \\ n \end{array}\begin{array}{c} \hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx} n \\ \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} + \dfrac{A_{n-1}^{-1}A_{12}A_{21}A_{n-1}^{-1}}{a_n} & -\dfrac{A_{n-1}^{-1}A_{12}}{a_n} \\ -\dfrac{A_{21}A_{n-1}}{a_n} & \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix} \end{array},$$

gdzie $a_n = a_{nn} - A_{21}A_{n-1}^{-1}A_{12}$.

Przypuśćmy, że macierz (5) ma wszystkie elementy dodatnie. Wykażemy wtedy, że macierze $-A_{n-1}^{-1}A_{12}$, $-A_{21}A_{n-1}^{-1}$, $A_{n-1}^{-1}A_{12}\,A_{21}A_{n-1}^{-1}$ mają też wszystkie elementy dodatnie.

Obliczmy macierze $-A_{n-1}^{-1}A_{12}$, $-A_{21}A_{n-1}^{-1}$. Zachodzą związki

$$(7)\qquad -A_{n-1}^{-1}A_{12} = - \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ n-1 \end{array}\begin{array}{c} \hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx} n-1 \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \sum_{\alpha=1}^{n-1} A_{1\alpha} a_{\alpha n} \\ \sum_{\alpha=1}^{n-1} A_{2\alpha} a_{\alpha n} \\ \dots \\ \sum_{\alpha=1}^{n-1} A_{n-1,\alpha} a_{\alpha n} \end{bmatrix},$$

$$(8)\qquad -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1} = -[a_{n1}a_{n2}\ \dots\ a_{nn-1}]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= -\Big[\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_{n\alpha}A_{\alpha 1}\ \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_{n\alpha}A_{\alpha 2}\ \dots\ \sum_{\alpha=1}^{\alpha-1} a_{n\alpha}A_{\alpha,n-1}\Big].$$

Z warunków (β) i (γ) twierdzenia wynika, że wszystkie elementy macierzy $\boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{21}$ są niedodatnie i przynajmniej jeden z nich w każdej z tych macierzy jest różny od zera. Wobec tego macierze $-\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$, $-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ mają wszystkie elementy dodatnie. Macierz $\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ można traktować jako

$$(9)\qquad [-\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}][-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}] = \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1},$$

a więc jako iloczyn dwóch macierzy o wszystkich elementach dodatnich. Macierz $\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ ma zatem wszystkie elementy dodatnie. Teza twierdzenia zostanie dowiedziona, jeżeli wykażemy, że

$$(10)\qquad a_n = a_{nn} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} > 0.$$

Obliczając wartość wyznacznika macierzy $\boldsymbol{A}_n$ rozwijamy go według ostatniej (n-tej) kolumny. Dostajemy wtedy

$$(11)\qquad \det\boldsymbol{A}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha n}A'_{\alpha n},$$

gdzie $A'_{\alpha n}$ jest kofaktorem elementu $a_{\alpha n}$ macierzy $\boldsymbol{A}_n$. Obliczając z kolei wartości $A'_{\alpha n}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) rozwijamy je według ostatniego (n-tego) wiersza. Uwzględniając (5) możemy napisać

$$(12)\qquad \det\boldsymbol{A}_n = a_{nn}A'_{nn} - \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_{\alpha n}\sum_{\mu=1}^{n-1} A'_{nn}A_{\mu\alpha}a_{n\mu} =$$

$$= A'_{nn}[a_{nn} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}].$$

Ponieważ $A'_{nn} > 0$ i $\det\boldsymbol{A}_n > 0$, zatem z (12) otrzymujemy

$$a_{nn} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} > 0.$$

Twierdzenie zostało więc dowiedzione.

Przykład. Rozważmy obwód liniowy w stanie ustalonym przedstawiony na rysunku 1. Obwód ten zasilają idealne źródła prądowe (nie pokazane na rysunku). Rozwiązując rozpatrywany obwód metodą potencjałów węzłowych ([1], [2]) otrzymujemy układ trzech równań liniowych, który można napisać macierzowo następująco:

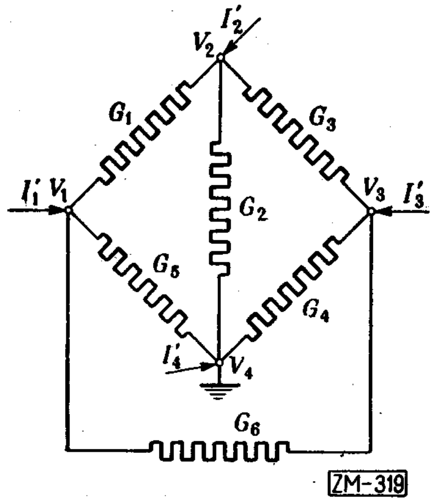
(13) $$\boldsymbol{G}_3 \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{I}',$$

gdzie

$$\boldsymbol{G}_3 = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{c|c|c} G_1+G_5+G_6 & -G_1 & -G_6 \\ \hline -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_3 \\ \hline -G_6 & -G_3 & G_3+G_4+G_6 \end{array}\right|,$$

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I}' = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{bmatrix}.$$

Elementami macierzy symetrycznej $\boldsymbol{G}_3$ ([1], [2]) na głównej przekątnej są przewodności własne węzłów G_{ll} $(l = 1, 2, 3)$, tj. sumy wszystkich przewodności gałęzi przyłączonych do rozpatrywanego węzła, a poza główną przekątną przewodności wzajemne G_{lk} $(l, k = 1, 2, 3)$ gałęzi łączących rozpatrywane węzły. Elementami macierzy $\boldsymbol{V}'$, $\boldsymbol{I}'$ są odpowiednie potencjały węzłów niezależnych V_l $(l = 1, 2, 3)$ oraz wypadkowe prądy I_l' doprowadzone z idealnych źródeł prądowych do poszczególnych węzłów niezależnych.



Rys. 1

Jak wiadomo [1], macierz $\boldsymbol{G}_3$ otrzymujemy z macierzy $\boldsymbol{G}_4$ przez skreślenie w niej wiersza i kolumny odpowiadających węzłowi przyjętemu za węzeł odniesienia. $\boldsymbol{G}_4$ jest macierzą symetryczną o postaci

$$\boldsymbol{G}_4 = {}_{4}\!\diagdown^{4}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = {}_{4}\!\diagdown^{4}\left|\begin{array}{c|c|c|c} G_1+G_5+G_6 & -G_1 & -G_6 & -G_5 \\ \hline -G_1 & G_1+G_2+G_3 & -G_3 & -G_2 \\ \hline -G_6 & -G_3 & G_3+G_4+G_6 & -G_4 \\ \hline -G_5 & -G_2 & -G_4 & G_2+G_4+G_5 \end{array}\right|.$$

Elementy macierzy G_4, będące liczbami rzeczywistymi, spełniają zależności

$$G_{ll} = -\sum_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{4} G_{la} = -\sum_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{4} G_{al} \quad \text{dla} \quad l = 1, \ldots, 4. \tag{14}$$

Wskutek tego dla elementów macierzy G_3 mamy

$$G_{ll} > \sum_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} |G_{la}| = \sum_{\substack{a=1\\a\neq l}}^{3} |G_{al}| \quad \text{dla} \quad l = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Macierz G_3 spełnia zatem warunki twierdzenia. Bez dalszych obliczeń możemy stwierdzić, że:

1. $\det G_3 > 0$,
2. wszystkie elementy macierzy odwrotnej G_3^{-1} są dodatnie.

Te własności pozwalają wyciągnąć ważne wnioski elektryczne, których tu nie przytaczamy.

Prace cytowane

[1] T. Cholewicki, *Macierzowa analiza obwodów liniowych*, Warszawa-Wrocław 1958.

[2] P. Le Corbeiller, *Matrix analysis of electric networks*, New York 1950.

[3] W. N. Faddiejewa, *Metody numeryczne algebry liniowej*, Warszawa 1955.

[4] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва 1954.

[5] J. Hak, *Lösung eines Wärmequellen-Netzes mit Berücksichtigung der Kühlströme*, Archiv für Elektrotechnik 3 (1956).

[6] G. Kron, *Tensor analysis of networks*, New York 1944.

[7] A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa*, cz. I, Warszawa-Wrocław 1953.

[8] W. Le Page i S. Seely, *General networks analysis*, New York 1952.

[9] H. Schwerdtfeger, *Introduction to linear algebra and the theory of matrices*, Groningen 1950.

[10] S. A. Stigant, *Modern electrical engineering mathematics*, London 1947.

Praca wpłynęła 16. 12. 1958

Т. КАЧОРЕК (Варшава)

О МАТРИЦАХ, ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

РЕЗЮМЕ

Дано достаточные условия существования симметричной матрицы A с элементами a_{kl} являющимися действительными числами, имеющей обратную матрицу, все элементы которой положительны. Условия эти следующие: 1. $a_{ll} \geqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} |a_{li}|$, 2. $a_{kl} \leqslant 0$ для $k \neq l$, 3. в каждой строке (столбце) по крайней мере два элементы не равны нулю.

Прилагается пример касающийся линейных электрических цепей постоянного тока.

T. KACZOREK (Warszawa)

ON MATRICES WHOSE INVERSE MATRICES HAVE POSITIVE ELEMENTS

SUMMARY

The author gives the necessary conditions of the existence of a symmetric matrix A with elements a_{kl}, which are real numbers, having an inverse matrix whose elements are all positive. The conditions are: 1) $a_{ll} \geqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} |a_{li}|$, 2) for $k \neq l$ $a_{kl} \leqslant 0$, 3) in every row (column) at least two elements are different from zero.

The theorem is illustrated by an example concerning the analysis of electrical circuits of direct current.