ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XV, 2 (1976)

W. RUNGE (Rostock)

EINE MODIFIKATION DES PALMSCHEN MODELLS FÜR GROSSE MEHRMASCHINENBEDIENUNGSSYSTEME

1. Einführung. Im folgenden wird eine Modifikation des bekannten Palmschen Modells für ein geschlossenes Wartesystem (Mehrmaschinenbedienungssystem) der Form $M/M/m/s$ für den Fall vorgenommen, daß die Anzahl der Objekte (Maschinen) recht groß ist. Diese Modifikation besteht darin, daß ein großes geschlossenes Wartesystem als ein offenes Wartesystem der Gestalt $M/M/s$ angesehen und durch das Standardmodell für offene Wartesysteme näherungsweise beschrieben wird.

2. Das Palmsche Modell und seine Handhabung. Das Palmsche Modell [3] eines Mehrmaschinenbedienungssystems ist vollständig durch folgende Einflußgrößen charakterisiert s — Anzahl der Wartungskräfte, m — Anzahl der Maschinen ($m \geqslant s$), λ' — Ausfallrate einer Maschine, μ — Bedienungsrate einer Maschine durch eine Wartungskraft.

Im einzelnen beschreibt das Palmsche Modell das Verhalten des geschlossenen Wartesystems in dessen stationärem Regime. Für die (stationären) Zustandswahrscheinlichkeiten p_k dafür, daß k Forderungen im Bedienungsknoten sind ($k = 0, 1, \ldots, m$), gilt [2]:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{m!}{Ak!(m-k)!}\left(\dfrac{\lambda'}{\mu}\right)^k, & 0 \leqslant k \leqslant s, \\ \dfrac{m!}{As!s^{k-s}(m-k)!}\left(\dfrac{\lambda'}{\mu}\right)^k, & s \leqslant k \leqslant m, \end{cases} \tag{1}$$

mit

$$A = \sum_{i=0}^{s} \frac{m!}{i!(m-i)!}\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^i + \sum_{i=s+1}^{m} \frac{m!}{s!s^{i-s}(m-i)!}\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^i. \tag{2}$$

Für die numerische Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten empfiehlt sich anstelle (1)-(2) die rekursive Beziehung

$$p_0 = \frac{1}{A},$$

$$p_{k+1} = \frac{m-k}{k+1}\,\frac{\lambda'}{\mu}\,p_k, \qquad 0 \leqslant k < s,$$

$$p_{k+1} = \frac{m-k}{s}\,\frac{\lambda'}{\mu}\,p_k, \qquad s \leqslant k < m.$$

Auf der Basis dieser Zustandswahrscheinlichkeiten lassen sich dann wichtige Kenngrößen zur Beurteilung eines geschlossenen Wartesystems unmittelbar bestimmen, wie beispielsweise die mittlere Anzahl L_0 der laufenden Maschinen

$$L_0 = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)\,p_k,$$

die mittlere Anzahl L_w der wartenden Maschinen

$$L_w = \sum_{k=s+1}^{m} (k-s)\,p_k$$

und die mittlere Anzahl L_b der im Bedienungsprozeß stehenden Maschinen (der beschäftigten Wartungskräfte)

$$L_b = \sum_{k=1}^{s} k p_k + s \sum_{k=s\neq 1}^{m} p_k.$$

Zwischen den letzten drei Mittelwerten besteht offenbar die Relation

(3) $$L_0 + L_w + L_b = m.$$

Es gibt noch einen weiteren wesentlichen Zusammenhang zwischen diesen Kenngrößen: Im Mittel werden im Verlaufe einer Zeiteinheit $\lambda' L_0$ Maschinen in den Bedienungsknoten gelangen und μL_b Maschinen den Bedienungsknoten verlassen. Da im Bedienungsknoten keine Maschinen verloren gehen können, müssen beide Durchschnittswerte übereinstimmen. Das hat aber die Beziehung

(4) $$L_b = \frac{\lambda'}{\mu} L_0$$

zur Folge.

Das oben dargestellte Palmsche Modell hat bereits umfangreiche praktische Anwendungen erfahren. Seine Applikationssphäre reicht von der Textilindustrie [3] bis zur Teilefertigung im Maschinenbau [1]. Daher sind Vorschläge für eine rationelle numerische Handhabung des Palmschen Modells angebracht. Zunächst lassen sich die in (1)-(2) angegebenen Zustandswahrscheinlichkeiten auf Terme der (individuellen und kumulativen) Poisson-Funktion zurückführen [4]. Eine umfangreiche Vertafelung der Poisson-Funktion stellt das Tabellenwerk [5] dar. In der Arbeit [2] ist der relative Ausnutzungsgrad

$$\eta_r = 1 - \frac{L_w}{m} \tag{5}$$

einer Maschine in Abhängigkeit von s, m und

$$\gamma = \frac{m\lambda'}{s(\lambda'+\mu)} \tag{6}$$

tabellarisch dargestellt. Wegen [2]

$$L_0 = \frac{m\mu}{\lambda'+\mu}\eta_r, \qquad L_w = m(1-\eta_r), \qquad L_b = \frac{m\lambda'}{\lambda'+\mu}\eta_r \tag{7}$$

können diese Tabellen zur unmittelbaren Berechnung der Mittelwerte L_0, L_w und L_b benutzt werden. Allerdings gestatten die Tabellen für η_r keine Ermittlung der Zustandswahrscheinlichkeiten p_k.

Die durch den wissenschaftlich-technischen Fortschritt bedingte Verlängerung der durchschnittlichen Laufzeit einer Maschine gegenüber der mittleren Zeit für die Wartung einer Maschine macht den allmählichen Übergang zu Mehrmaschinenbedienungssystemen mit einer großen Anzahl m von Maschinen unumgänglich. Die Handhabung des Palmschen Modells als Entscheidungshilfsmittel ist aber für solche großen Mehrmaschinenbedienungssysteme äußerst unbequem, da sie in diesem Falle mit einem sehr hohen numerischen Aufwand verbunden ist. Das zeigt bereits ein Blick auf den Ausdruck A in (2). Daher wird im folgenden eine Modifikation des Palmschen Modells für große Mehrmaschinenbedienungssysteme vorgeschlagen, die zu einer erheblichen Reduzierung des numerischen Aufwandes führt.

3. Eine Modifikation des Palmschen Modells. Ein großes Mehrmaschinenbedienungssystem ($m \gg 1$) wird nun als ein offenes Wartesystem der Form $M/M/s$ mit der Bedienungsrate μ und der Ankunftsrate

$$\lambda = L_0\lambda' \tag{8}$$

aufgefaßt und näherungsweise durch das bekannte Standardmodell für offene Wartesysteme beschrieben. Daß diese Vorgehensweise prinzipiell möglich ist, zeigt das folgende Zahlenbeispiel.

Ein geschlossenes Wartesystem ist durch die Parameter $s = 5$, $m = 100$, $\lambda' = 0{,}1$ und $\mu = 3$ gegeben. Über die in (6) definierte Größe $\gamma = 20/31 = 0{,}645$ ergibt sich der in (5) erklärte und in [2] tabellierte relative Ausnutzungsgrad η_r einer Maschine zu $\eta_r = 0{,}995$. Aus den Formeln (7) resultieren alsdann die Mittelwerte

$$L_0 = 96{,}3, \quad L_w = 0{,}5, \quad L_b = 3{,}2. \tag{9}$$

Nunmehr wird das gegebene Mehrmaschinenbedienungssystem als offenes Wartesystem mit den Parametern $s = 5$ und $\mu = 3$ betrachtet. Gemäß (8) lautet die zugehörige Ankunftsrate $\lambda = 9{,}63$ und damit die zugehörige Verkehrsdichte $\varrho = 3{,}21$. Aus einer Tabelle [2] für die mittlere Schlangenlänge L_w eines offenen Wartesystems — in Abhängigkeit von $s = 5$ und $\varrho = 3{,}21$ — folgt dann $L_w = 0{,}52$. Weiter beläuft sich die mittlere Anzahl L_b der besetzten Bedienungsstellen zu $L_b = \varrho = 3{,}21$. Schließlich ergibt sich die mittlere Anzahl L_0 der laufenden Maschinen aus (3) zu $L_0 = 96{,}17$. Damit ist eine gute Übereinstimmung mit den gemäß dem Palmschen Modell berechneten Werten in (9) erreicht worden.

Die Anwendung des Standardmodells für offene Wartesysteme zur näherungsweisen Charakterisierung eines großen geschlossenen Wartesystems macht die Kenntnis der Ankunftsrate λ unumgänglich. Ist die mittlere Anzahl L_0 der laufenden Maschinen explizit gegeben, dann liegt der Parameter λ vermöge (8) vor. In diesem Falle erübrigt sich aber die Beschreibung des geschlossenen Wartesystems, da die anderen relevanten Kenngrößen L_w und L_b infolge (3) und (4) kurzerhand ermittelt werden können. Damit ist nur der Fall von Interesse, daß bezüglich des geschlossenen Wartesystems nur die Einflußgrößen λ', μ und s sowie $m \gg 1$, aber keine der Kenngrößen L_0, L_w und L_w bekannt sind. Um dennoch das Standardmodell für offene Wartesysteme anwenden zu können, wird mit einem Näherungswert (Schätzwert) für die Größe L_0 operiert, der solange schrittweise verbessert wird, bis ein hinreichend genauer Wert für L_0 gefunden ist.

Aus (7) folgt wegen $\eta_r \leqslant 1$ die Abschätzung

$$L_0 \leqslant \frac{m\mu}{\lambda' + \mu}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wird nunmehr als (erster) Näherungswert $L_0^{(1)}$ für L_0 angesehen:

$$L_0^{(1)} = \frac{m\mu}{\lambda' + \mu}. \tag{10}$$

Damit diese Näherung in Verbindung mit (8) zu einem nichtkritischen offenen Wartesystem führt, muß die Bedingung $L_0^{(1)}\lambda' < s\mu$ oder

$$m < \frac{\lambda' + \mu}{\lambda'}\, s \tag{11}$$

erfüllt sein. Später wird diese Bedingung interpretiert. Ausgehend von der ersten Näherung $L_0^{(1)}$ für L_0 wird nun ein Iterationsverfahren zur hinreichend genauen Bestimmung der Kenngrößen L_0, L_b und L_w eines großen Mehrmaschinenbedienungssystems unterbreitet. Zunächst ergibt sich aus (8) und (10) die erste Näherung für den Verkehrswert ϱ zu

$$\varrho^{(1)} = \frac{m\lambda'}{\lambda' + \mu}.$$

Dann läßt sich aber bereits die mittlere Anzahl L_b der besetzten Wartungskräfte näherungsweise zu

$$L_b^{(1)} = \varrho^{(1)} \tag{12}$$

bestimmen. Aus der bekannten Formel

$$L(\varrho, s) = \frac{\varrho^{s+1}}{(s-1)!(s-\varrho)^2}\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\varrho^n}{n!} + \frac{\varrho^s}{(s-1)!(s-\varrho)}\right]^{-1} \tag{13}$$

für die mittlere Schlangenlänge eines offenen Wartesystems der Form $M/M/s$ [2] folgt schließlich der erste Näherungswert für die mittlere Anzahl L_w der wartenden Maschinen zu

$$L_w^{(1)} = L(\varrho^{(1)}, s).$$

Damit liegen für die relevanten Kenngrößen L_0, L_b und L_w erste Näherungswerte vor, die jetzt der Bedingung (3) angepaßt werden. Demzufolge wird vermöge

$$L_0^{(2)} = m - L_b^{(1)} - L_w^{(1)}$$

die zweite Näherung für L_0 ermittelt. Diese führt über (8) und analog zu (12) zu den zweiten Näherungswerten für ϱ und L_b:

$$L_b^{(2)} = \varrho^{(2)} = \frac{\lambda'}{\mu} L_0^{(2)}.$$

Abschließend ergibt sich aus (13) die zweite Näherung für L_w zu

$$L_w^{(2)} = L(\varrho^{(2)}, s).$$

Damit sind alle zweiten Näherungen perfekt, aus denen wiederum dritte Näherungen $L_0^{(3)}$, $L_b^{(3)}$ und $L_w^{(3)}$ berechnet werden können. Diese Prozedur wird entsprechend den Formeln

$$L_0^{(i)} = m - L_b^{(i-1)} - L_w^{(i-1)} \tag{14}$$

und

$$L_b^{(i)} = \varrho^{(i)} = \frac{\lambda'}{\mu} L_0^{(i)}$$

sowie

$$L_w^{(i)} = L(\varrho_\varrho^{(i)}, s)$$

solange fortgesetzt, bis die maximale absolute Differenz zweier aufeinanderfolgender Näherungswerte unterhalb einer vorgegebenen Genauigkeitsschranke ε liegt. Das bedeutet, daß das beschriebene Iterationsverfahren abgebrochen wird, sobald die Beziehung

$$\max\{|L_0^{(i+1)} - L_0^{(i)}|, |L_b^{(i+1)} - L_b^{(i)}|, |L_w^{(i+1)} - L_w^{(i)}|\} < \varepsilon$$

erfüllt ist. Die damit gefundenen Grenzwerte stellen die gesuchten Größen für die Parameter L_0, L_b und L_w des geschlossenen Wartesystems dar.

Die Konvergenz des beschriebenen Verfahrens kann noch verbessert werden, indem die i-te Näherung für L_0 als gewogenes Mittel der $(i-1)$-ten Näherung für L_0 und der ursprünglichen i-ten Näherung für L_0 gemäß (14) gebildet wird, d.h. indem die Beziehung (14) durch die Relation

$$L_0^{(i)} = L_0^{(i-1)} + a[m - (L_0^{(i-1)} + L_b^{(i-1)} + L_w^{(i-1)})]$$

mit $0 < a \leqslant 1$ ersetzt wird. Über eine zweckmäßige Festlegung des interpolierenden Parameters a sind noch keine Untersuchungen angestellt worden.

Das folgende Zahlenbeispiel demonstriert das vorgestellte Verfahren: Gegeben ist ein geschlossenes Wartesystem mit $m = 20$ Maschinen, $s = 2$ Wartungskräften, der Ausfallrate $\lambda' = 0{,}1$ (Ausfälle pro Zeiteinheit) und der Bedienungsrate $\mu = 2$ (Abfertigungen pro Zeiteinheit). Als Abbruchgrenze für das beschriebene Iterationsverfahren wird die Größe $\varepsilon = 0{,}005$ gewählt. Mit dem interpolierenden Parameter $a = 1{,}0$ ergibt sich

i	$L_0^{(i)}$	$L_b^{(i)}$	$L_w^{(i)}$
1	19,05	0,95	0,28
2	18,77	0,94	0,26
3	18,80	0,94	0,27

Wird der interpolierende Parameter zu $a = 0{,}9$ angenommen, dann lauten die Ergebnisse

i	$L_0^{(i)}$	$L_b^{(i)}$	$L_w^{(i)}$
1	19,05	0,95	0,28
2	18,80	0,94	0,27

Die exakten Werte für die Kenngrößen L_0, L_b und L_w gemäß dem Palmschen Modell betragen $L_0 = 18{,}77$, $L_b = 0{,}94$ und $L_w = 0{,}24$.

4. Abschliessende Bemerkungen. Zunächst wird die Bedingung (11) interpretiert, unter der die vorgeschlagene Modifikation des Palmschen

Modells nur möglich ist. Diese Bedingung ist wegen (6) offenbar gleichbedeutend mit der Forderung

$$\gamma < 1. \tag{15}$$

Ein Blick auf die in [2] angegebenen Tabellen zeigt, daß bei einem Mehrmaschinenbedienungssystem mit der Eigenschaft (15) ein relativ hoher Ausnutzungsgrad einer Maschine vorliegt. Im einzelnen ergeben sich aus diesen Tabellen folgende Mindestwerte für die Kenngröße η_r unter der Bedingung (11) oder (15):

Mindestwerte für η_r bei $\gamma < 1$

s \ m	10	15	25	50	75	100
1	0,84	0,85	0,88	0,91	0,92	0,93
2	0,86	0,87	0,89	0,91	0,93	0,93
3	0,87	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94
4	0,89	0,89	0,90	0,92	0,93	0,94
5	0,90	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94

Die Forderung (15) charakterisiert damit geschlossene Wartesysteme mit relativ geringem Warteanteil der Maschinen. Gerade solche Mehrmaschinenbedienungssysteme müssen in der Praxis gestaltet werden, wenn die Kosten für eine wartende Maschine um ein Vielfaches höher sind als die Kosten für eine freie Wartungskraft. Am Rande wird vermerkt, daß mehr als 60% der in den erwähnten Tabellen angegebenen Werte für η_r sich auf geschlossene Wartesysteme mit der Eigenschaft (15) beziehen.

Das oben skizzierte Näherungsverfahren zur numerischen Handhabung des Palmschen Modells für große Mehrmaschinenbedienungssysteme kann auch zur angenäherten Berechnung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten (1)-(2) ausgenutzt werden, indem mit der letzten Näherung $\tilde{\varrho}$ für die Verkehrsdichte ϱ und mit der Dimension s die bekannten Formeln des Standardmodells für offene Wartesysteme verwendet werden:

$$p_0 \approx \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\tilde{\varrho}^n}{n!} + \frac{\tilde{\varrho}^s}{(s-1)!(s-\tilde{\varrho})}\right]^{-1},$$

$$p_{k+1} \approx \frac{\tilde{\varrho}}{k+1} p_k, \qquad 0 \leqslant k < s,$$

$$p_{k+1} \approx \frac{\tilde{\varrho}}{s} p_k, \qquad s \leqslant k < m.$$

Das vorgestellte Verfahren geht damit über die erwähnten Tabellen für Mehrmaschinenbedienungssysteme hinaus.

Schließlich wird darauf verwiesen, daß noch ausführliche Untersuchungen zur Genauigkeit des beschriebenen Iterationsverfahrens und zur „optimalen" Wahl des interpolierenden Parameters a erforderlich sind. Über entsprechende Ergebnisse wird später berichtet.

Literaturverzeichnis

[1] H. Enderlein, *Modell und Rechenprogramm zur Gestaltung der Mehrstellenarbeit*, Fertigungstechnik und Betrieb 23 (1973), S. 199-203.

[2] H. Krampe, J. Kubát und W. Runge, *Bedienungsmodelle*, Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1974.

[3] C. Palm, *Der Einsatz der Arbeitskräfte bei Mehrmaschinenbedienung*, Ablauf- und Planungsforschung 6 (1965), S. 281-305.

[4] W. Runge, *Zur Theorie und Praxis stochastischer Modelle der Operationsforschung unter besonderer Beachtung analytischer Modelle für Wartesysteme*, Dissertation B, Universität Rostock 1971.

[5] *Tables of the individual and cumulative terms of Poisson distributions*, van Nostrand, Princeton 1962.

SEKTION SOZIAL. BETRIEBSWIRTSCHAFT
UNIVERSITÄT ROSTOCK
DDR-25 ROSTOCK

Eingegangen am 16. 12. 1974

W. RUNGE (Rostock)

PEWNA MODYFIKACJA MODELU PALMA DLA WIELKICH SYSTEMÓW OBSŁUGI MASOWEJ

STRESZCZENIE

W pracy podaje się praktyczny sposób wykorzystania stacjonarnego rozkładu liczby jednostek w systemie $M/M/s$ do modelu Palma, w którym s jest liczbą konserwatorów, a liczba maszyn jest duża. Przybliżenie polega na tym, że jako intensywność przyjmuje się $\lambda = \lambda' L_0$, gdzie λ' jest intensywnością psucia się maszyny, a L_0 jest średnią liczbą maszyn pracujących. Podany jest wzór iteracyjny, za pomocą którego można z danym przybliżeniem obliczyć wartość L_0 bez korzystania ze znanego stacjonarnego rozkładu liczby maszyn pracujących.
