ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XIII, 3 (1973)

ALGORITHM 24

J. KUCHARCZYK (Wrocław)

ONE-DIMENSIONAL KNAPSACK FUNCTION

1. Procedure declaration. The procedure *knapsack* calculates the values of the one-dimensional knapsack function (see [1])

$$F(x) = \max\{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_m z_m;\ l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots + l_m z_m \leqslant x,\ z_i \geqslant 0,\ z_i \text{ integer}\}, \tag{1}$$

where P_i and $l_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ are given constants arranged as follows: $P_1/l_1 \leqslant P_2/l_2 \leqslant \ldots \leqslant P_m/l_m$.

Data:

m — number of variables z_i,
L — integer number playing the role of maximum x in (1),
$P[1:m]$ — integer array holding numbers $P_1, P_2, \ldots, P_m$,
$l[1:m]$ — integer array holding numbers $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Remark. The elements of the arrays P and l should satisfy $P[1]/l[1] \leqslant P[2]/l[2] \leqslant \ldots \leqslant P[m]/l[m]$. This is not tested by *knapsack*.

Results:

$Fg[0:L]$ — integer array of the values of (1),
$lg[0:L]$ — integer array indicating the optimal use of $l_1, l_2, \ldots, l_m$. If $lg[x] = k$ (> 0), then $l[k]$ should be used to obtain $Fg[x]$; if $l[x] = 0$, then consider $lg[x-1]$ since $Fg[x] = Fg[x-1]$.

Remark. The values of Fg and lg satisfy for $lg[x] > 0$ the equality

$$Fg[x] = Fg[x - l[lg[x]]] + P[lg[x]]. \tag{2}$$

2. Method used. Procedure *knapsack* has been coded according to the algorithm 1.B (ordered step-off) from [1].

3. Certification. Procedure *knapsack* has been verified on several simple examples and correct results have been obtained. All calculations were performed on the ODRA 1204 computer.

```
procedure knapsack(m,P,l,L,Fg,lg);
 value m,L;
 integer m,L;
 integer array P,l,Fg,lg;
 begin
  integer x,x2,j,V;
  for x:=0 step 1 until L do
   Fg[x]:=0;
  x2:=0;
  lg[0]:=1;
e21:
  j:=lg[x2];
e22:
  x:=x2+l[j];
  if x≤L
   then
   begin
    V:=P[j]+Fg[x2];
    if V≥Fg[x]
     then
     begin
      Fg[x]:=V;
      lg[x]:=j
     end V≥Fg[x]
   end x≤L;
  if j<m
   then
   begin
    j:=j+1;
    go to e22
```

```
    end j<m;
e31:
  if x2<L
   then x2:=x2+1
   else go to exit;
  x:=Fg[x2-1];
  if Fg[x2]>x
   then go to e21;
  Fg[x2]:=x;
  lg[x2]:=0;
  go to e31;
exit:
 end knapsack
```

Reference

[1] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, *The theory and computation of knapsack functions*, Operat. Res. 14 (1966), p. 1045-1074.

DEPT. OF STATISTICS AND OPERATIONS RESEARCH
INSTITUTE OF ADMINISTRATIVE SCIENCES
UNIVERSITY OF WROCŁAW

Received on 31. 8. 1972

J. KUCHARCZYK (Wrocław)

ALGORYTM 24

JEDNOWYMIAROWA FUNKCJA PLECAKOWA

STRESZCZENIE

Procedura *knapsack* oblicza wartości jednowymiarowej funkcji plecakowej (1) (patrz [1]).

Dane:

m — liczba zmiennych z_i,
L — liczba grająca rolę największego x w (1),
$P[1:m]$ — tablica całkowita liczb $P_1, P_2, \ldots, P_m$,
$l[1:m]$ — tablica całkowita liczb $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Uwaga. Elementy tablic P i l powinny spełniać nierówności $P[1]/l[1] \leqslant P[2]/l[2] \leqslant \ldots \leqslant P[m]/l[m]$. Warunków tych nie sprawdza się w procedurze *knapsack*.

Wyniki:

$Fg\,[0:L]$ — tablica całkowita wartości funkcji (1),

$lg\,[0:L]$ — tablica całkowita wskazująca optymalne użycie $l_1, l_2, \ldots, l_m$. Jeżeli $lg[x] = k$ (> 0), to dla otrzymania $Fg[x]$ powinno się użyć wielkości $l[k]$. Jeżeli $lg[x] = 0$, należy rozpatrzyć $lg[x-1]$, gdyż $Fg[x] = Fg[x-1]$.

Uwaga: Wartości Fg i lg spełniają dla $lg[x] > 0$ równość (2).

Procedura *knapsack* została sprawdzona na m. c. ODRA 1204, gdzie na kilku przykładach obliczenia dały poprawne wyniki; użyta metoda opiera się na algorytmie 1.B z [1].