ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XIII, 2 (1972)

D. STOYAN (Freiberg/Sa.)

ABSCHÄTZUNGEN FÜR DIE BEDIENUNGS- UND ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORIE

1. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Es ist eine in der Bedienungs- und Zuverlässigkeitstheorie wohlbekannte Tatsache, daß viele Untersuchungen dann verhältnismäßig bequem durchgeführt werden können, wenn die das Verhalten der Systemelemente beschreibenden Zufallsgrößen (negativ) exponentiell verteilt sind. Ist das nicht der Fall, so ergeben sich erhebliche Schwierigkeiten; häufig ist es unmöglich, mit vertretbarem Aufwand zu exakten Aussagen über interessierende Systemparameter zu gelangen. Daher liegt der Gedanke nahe, Näherungswerte zu ermitteln, indem einfach mit Exponentialverteilungen (mit denselben Erwartungswerten wie die Original-Verteilungen) gerechnet wird. In gewissen Fällen — wenn das betrachtete Modell „Unempfindlichkeitseigenschaften" besitzt — erhält man auf diesem Wege exakte Ergebnisse (vgl. [4]). Allgemein kann man über die Genauigkeit dieser Näherungswerte nur wenig aussagen, oftmals weiß man im voraus nicht einmal, ob sie größer oder kleiner als die wahren Systemparameter sind. Im folgenden soll der Fall näher betrachtet werden, in dem wenigstens derartige (qualitative) Aussagen möglich sind. Dazu müssen die betrachteten Modelle gewisse „Monotonieeigenschaften" besitzen und die auftretenden Verteilungsfunktionen in passender Beziehung zu Exponentialverteilungen stehen.

Formal kann der Zusammenhang zwischen den das Verhalten der Systemelemente beschreibenden Verteilungsfunktionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ und dem interessierenden Systemparameter a wie folgt ausgedrückt werden:

$$a = f(F_1, F_2, \ldots, F_n). \tag{1.1}$$

Beispiel. $a = w$ = mittlere Wartezeit der Forderungen beim Modell $GI/G/1$ im stationären Fall, $F_1 = B$ = Bedienungszeitverteilungsfunktion, $F_2 = A$ = Pausenzeitverteilungsfunktion, $w = f(A, B)$.

Hier interessieren solche Modelle, die Monotonieeigenschaften der folgenden Art besitzen:

$$(1.2)\qquad F_i \overset{(2)}{\leqslant} G_i \Rightarrow f(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n) \leqslant f(F_1, \ldots, G_i, \ldots, F_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Dabei ist $\overset{(2)}{\leqslant}$ die folgende Halbordnungsrelation für Verteilungsfunktionen H_i mit $\int\limits_0^\infty x dH_i(x) < \infty$ (vgl. [2]):

$$(1.3)\qquad H_1 \overset{(2)}{\leqslant} H_2 \Leftrightarrow tH_1(t) + \int\limits_t^\infty x dH_1(x) \leqslant tH_2(t) + \int\limits_t^\infty x dH_2(x) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Beim Warteschlangenmodell $GI/G/1$ beispielsweise gilt für die mittlere Forderungswartezeit w im stationären Fall (vgl. [9]):

$$w = f(A, B),$$

$$\overline{A}_1 \overset{(2)}{\leqslant} \overline{A}_2 \Rightarrow f(A_1, B) \leqslant f(A_2, B), \quad \overline{A}_i(t) = 1 - A_i(-t+0) \quad (i = 1, 2),$$

$$B_1 \overset{(2)}{\leqslant} B_2 \Rightarrow f(A, B_1) \leqslant f(A, B_2).$$

Allgemeine Kriterien für Monotonieeigenschaften der Gestalt (1.2) und weitere Beispiele findet man in [10].

Wenn ein zu untersuchendes Modell aus der Bedienungs- oder Zuverlässigkeitstheorie der Bedingung

$$F_i \overset{(2)}{\leqslant} G_i \Rightarrow f(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n) \leqslant f(F_1, \ldots, G_i, \ldots, F_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, r \leqslant n)$$

genügt und wenn außerdem gilt

$$(1.4)\qquad F_i \overset{(2)}{\leqslant} E_{m_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

mit

$$\int\limits_0^\infty t dF_i(t) = m_i, \quad E_{m_i}(t) = 1 - \exp(-t/m_i),$$

so folgt

$$f(F_1, F_2, \ldots, F_n) \leqslant f(E_{m_1}, E_{m_2}, \ldots, E_{m_r}, F_{r+1}, \ldots, F_n).$$

Das bedeutet: Arbeitet man bei dem zu untersuchenden Modell anstelle der Verteilungsfunktionen $F_1, F_2, \ldots, F_r$ mit Exponentialverteilungsfunktionen mit den gleichen Erwartungswerten, so ergibt sich ein Näherungswert, der größer ist als der exakte Systemparameter.

Entsprechende Aussagen gelten im Fall $E_{m_i} \overset{(2)}{\leqslant} F_i$.

Zur bequemen Nachprüfung von (1.4) sind in Abschnitt 2 einige Kriterien für den Vergleich von Verteilungsfunktionen mit Exponentialverteilungsfunktionen (bezüglich $\overset{(2)}{\leqslant}$) angegeben. Zwei dieser Kriterien setzen nur die Kenntnis des Erwartungswertes, der Streuung sowie oberer und unterer Schranken für die zu untersuchenden Zufallsgrößen voraus. Das entspricht dem in der Praxis oft auftretenden Fall „unvollständiger Informationen" über die Verteilungsfunktionen (z. B. bei der Projektierung von Bedienungssystemen).

In Abschnitt 3 wird die Theorie auf den Fall des Wartemodells $GI/G/1$ angewendet. Es wird außerdem gezeigt, wie die von Kingman [3] angegebene obere Schranke für w oft wesentlich verbessert werden kann.

Schließlich wird in Abschnitt 4 eine Abschätzung für das PALMsche Mehrmaschinenmodell (vgl. z. B. [11], S. 189-204) geliefert.

2. KRITERIEN FÜR DEN VERGLEICH MIT EXPONENTIALVERTEILUNGEN

Im folgenden werden einige hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Verteilungsfunktion F mit dem Erwartungswert m der Relation

$$F \overset{(2)}{\leqslant} E_m \tag{2.1}$$

genügt.

(a) *Die Kurve* $F(t)$ $(0 < t < \infty)$ *berührt die Kurve* $1-\exp(-t/m)$ *in genau einem Intervall* $[t_1, t_2](F(t) = 1-\exp(-t/m);\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ *und es gilt* $F(t) < 1-\exp(-t/m)$ *für* $t < t_1$, $F(t) > 1-\exp(-t/m)$ *für* $t > t_2$ (vgl. [5], [10]).

(b) F *besitzt eine nichtfallende Fehlerrate* $\lambda(t)$ (vgl. [5]), *wobei* $\lambda(t)$ *durch* $\lambda(t) = F'(t)/1-F(t)$ *definiert ist.*

(c) *O.B.d.A. wird gesetzt* $m = 1$. *Dann ist die Beziehung*

$$F \overset{(2)}{\leqslant} E_1 \tag{2.2}$$

erfüllt, wenn gilt $F(a)+F(b+0) = 1$ *mit* $b = b(a)$.

In Tabelle 1 sind zu gegebenem a die zugehörigen Werte $b(a)$ verzeichnet.

Die Werte $b(a)$ genügen der Gleichung

$$b(a) = 1 - \ln\left[(1-a)\left(b(a)-a\right)^{-1}\right]. \tag{2.3}$$

Man gelangt zu den $b(a)$ auf Grund folgender Überlegung. Das maximale Element (bezüglich $\overset{(2)}{\leqslant}$) in der Menge aller Verteilungsfunktionen F mit dem Erwartungswert 1 und $F(a)+F(b+0) = 1$ ist nach [9], S. 732, die Verteilungsfunktion F_0,

$$F_0(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant a, \\ (1-a)(b-a)^{-1}, & a < t \leqslant b, \\ 1, & b < t. \end{cases}$$

TABELLE 1

a	$b(a)$
0,1	1,20
0,2	1,41
0,3	1,69
0,4	1,95
0,5	2,26
0,6	2,63
0,7	3,07
0,8	3,67
0,9	4,61

Bei festem a hängt es von der Größe von b ab, ob die Beziehung

$$\mathfrak{F}_0(t) = tF_0(t) + \int_t^\infty t\,dF_0(t) \leqslant t + \exp(-t)$$

für alle t erfüllt ist oder nicht. $b(a)$ ist derjenige b-Wert, bei dem $\mathfrak{F}_0$ die Kurve $t+\exp(-t)$ von unten berührt.

(*d*) *Es sei wieder* $m = 1$. *Dann ist die Beziehung* (2.2) *erfüllt, wenn die Streuung*

$$\int_0^\infty (t-1)^2\,dF(t)$$

nicht größer als der Parameter σ^2 *ist und zusätzlich*

$$F\left(a(\sigma)\right) + F\left(b(\sigma)+0\right) = 1$$

gilt.

In Tabelle 2 sind zu gegebener Streuung σ^2 die Werte $a(\sigma)$ und $b(\sigma)$ aufgeführt.

Die Größen $a(\sigma)$ und $b(\sigma)$ ergeben sich wie folgt.

TABELLE 2

σ^2	$a(\sigma)$	$b(\sigma)$
0,1	0,05	6,66
0,2	0,11	5,74
0,3	0,17	4,96
0,4	0,24	4,40
0,5	0,32	3,83
0,6	0,44	3,18

Es sei $F_{\alpha\beta}$ die Zwei-Punkt-Verteilungsfunktion mit den Sprungstellen α und $\beta(\alpha < \beta)$, der Streuung σ^2 und dem Erwartungswert 1. Aus $F_{\alpha\beta} \overset{(2)}{\leqslant} E_1$ und $F_{\gamma\delta} \overset{(2)}{\leqslant} E_1$ folgt auch $F_{\lambda\mu} \overset{(2)}{\leqslant} E_1$ für $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \gamma$, wie man durch elementare Rechnungen zeigen kann. Dabei gibt es nur dann Zwei-Punkt-Verteilungen, die kleiner als E_1 sind, wenn $\sigma^2 < \sigma_0^2$. Die Konstante σ_0^2 genügt der Gleichung

$$\sigma_0^2 = \tfrac{1}{2}\exp(2 - \sigma_0^{-2})$$

und ist näherungsweise gleich $\sigma_0^2 = 0{,}6477$.

Gilt $\sigma^2 < \sigma_0^2$, so existieren zwei Zwei-Punkt-Verteilungen $F_{a(\sigma)\beta}$ und $F_{ab(\sigma)}\big(a(\sigma) < a,\, \beta < b(\sigma)\big)$ mit der Streuung σ^2 und dem Erwartungswert 1 mit

$$F_{a(\sigma)\beta} \overset{(2)}{\leqslant} E_1, \qquad F_{ab(\sigma)} \overset{(2)}{\leqslant} E_1,$$

so daß für $\gamma < a(\sigma)$ oder $\delta > b(\sigma)$ die Beziehung $F_{\gamma\delta} \overset{(2)}{\leqslant} E_1$ nicht mehr erfüllt ist.

Es sei M^σ die Menge aller Verteilungsfunktionen F mit dem Erwartungswert 1, der Streuung σ^2 und $F\big(a(\sigma)\big) + F\big(b(\sigma)+0\big) = 1$. Für alle $F \in M^\sigma$ soll die Beziehung (2.2) erfüllt sein, also muß gelten

$$\begin{aligned}\sup_{F \in M^\sigma} \Big\{tF(t) + \int_t^\infty x\,dF(x)\Big\} &= \sup_{F \in M^\sigma} \Big\{\int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \max\{t, x\}\,dF(x)\Big\} \\ &\leqslant t + \exp(-t), \qquad a(\sigma) \leqslant t \leqslant b(\sigma).\end{aligned}$$

Nach [7] wird das obige Supremum bereits dann geliefert, wenn nur die Drei-Punkt-Verteilungen aus M^σ zur Konkurrenz zugelassen werden. Die spezielle Gestalt des Integrals und die Wahl des Intervalles $[a(\sigma), b(\sigma)]$

ermöglichen darüber hinaus sogar die Aussage, daß es genügt, nur die Zwei-Punkt-Verteilungen aus M^σ zu betrachten. Zu jeder Drei-Punkt-Verteilung G aus M^σ und beliebigen $t \in [a(\sigma), b(\sigma)]$ gibt es nämlich eine Zwei-Punkt-Verteilung $F_{\pi\varrho}$ mit dem Erwartungswert 1 und einer Streuung kleiner oder gleich σ^2 mit der Eigenschaft

$$I = \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \max\{t, x\} dF_{\pi\varrho}(x) = \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \max\{t, x\} dG(x).$$

Es sei Z die Menge der Zwei-Punkt-Verteilungen F mit dem Erwartungswert 1, deren Sprungstellen in der Menge $[a(\sigma), \pi] \cup [\varrho, b(\sigma)]$ liegen und für die gilt

$$\int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} (1-x)^2 dF(x) \geqslant \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} (1-x)^2 dF_{\pi\varrho}(x) \quad \text{und} \quad \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \max\{t, x\} dF(x) \geqslant I.$$

Da die Verteilungsfunktionen $F_{a(\sigma)\beta}$ und $F_{ab(\sigma)}$ zu M^σ gehören, ist der Durchschnitt $Z \cap M^\sigma$ nicht leer. Also existiert eine Zwei-Punkt--Verteilung F in M^σ mit der Eigenschaft

$$\int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \max\{x, t\} dF(x) \geqslant \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \max\{x, t\} dG(x).$$

Da sämtliche Zwei-Punkt-Verteilungen aus M^σ bezüglich $\overset{(2)}{\leqslant}$ kleiner als die Exponentialverteilungsfunktion sind, müssen nach den obigen Überlegungen auch alle anderen Elemente von M^σ bezüglich $\overset{(2)}{\leqslant}$ kleiner als diese sein.

Zur Berechnung der Werte $a(\sigma)$ und $b(\sigma)$ kann wie folgt vorgegangen werden:

Die beiden Lösungen t_1 und t_2 der Gleichung

$$t = \frac{1}{\sigma^2} \ln(1 + \sigma^2 \cdot t^2)$$

sind zu ermitteln und die Größen a_i,

$$a_i = 1 - t_i^{-1} \quad (i = 1, 2)$$

zu berechnen ($t_1 < t_2$).

Es gilt $a(\sigma) = a_1$ und

$$b(\sigma) = \frac{m - a_2 p}{1 - p} \quad \text{mit} \quad p = \frac{\sigma^2}{a_2^2 - 2a_2 + 1 + \sigma^2}.$$

3. ABSCHÄTZUNG DER MITTLEREN WARTEZEIT IM MODELL $GI/G/1$

3.1. Allgemeingültige Abschätzungen. Nach [4] (vgl. auch [8]) gilt für die mittlere Wartezeit w im stationären Fall beim Modell $GI/G/1$ die Abschätzung

$$w \leqslant \frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2(m_A - m_B)}, \tag{3.1}$$

wobei m_A bzw. m_B und σ_A^2 bzw. σ_B^2 der Erwartungswert und die Streuung der Pausenzeiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ bzw. der Bedienungszeiten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ sind.

Bei „kleinen" Bedienungszeiten ist (3.1) sehr ungenau:

Im Fall $m_B = \sigma_B^2 = 0$ ergibt sich die Abschätzung $\frac{1}{2}\sigma_A^2\, m_A^{-1}$, während der wahre Wert für w natürlich 0 ist.

Folgende Überlegung führt zu einer oberen Schranke für w, die besser als (3.1) ist und insbesondere für $m_B = \sigma_B^2 = 0$ den Wert 0 liefert.

Es wird eine Familie (Σ_λ) von Bedienungssystemen $GI/G/1$ betrachtet mit den (identisch verteilten) Pausenzeiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und den (identisch verteilten) Bedienungszeiten $\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \ldots$ $(0 \leqslant \lambda < m_A m_B^{-1}$; $E\alpha_1 = m_A$; $E\beta_1 = m_B)$. Die zu λ gehörige mittlere Wartezeit im stationären Fall sei $w(\lambda)$. Die $w(\lambda)$ sind endlich, wenn gilt $E\beta_1^2 < \infty$ (vgl. [7]).

SATZ 1. *Die Funktion $w(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < m_A m_B^{-1})$ ist monoton nicht fallend, stetig und konvex*; $w(0) = 0$.

Beweis. Nach [6] gilt

$$w(\lambda) = \sum_{\nu=1} \frac{1}{\nu} w_\nu(\lambda),$$

$$w_\nu(\lambda) = E\max\{0, \lambda\beta_1 - \alpha_1 + \ldots + \lambda\beta_\nu - \alpha_\nu\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Funktionen w_ν sind monoton nicht fallend, stetig und konvex und an der Stelle 0 gleich Null. Also besitzt w die gleichen Eigenschaften.

Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich folgende obere Schranke für w:

SATZ 2. *Es gilt die Abschätzung*

$$w \leqslant \frac{\sigma_A^2 m_B + \sqrt{(\sigma_A^2 m_B)^2 + m_A^2 \sigma_A^2 \sigma_B^2}}{m_A^2} = q, \tag{3.2}$$

wenn die reelle Zahl $\varkappa$,

$$\varkappa = \frac{m_A q}{2 m_B q + \sigma_B^2}, \tag{3.3}$$

größer als Eins ist.

Beweis. Wegen der Eigenschaften von $w(\lambda)$ muß gelten

$$w(\lambda) \leqslant v(\lambda),$$

wobei v die größte konvexe Funktion mit $v(0) = 0$ und

$$v(\lambda) \leqslant u(\lambda) = \frac{\sigma_A^2 + \lambda^2 \sigma_B^2}{2(m_A - \lambda m_B)}$$

ist. Die Funktion $v(\lambda)$ lautet

$$v(\lambda) = \begin{cases} q\lambda, & \lambda \leqslant \varkappa, \\ u(\lambda), & \lambda > \varkappa, \end{cases}$$

wobei q und $\varkappa$ gemäß (3.2) und (3.3) definiert sind. Im Intervall $[0, \varkappa)$ gilt $v(\lambda) < u(\lambda)$.

Wenn $\varkappa$ größer als Eins ist, ergibt sich

$$w \leqslant v(1) = q < u(1).$$

Vor allem für Systeme mit „geringer Belastung" $(m_B m_A^{-1} \ll 1)$ liefert (3.2) bessere Schranken für w als (3.1).

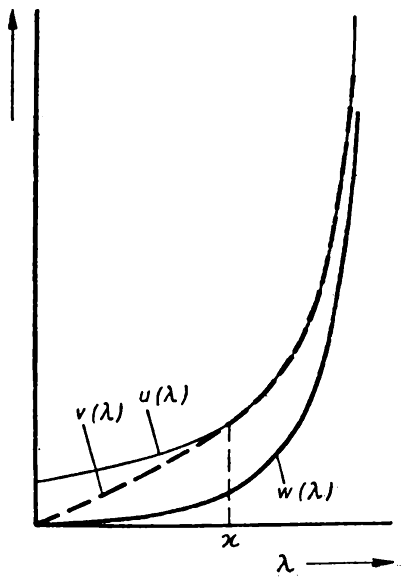

Abb. 1. Darstellung der Funktionen $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ und $w(\lambda)$

3.2. Abschätzungen mittels Exponentialverteilungen.
Nach Abschnitt 1 *gilt*

$$w \leqslant \frac{m_B^2}{m_A - m_B}, \tag{3.4}$$

sofern die Bedienungs- und Pausenzeitverteilungsfunktionen B und A den Beziehungen

$$B \overset{(2)}{\leqslant} E_{m_B} \tag{3.5}$$

und

$$E_{m_A} \overset{(2)}{\leqslant} A \tag{3.6}$$

genügen.

((3.6) ist äquivalent mit $A^- \overset{(2)}{\leqslant} E^-_{m_A}$; $A^-(t) = 1 - A(-t+0)$, $E^-_{m_A}(t) = \exp(t/m_A)$; $t < 0$.)

Aus (3.5) und (3.6) folgt nämlich

$$w = f(A, B) \leqslant f(E_{m_A}, E_{m_B}) = \frac{m_B^2}{m_A - m_B}.$$

Zahlenbeispiel.

$$m_A = 1, \qquad P(0{,}6 \leqslant \alpha_1 \leqslant 2{,}5) = 1, \qquad \sigma_A^2 = 0{,}40;$$

$$m_B = 0{,}2, \qquad P(0{,}1 \leqslant \beta_1 \leqslant 0{,}4) = 1, \qquad \sigma_B^2 = 0{,}01.$$

Das Kriterium (c) aus Abschnitt 2 garantiert die Richtigkeit von (3.5) und (3.6).

Für w ergeben sich die Schranken 0,256 (nach (3.1)) und 0,050 (nach (3.4)).

3.3. Abschätzungen mittels Normalverteilungen. Es bezeichne $\Phi(m; \sigma^2; t)$ die Normalverteilungsfunktion mit dem Erwartungswert m und der Streuung σ^2 sowie U die Verteilungsfunktion von $\beta_1 - \alpha_1$.

Wenn die Beziehung

$$U \overset{(2)}{\leqslant} \Phi(m_U; \tau_U^2) \qquad (\Phi(m_U; \tau_U^2) \overset{(2)}{\leqslant} U), \qquad m_U = m_B - m_A \tag{3.7}$$

erfüllt ist, so gilt

$$w \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \sum_{\nu=1}^{\infty} \tau_U \frac{1}{\sqrt{\nu}} [\varphi(z_\nu) + z_\nu \Phi(z_\nu)], \tag{3.8}$$

$$z_\nu = \sqrt{\nu}\, m_U \tau_U^{-1}; \; \nu = 1, 2, \ldots \text{ (1)}$$

---

(1) Der Fall, in dem U normal verteilt ist, wurde in A. A. Anis, E. H. Lloyd, *On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates*, Biometrika 40 (1953), S. 35-42 behandelt. (Vgl. auch: J. F. C. Kingman, *The heavy traffic approximation in the theory of queues*, Proceedings of the symposium on congestion theory, University of North Carolina, Chapel Hill 1964, S. 137-169.)

Die unendliche Summe ist näherungsweise gleich

$$\tau_U\left(\frac{1}{2a}-c+O(a)\right), \qquad a=-m_U\tau_U^{-1},$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2]^{-1}=0{,}58.$$

(φ bzw. Φ bezeichnen die Dichte bzw. Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung).

Beweis. Wie in [9] folgt aus (3.7) für alle ν die Gültigkeit von

$$E\max\{0,\beta_1-\alpha_1+\ldots+\beta_\nu-\alpha_\nu\} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \int_0^\infty x d\Phi(\nu(m_B-m_A);\nu\tau_U^2;x)$$
$$=\sqrt{\nu}\tau_U[\varphi(z_\nu)+z_\nu\Phi(z_\nu)].$$

Nach [6] gilt aber

$$w=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}E\max\{0,\beta_1-\alpha_1+\ldots+\beta_\nu-\alpha_\nu\},$$

woraus sich (3.8) unmittelbar ergibt. (Die Konvergenz der Reihe in (3.8) ist im Fall $m_A > m_B$ gesichert (vgl. [7]).)

Eine hinreichende Bedingung für (3.7) ist die folgende:

Die Kurve $U(t)$ $(0<t<\infty)$ berührt $\Phi(m_U;\tau_U^2;t)$ $(0<t<\infty)$ in genau einem Intervall $[t_1,t_2]$, und es gilt (vgl. [10])

$$U(t)<\Phi(m_U;\tau_U^2;t) \qquad \text{für } t<t_1$$

sowie

$$U(t)>\Phi(m_U;\tau_U^2;t) \qquad \text{für } t>t_2.$$

Der Parameter τ_U^2 ist so klein (groß) wie möglich zu wählen.

Bemerkung. Numerische Untersuchungen lieferten das Ergebnis, daß die Abschätzung nach (3.2) bei großen Streuungen σ_A^2 und σ_B^2 nützlich ist. Nach 3.3 sollte vorgegangen werden, wenn A und B Normalverteilungsfunktionen ähnlich sind.

4. EINE ABSCHÄTZUNG FÜR DAS PALMSCHE MEHRMASCHINENMODELL

Das PALMsche Mehrmaschinenmodell beschreibt ein Bedienungssystem, das aus s Maschinen und einer Reparaturstelle besteht. Die Maschinen fallen nach einer exponentiell verteilten Laufzeit (Parameter: λ)

aus und werden in der Reihenfolge ihres Ausfalls repariert. Die Reparaturzeiten sind Zufallsgrößen mit der Verteilungsfunktion $R(t)$ und dem Erwartungswert r. Unmittelbar nach Reparaturende beginnen die Maschinen wieder zu arbeiten.

In [11], S. 189-204, wurde dieses Modell analytisch behandelt. Für die mittlere Anzahl $a(R)$ der arbeitenden Maschinen im stationären Zustand gilt

$$a(R) = s\,\frac{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\frac{1}{c_i}}{1+sr\lambda\sum\limits_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\frac{1}{c_i}},\tag{4.1}$$

$$c_0 = 1, \qquad c_i = \prod_{j=1}^{i}\frac{\Phi(j\lambda)}{1-\Phi(j\lambda)},$$

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \exp(-st)\,dR(t).$$

Diese Formeln sind oft nur sehr schwer auswertbar. Daher sind Abschätzungen für $a(R)$ von Interesse und zwar besonders solche, die nur geringe Informationen über die Verteilungsfunktion $R(t)$ erfordern. Mit folgendem Satz ist eine derartige Abschätzung gegeben:

SATZ 3. *Es gelte für die Reparaturzeitverteilungsfunktion R mit dem Erwartungswert r die Beziehung $R \overset{(2)}{\leqslant} E_r$.*

Dann genügt die mittlere Anzahl der arbeitenden Maschinen der Abschätzung

$$s\,\frac{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}i!\,\lambda^i r^i}{1+sr\lambda\sum\limits_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}i!\,\lambda^i r^i} \leqslant a(R)\tag{4.2}$$

$$\leqslant s\,\frac{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\prod\limits_{j=1}^{i}\big(\exp(r\lambda j)-1\big)}{1+sr\lambda\sum\limits_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\prod\limits_{j=1}^{i}\big(\exp(r\lambda j)-1\big)}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $R \overset{(2)}{\leqslant} E_r$, nach [9] $\Theta_r \overset{(2)}{\leqslant} R$,

$$\Theta_r^{(t)} = \begin{cases} 0, & t \leqslant r, \\ 1, & t > r. \end{cases}$$

Hieraus folgt (vgl. z. B. [10], Satz 2) für alle positiven s die Beziehung ([2])

$$(4.3) \qquad \int_0^\infty \exp(-st)\,d\Theta_r(t) \leqslant \Phi(s) \leqslant \int_0^\infty \exp(-st)r^{-1}\exp(-t/r)\,dt.$$

Die Funktion $f(z)$,

$$f(z) = s\frac{z}{1+sr\lambda z}$$

ist im Intervall $[0, \infty)$ monoton wachsend. Daher folgt aus (4.3)

$$a(E_r) \leqslant a(R) \leqslant a(\Theta_r).$$

Diese Ungleichung ausgeschrieben ist (4.2).

Der Satz 3 rechtfertigt in gewissem Sinne die in [1] angegebene Vorgehensweise der „Praktiker" der Bedienungstheorie, die darin besteht, daß für $a(R)$ (und andere Kennziffern des Modells) solche Werte gewählt werden, die zwischen denen liegen, die sich bei konstanten und exponentiellen Reparaturzeiten ergeben.

Bemerkung. Der Beweis des Satzes 3 beruht im wesentlichen auf den folgenden Beziehungen:

$$\sup_{F\in\mathfrak{M}_e} \int_0^\infty \exp(-st)\,dF(t) = (sr+1)^{-1},$$

$$\inf_{F\in\mathfrak{M}_e} \int_0^\infty \exp(-st)\,dF(t) = \exp(-sr).$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{M}_e$ die Menge aller Verteilungsfunktionen F mit dem Erwartungswert r und $F \overset{(2)}{\leqslant} E_r$.

In [12] sind für einige andere Mengen von Verteilungsfunktionen (im wesentlichen charakterisiert durch gewisse vorgegebene Momente) derartige Suprema und Infima angegeben. Es sind darauf aufbauend (4.2) entsprechende Abschätzungen für das PALMsche Modell möglich.

([2]) Aus $\Theta_r \overset{(2)}{\leqslant} R \overset{(2)}{\leqslant} E_r$ folgt (in der Bezeichnungsweise von [10]) zunächst $E_r \overset{(3)}{\leqslant} R \overset{(3)}{\leqslant} \Theta_r$, woraus sich wegen der Monotonie und Konvexität von e^{-st} nach Satz 2 die Ungleichung (4.3) ergibt. Dabei bezeichnet $\overset{(3)}{\leqslant}$ die folgende Halbordnungsrelation für Verteilungsfunktionen:

$$F_1 \overset{(3)}{\leqslant} F_2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t} x\,dF_1(x) + t[1-F_1(t)] \leqslant \int_{-\infty}^{t} x\,dF_2(x) + t[1-F_2(t)], \quad -\infty < t < \infty.$$

Literaturverzeichnis

[1] K. Heinz, *Zu Palms Warteschlangenmodell für Mehrmaschinenbedienung*, Ablauf- und Planungsforschung 7 (1966), S. 205-216.

[2] W. Hoeffding, *The extrema of the expected value of a function of independent variables*, Ann. Math. Statist. 26 (1955), S. 268-275.

[3] J. F. C. Kingman, *Inequalities in the theory of queues*, J. Roy. Statist. Soc. B 32 (1970), S. 102-111.

[4] D. König, K. Matthes und K. Nawrotzki, *Verallgemeinerungen der Erlangschen und Engsetschen Formeln*, Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[5] A. W. Marshall and F. Proschan, *Mean life of series and parallel systems*, J. Appl. Prob. 7 (1970), S. 165-174.

[6] N. U. Prabhu, *Queues and inventories*, J. Wiley, New York 1965.

[7] B. A. Rogozin, *Einige Extremalprobleme in der Bedienungstheorie* (russ.), Teor. Verojatn. Primen. 11 (1966), S. 161-169.

[8] H.-J. Rossberg, *Optimale Eigenschaften einiger Wartesysteme bei regelmäßigem Eingang bzw. konstanten Bedienungszeiten*, Z. angew. Math. Mech. 48 (1968), S. 395-403.

[9] H. Stoyan, und D. Stoyan, *Monotonieeigenschaften der Kundenwartezeiten im Modell GI/G/1*, ibidem 49 (1969), S. 729-734.

[10] D. Stoyan, *Monotonieeigenschaften stochastischer Modelle*, ibidem 52 (1972), S. 23-30.

[11] L. Takacs, *Introduction to the theory of queues*, Oxford University Press, New York 1962.

[12] J. A. Vasil'ev und B. A. Kozlov, *Über den Einfluss des Verteilungsgesetzes der Erneuerungszeit auf die Zuverlässigkeit eines dublierten Systems* (russ.), in: Teorija nadezhnosti i massovoje obsluzhivanije, Moskau 1969, S. 37-45.

BRENNSTOFFINSTITUT FREIBERG
DDR-92 FREIBERG/SACHSEN

Eingegangen am 27. 9. 1971

D. STOYAN (Freiberg/Sa.)

PEWNE OSZACOWANIA W TEORII KOLEJEK I NIEZAWODNOŚCI

STRESZCZENIE

Przedmiotem pracy jest monotoniczna zależność charakterystyk systemów obsługi masowej i niezawodności względem pewnego częściowego uporządkowania dystrybuant. Pozwala to uzyskać oszacowania parametrów eksploatacyjnych w ustalonej klasie systemów. W szczególności dla modelu obsługi masowej $GI/G/1$ oraz w modelu Palma konserwacji maszyn otrzymano numerycznie efektywne oszacowania. Autor poprawia uzyskane przez Kingmana oszacowania od góry średniego czasu czekania na obsługę w systemie $GI/G/1$.