

Teresa DESPERAT i A. KIEŁBASIŃSKI (Warszawa)

## ALGORYTM NAJLEPSZEJ STRATEGII ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LINIOWYCH O MACIERZY SYMETRYCZNEJ DODATNIO OKREŚLONEJ SPECJALNEGO TYPU

**Wstęp.** Praca niniejsza opisuje konstrukcję algorytmu najlepszej strategii (p. [6]) dla rozwiązywania układu algebraicznych równań liniowych o symetrycznej dodatnio określonej macierzy z widmem rozłożonym w dwu równej długości rozłącznych odcinkach. Algorytm ten jest prostym uogólnieniem algorytmu von Neumanna [5] i ma wiele jego ważnych własności, opisanych w [3]. Z matematycznego punktu widzenia rozważane zadanie sprowadza się do badania jednostajnej aproksymacji zera w zbiorze  $\{\langle -\varrho, -\varepsilon \rangle \cup \langle \varepsilon, \varrho \rangle\}$  (gdzie  $0 < \varepsilon < \varrho < 1$ ) skonstruowanym ciągiem wielomianów  $\{Q_k(t)\}$ , spełniających warunek  $Q_k(1) = 1$ . Pewne własności ciągu  $\{Q_k(t)\}$  znane są jedynie z eksperymentów numerycznych.

**1. Wprowadzenie.** Wśród iteracyjnych i półiteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych szczególną pozycję zajmuje metoda von Neumanna, zwana również metodą Czebyszewa ([5], [3]). Metodę tę stosujemy do rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych wysokiego stopnia o postaci

$$(1) \quad \bar{x} = B\bar{x} + \bar{g},$$

gdzie  $\bar{x}$  jest szukany rozwiązaniem,  $\bar{g}$  — znanym wektorem przestrzeni  $C^{(n)}$ ,  $B$  — macierzą kwadratową ( $n \times n$ ), symetryczną, o normie spektralnej mniejszej od 1. Do postaci (1) możemy sprowadzić wszystkie układy równań o symetrycznej, dodatnio określonej macierzy współczynników. Metoda von Neumanna należy do klasy metod półiteracyjnych, w których konstruuje się ciąg przybliżeń  $\{\bar{x}_k\}$  rozwiązania  $\bar{x}^*$  układu (1), taki że

$$(2) \quad \bar{x}^* - \bar{x}_k = P_k(B)(\bar{x}^* - \bar{x}_0),$$

gdzie  $P_k(t)$  jest wielomianem stopnia  $k$ , spełniającym dodatkowo warunek

$$(3) \quad P_k(1) = 1.$$

Klasę wielomianów stopnia  $\leq k$  spełniających warunek (3) oznaczamy przez  $W_k(1, 1)$ .

Klasa metod spełniających warunki (2) i (3) nazywana jest niekiedy *klasą algorytmów uniwersalnych* (por. [2], str. 553, [6]).

Ciąg  $\{\bar{x}_k\}$  jest szybko zbieżny do  $\bar{x}^*$ , jeśli odpowiedni ciąg wielomianów  $\{P_k(t)\}$  klasy  $W_k(1, 1)$  dobrze przybliży zero dla  $t \in \text{spectr}(B)$ . Istotnie, z (2) otrzymujemy

$$(4) \quad \|\bar{x}^* - \bar{x}_k\|_2 \leq \|P_k(B)\|_2 \|\bar{x}^* - \bar{x}_0\|_2$$

oraz

$$\|P_k(B)\|_2 = \max_{t \in \text{spectr}(B)} |P_k(t)|$$

(Przez  $\|\cdot\|_2$  rozumiemy tu tzw. *normę spektralną macierzy* lub *euklidesową normę wektorów*.) Na ogół nie znamy dokładnie widma macierzy  $B$ , ale często znamy liczbę  $\varrho \in (0, 1)$  taką, że  $\text{spectr}(B) \subset \langle -\varrho, \varrho \rangle$  (za  $\varrho$  można np. przyjąć jakąkolwiek normę macierzy  $B$ , zgodną z normą wektorów). Ciągowi  $\{\bar{x}_k\}$  konstruowanemu w metodzie von Neumanna odpowiada ciąg wielomianów  $\{\tau_k(t)\}$

$$(5) \quad \tau_k(t) = T_k(t/\varrho)/T_k(1/\varrho),$$

gdzie  $T_k(u)$  oznacza  $n$ -ty wielomian Czebyszewa pierwszego rodzaju

$$(6) \quad T_k(u) = \begin{cases} \cos(k \arccos u), & |u| \leq 1, \\ 1/2 [(u + \sqrt{u^2 - 1})^k + (u - \sqrt{u^2 - 1})^{-k}], & |u| > 1. \end{cases}$$

Dla takiego ciągu otrzymujemy

$$(7) \quad \|\bar{x}^* - \bar{x}_k\|_2 \leq \|\tau_k(B)\|_2 \|\bar{x}^* - \bar{x}_0\|_2 \leq \frac{1}{T_k\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_2 \leq$$

$$\leq 2 \left( \frac{\varrho}{1 + \sqrt{1 - \varrho^2}} \right)^k \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_2.$$

Można łatwo sprawdzić (p. [1], str. 62, [6]), że wielomian  $\tau_k(t)$  minimalizuje równocześnie dwa funkcjonały w (klasie  $W_k(1, 1)$ ):

$$(8) \quad C^*(\varphi) = \sup_{-\varrho < t < \varrho} |\varphi(t)|,$$

$$I^*(\varphi) = \int_{-\varrho}^{\varrho} \varphi^2(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\varrho}\right)^2} (1-t)}.$$

Ze względu na (4) fakt minimalizacji funkcjonału  $C^*$  wydaje się bardziej istotny. Natomiast minimalizacja średniokwadratowego funkcjonału  $I^*$  wiąże się z faktem (p.[6]), że wielomiany  $\{\tau_k(t)\}$  tworzą układ ortogonalny w sensie iloczynu skalarnego

$$(9) \quad (f, g)_1 = \int_{-e}^e \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{e}\right)^2}} dt.$$

Stąd wynika zależność rekurencyjna postaci

$$(10) \quad \tau_{k+1}(t) = a_k t \tau_k(t) + (1 - a_k) \tau_{k-1}(t).$$

Wychodząc z tej zależności, von Neumann otrzymał algorytm, pozwalający na rekurencyjne wyznaczanie ciągu  $\{\bar{x}_k\}$

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= B\bar{x}_0 + \bar{g}, \\ \bar{x}_{k+1} &= a_k(B\bar{x}_k + \bar{g} - \bar{x}_{k-1}) + \bar{x}_{k-1}, \\ a_0 &= 2, \\ a_{k+1} &= \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{4} a_k}. \end{aligned}$$

Algorytm ten ma wiele dodatnich cech praktycznych: dobrą stabilność numeryczną, łatwość programowania, małe obciążenie pamięci maszyny, możliwość wykorzystania szczególnej budowy macierzy  $B$  (np. macierze cykliczne, p. [3]). Zgodnie z terminologią wprowadzoną w [5] będziemy mówili, że algorytm (11) jest algorytmem najlepszej strategii ze względu na minimalizację funkcjonału  $I^*$ . Strategia ta odpowiada posiadanej przez nas informacji o rozkładzie widma macierzy  $B$  w odcinku  $\langle -e, e \rangle$ .

Celem niniejszej pracy jest konstrukcja algorytmu mającego wyżej wymienione zalety praktyczne, a przeznaczonego do rozwiązywania układów równań postaci (1) z macierzą  $B$  o widmie rozłożonym w zbiorze  $G = \{x: x \in \langle -e, -\varepsilon \rangle \cup \langle \varepsilon, e \rangle\}$ , gdzie  $0 < \varepsilon < e < 1$ .

**2. Algorytm najlepszej strategii dla zbioru  $G$ .** Oznaczmy przez  $P_k(t)$  wielomian realizujący w  $W_k(1, 1)$  minimum funkcjonału

$$(12) \quad C(\varphi) = \sup_{t \in G} |\varphi(t)|.$$

Wielomiany takie zostały zdefiniowane w [1], str. 320.

Zauważmy, że tylko wielomiany  $P_k(t)$  stopnia parzystego dają się

łatwo wyrazić, a mianowicie

$$(13) \quad P_{2k}(t) = T_k\left(\frac{t^2 - \sigma}{\tau}\right) \Big/ T_k\left(\frac{\nu}{\tau}\right),$$

gdzie

$$\sigma = \frac{\varrho^2 + \varepsilon^2}{2}, \quad \tau = \frac{\varrho^2 - \varepsilon^2}{2}, \quad \nu = 1 - \sigma.$$

Wielomiany  $P_{2k+1}(t)$  wyrażają się w sposób dość skomplikowany przez funkcje eliptyczne.

Nie potrafimy skonstruować prostej zależności postaci (10), wiążącej trzy kolejne wielomiany  $P_k(t)$ . Rezygnujemy więc z konstrukcji ciągu  $\{P_k(t)\}$ . Z zależności rekurencyjnej dla wielomianów Czebyszewa  $T_{k+1}(u) = 2uT_k(u) - T_{k-1}(u)$  i z (13) wynika zależność wiążąca trzy kolejne wielomiany  $P_{2k-2}, P_{2k}, P_{2k+2}$

$$(14) \quad P_{2k+2}(t) \cdot T_{k+1}(\nu/\tau) = 2 \frac{t^2 - \sigma}{\tau} P_{2k}(t) T_k(\nu/\tau) - P_{2k-2}(t) T_{k-1}(\nu/\tau).$$

Przepisując (14) w postaci

$$P_{2k+2}(t) = 2 \frac{t^2 - \sigma}{\tau} \frac{T_k(\nu/\tau)}{T_{k+1}(\nu/\tau)} P_{2k}(t) - \frac{T_{k-1}(\nu/\tau)}{T_{k+1}(\nu/\tau)} P_{2k-2}(t)$$

i oznaczając przez  $\omega_k$  współczynnik przy  $t^2 P_{2k}(t)$ ,

$$\omega_k = \frac{2T_k(\nu/\tau)}{\tau T_{k+1}(\nu/\tau)},$$

otrzymujemy dla  $t = 1$  równość

$$1 = (1 - \sigma) \omega_k - \frac{T_{k-1}(\nu/\tau)}{T_{k+1}(\nu/\tau)}.$$

Zatem

$$\frac{T_{k-1}(\nu/\tau)}{T_{k+1}(\nu/\tau)} = (1 - \sigma) \omega_k - 1$$

oraz

$$\omega_k = \frac{1}{(1 - \sigma) - \frac{\tau^2}{4} \omega_{k-1}}.$$

Wprowadzając oznaczenia  $\tau^2/4 = \mu$ ,  $1 - \sigma = \nu$ , otrzymujemy

$$\omega_k = \frac{1}{\nu - \mu \omega_{k-1}}.$$

Możemy więc zapisać

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= 1, & P_2(t) &= (t^2 - \sigma)/(1 - \sigma), \\
 P_{2k+2}(t) &= (t^2 - \sigma)\omega_k P_{2k}(t) + (1 - \nu\omega_k)P_{2k-2}(t), \\
 (15) \quad \omega_0 &= \frac{2}{\tau} \frac{T_0(\nu/\tau)}{T_1(\nu/\tau)} = \frac{2}{1 - \sigma} = \frac{2}{\nu}, \\
 \omega_k &= \frac{1}{\nu - \mu\omega_{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Możliwe jest bezpośrednio wykorzystanie zależności (15) dla konstrukcji postępowania półiteracyjnego dającego ciąg przybliżeń, któremu odpowiadają kolejne wielomiany  $\{P_{2k}(t)\}$ . Jest to jednak niezbyt wygodne, gdyż wymaga albo generowania w maszynie elementów macierzy  $B^2$ , albo zwiększenia ilości miejsc roboczych o jeden wektor ( $n$  zmiennych). Aby usunąć tę niedogodność, spróbowaliśmy zastąpić zależność rekurencyjną (15) zależnością postaci (10). Zauważyliśmy w tym celu, że z ortogonalności wielomianów Czebyszewa w sensie iloczynu skalarnego

$$(f, g)_2 = \int_{-1}^1 f(u)g(u) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

wynika, że wielomiany  $P_{2k}(t)$  stanowią układ ortogonalny w sensie iloczynu skalarnego

$$(16) \quad (f, g)_3 = \int_G f(t)g(t) \frac{|t|}{\sqrt{1 - \left(\frac{t^2 - \sigma}{\tau}\right)^2}} dt.$$

Definiujemy więc ciąg  $\{Q_k(t)\}$  jako układ wielomianów ortogonalnych w sensie iloczynu skalarnego (16), unormowanych warunkiem  $Q_k(1) = 1$ . Widzimy oczywiście, że

$$Q_{2k}(t) = P_{2k}(t).$$

Ze względu na symetrię względem zera funkcji wagowej

$$\frac{|t|}{\sqrt{1 - \left(\frac{t^2 - \sigma}{\tau}\right)^2}}$$

i zbioru  $G$  wielomiany  $Q_{2k+1}(t)$  są funkcjami nieparzystymi, wielomiany  $Q_{2k}(t)$  funkcjami parzystymi, a zależność rekurencyjna między trzema kolejnymi wielomianami ma postać

$$(17) \quad Q_{k+1}(t) = q_k t Q_k(t) + (1 - q_k) Q_{k-1}(t).$$

Dla wyznaczenia ciągu współczynników  $\{q_k\}$  znajdujemy jego związki z ciągiem  $\{\omega_k\}$ . Współczynniki  $q_k$  muszą być wyznaczone z warunku, by wielomian parzysty otrzymany z (15) był identyczny z wielomianem  $Q_{2k+2}(t)$  otrzymanym z (17). Zapiszemy więc

$$Q_{2k}(t) = tq_{2k-1}Q_{2k-1}(t) + (1 - q_{2k-1})Q_{2k-2}(t),$$

stad

$$tQ_{2k-1}(t) = [Q_{2k}(t) - (1 - q_{2k-1})Q_{2k-2}(t)]/q_{2k-1}.$$

A więc

$$Q_{2k+2}(t) = [t^2q_{2k+1}q_{2k} + 1 - q_{2k+1} + (1 - q_{2k})q_{2k+1}/q_{2k-1}]Q_{2k}(t) - [(1 - q_{2k})(1 - q_{2k-1})q_{2k+1}/q_{2k-1}]Q_{2k-2}(t).$$

Muszą więc zachodzić zależności

$$(18) \quad \begin{aligned} \omega_k &= q_{2k}q_{2k+1}, \\ \sigma\omega_k &= q_{2k+1} - 1 + (q_{2k} - 1)q_{2k+1}/q_{2k-1}, \\ 1 - \nu\omega_k &= (q_{2k} - 1)q_{2k+1}(1 - q_{2k-1})/q_{2k-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ warunek trzeci jest konsekwencją dwu pierwszych, wystarczy dobierać ciąg  $\{q_k\}$  tak, aby dla każdego  $k$  były spełnione dwa pierwsze warunki (18). A więc

$$(19) \quad \begin{aligned} q_0 &= 2, \\ q_{2k} &= \frac{\omega_k(q_{2k-1} - 1)}{q_{2k-1}(\sigma\omega_k + 1) - \omega_k}, \\ q_{2k+1} &= \frac{\omega_k}{q_{2k}}, \end{aligned}$$

gdzie  $\omega_k$  określone są równościami (15).

Ortogonalność ciągu  $\{Q_k(t)\}$  w sensie iloczynu skalarnego (16) wiąże się z faktem, że wielomian  $Q_k(t)$  jest identyczny z wielomianem  $K_k(t, 1)/K_k(1, 1)$ , gdzie  $K_k(t, u)$  jest wielomianem jądrowym ([7], str. 39) w sensie iloczynu skalarnego

$$(f, g)_4 = \int_G f(t)g(t) \frac{|t| dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t^2 - \sigma}{\tau}\right)^2} (1 - t)}.$$

A więc  $Q_k(t)$  minimalizuje w klasie  $W_k(1, 1)$  funkcjonal

$$I(\varphi) = \int_G \varphi^2(t) \frac{|t| dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t^2 - \sigma}{\tau}\right)^2} (1 - t)}.$$

Postępowanie póliteracyjne, odpowiadające konstrukcji ciągu  $\{Q_k(t)\}$ , będzie zatem postępowaniem najlepszej strategii ze względu na minimalizację tego funkcjonau (p. [6]). Zapisujemy odpowiedni algorytm konstrukcji ciągu przybliżeń rozwiązania układu (1)

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= B\bar{x}_0 + \bar{g}, \\ \bar{x}_{k+1} &= q_k [B\bar{x}_k + \bar{g} - \bar{x}_{k-1}] + \bar{x}_{k-1}, \end{aligned}$$

gdzie  $q_k$  określone są równościami (19).

**3. Własności algorytmu najlepszej strategii.** Zauważmy przede wszystkim, że prawdziwa jest nierówność

$$(21) \quad C(Q_{2k}) \leq 2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} - \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2} + \sqrt{1-\rho^2}} \right)^k,$$

gdzie  $C(\varphi) = \overline{\text{detr}} \sup_{t \in G} |\varphi(t)|$ . Istotnie z (13) i równości  $P_{2k} = Q_{2k}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} C(Q_{2k}) &\leq \frac{1}{T_k(\nu/\tau)} = \frac{2}{[\nu/\tau + \sqrt{(\nu/\tau)^2 - 1}]^k + [\nu/\tau - \sqrt{(\nu/\tau)^2 - 1}]^{-k}} \leq \\ &\leq \frac{2\tau^k}{[\nu + \sqrt{\nu^2 - \tau^2}]^k} = \frac{2(\rho^2 - \varepsilon^2)^k}{[2 - \rho^2 - \varepsilon^2 + 2\sqrt{(1-\rho^2)(1-\varepsilon^2)}]^k} = \\ &= 2 \frac{[(1-\varepsilon^2) - (1-\rho^2)]^k}{\{[\sqrt{1-\varepsilon^2} + \sqrt{1-\rho^2}]^2\}^k}. \end{aligned}$$

Stąd wynika (21).

Załóżmy, że stosując metodę (20), chcemy zredukować błąd przybliżenia początkowego  $e^{2s}/2$  razy ( $s > 0$ ). Stąd otrzymujemy (por. [4]) przybliżoną równość dla ilości potrzebnych iteracji  $k$

$$2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} - \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2} + \sqrt{1-\rho^2}} \right)^k \cong \frac{2}{e^{2s}},$$

czyli

$$k \cong -2s / \ln \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} - \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2} + \sqrt{1-\rho^2}} \right).$$

Przy założeniu, że  $\sqrt{1-\rho^2}/\sqrt{1-\varepsilon^2} \ll 1$ , możemy zapisać równość

$$k \cong s\sqrt{1-\varepsilon^2}/\sqrt{1-\rho^2}.$$

Dla ciągu  $\{\tau_k(t)\}$ , konstruowanego w metodzie von Neumanna, mamy odpowiednio oszacowanie

$$\begin{aligned} C(\tau_{2k}) &\leq \frac{1}{T_{2k}(1/\varrho)} < \frac{2\varrho^{2k}}{[1+\sqrt{1-\varrho^2}]^{2k}} = \\ &= \frac{2[1-(1-\varrho^2)]^k}{[1+\sqrt{1-\varrho^2}]^{2k}} = 2 \left( \frac{1-\sqrt{1-\varrho^2}}{1+\sqrt{1-\varrho^2}} \right)^k. \end{aligned}$$

Zatem odpowiednia ilość iteracji wynosiłaby  $s/\sqrt{1-\varrho^2}$ . Stosowanie algorytmu (20) ma więc sens tylko wtedy, gdy mnożnik  $\sqrt{1-\varepsilon^2}$  jest istotnie mniejszy od jedności. Sądzymy, że ze względów praktycznych warto stosować algorytm (20) dopiero wtedy, gdy  $\varepsilon > 0,5$ . Załączamy tabelkę

$\varepsilon$	$\varrho$	Pracochłonność algorytmu (20)
		Pracochłonność algorytmu (11)
0,50	0,79	0,8084
0,50	0,91	0,8462
0,50	0,97	0,8600
0,55	0,90	0,8068
0,55	0,99	0,8327
0,60	0,98	0,7938
0,70	0,99	0,7095
0,75	0,98	0,6496
0,80	0,97	0,5771
0,85	0,99	0,5174

Powstaje pytanie, jak zachowuje się ciąg  $\{C(Q_{2k+1})\}$  wyrażający redukcję błędu nieparzystych przybliżeń  $\{\bar{x}_{2k+1}\}$  rozwiązania  $\bar{x}^*$ . Pokażemy, że zachodzi nierówność

$$(22) \quad C(Q_{2k+1}) \leq \frac{1}{\varepsilon} C(Q_{2k}).$$

A więc w przypadku  $\varepsilon \geq 0,5$  zbieżność ciągu  $\{\bar{x}_{2k+1}\}$  do rozwiązania  $\bar{x}^*$  nie może być wiele gorsza niż zbieżność ciągu  $\{\bar{x}_{2k}\}$ .

Sądząc z przeprowadzonych eksperymentów przypuszczamy, że dla wszystkich  $\varrho$ ,  $\varepsilon$  i  $k$  zachodzi nierówność

$$C(Q_{2k+2}) < C(Q_{2k+1}) < C(Q_{2k}).$$



Pokażemy ponadto, że ciągi  $\{q_{2k}\}$  i  $\{q_{2k+1}\}$  są odpowiednio zbieżne do granic

$$(23) \quad q^* = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varepsilon^2)(1 - \rho^2)} + \varepsilon\rho}, \quad \tilde{q} = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varepsilon^2)(1 - \rho^2)} - \varepsilon\rho}.$$

Granice te są współczynnikami metody optymalnej dwuparametrowej nadrelaksacji (typu metody Younga) dla macierzy cyklicznej  $B$  (p. [4]). Zachodzi więc analogiczne do twierdzenia Goluba i Vargi (p. [3]):

**TWIERDZENIE.** *Algorytm (20) zbiega asymptotycznie do algorytmu metody dwuparametrowej optymalnej nadrelaksacji.*

**4. Własności ciągu  $\{q_k\}$  i  $\{Q_{2k+1}(t)\}$ .** Zauważmy najpierw, że dla  $k > 1$  wielomian  $Q_k(t)$  ma przy najwyższej potędze współczynnik równy  $\prod_{i=1}^{k-1} q_i$ . Ponieważ wszystkie pierwiastki wielomianu  $Q_k(t)$  muszą leżeć w przedziale  $\langle -\rho, \rho \rangle$  (gdyż jest on  $k$ -tym wielomianem ortogonalnym w tym przedziale w sensie iloczynu skalarnego (16)), a wielomian przyjmuje wartość 1 w punkcie  $t = 1$ , więc współczynnik przy najwyższej potędze musi być dodatni. Stąd i z określenia  $q_0 = 2$  wynika, że wszystkie  $q_k$  są dodatnie. Z ortogonalności wielomianów  $Q_k(t)$  oraz z (17) wynika, że

$$q_k(tQ_k, Q_{k-1})_3 = (q_k - 1)(Q_{k-1}, Q_{k-1})_3.$$

A więc

$$\begin{aligned} \frac{q_k - 1}{q_k} &= \frac{(tQ_k, Q_{k-1})_3}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})_3} = \frac{(Q_k, tQ_{k-1})_3}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})_3} = \\ &= \frac{\left( Q_k, \frac{1}{q_{k-1}} Q_k - \frac{1}{q_{k-1}} (1 - q_{k-1}) Q_{k-2} \right)_3}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})_3} = \frac{1}{q_{k-1}} \frac{(Q_k, Q_k)_3}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})_3}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że  $q_k > 1$  dla każdego  $k$ .

Ponieważ z (19) mamy  $q_{2k}q_{2k+1} = \omega_k$ , więc

$$(24) \quad 1 < q_{2k} < \omega_k, \quad 1 < q_{2k+1} < \omega_k.$$

Łatwo można sprawdzić, że ciąg  $\{\omega_k\}$  jest malejący, zbieżny do granicy

$$\omega = \frac{4}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \sqrt{1 - \rho^2})^2}.$$

A więc

$$\omega = \frac{4}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \sqrt{1 - \rho^2})^2} \leq \omega_k \leq \omega_0 = \frac{4}{(1 - \varepsilon^2) + (1 - \rho^2)}$$

Możemy obecnie udowodnić zależność (22). Z równości

$$Q_{2k+2}(t) = tq_{2k+1}Q_{2k+1}(t) + (1 - q_{2k+1})Q_{2k}(t)$$

wyznaczamy  $Q_{2k+1}(t)$ :

$$Q_{2k+1}(t) = \frac{1}{t} \left[ \frac{1}{q_{2k+1}} Q_{2k+2}(t) + \left(1 - \frac{1}{q_{2k+1}}\right) Q_{2k}(t) \right].$$

Korzystając z (24) oraz z  $C(Q_{2k+2}) < C(Q_{2k})$ , otrzymujemy

$$C(Q_{2k+1}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{q_{2k+1}} C(Q_{2k+2}) + \left(1 - \frac{1}{q_{2k+1}}\right) C(Q_{2k}) \right] < \frac{1}{\varepsilon} C(Q_{2k}).$$

Zbieżność ciągów  $\{q_{2k}\}$  i  $\{q_{2k+1}\}$  możemy udowodnić dla dowolnych  $\varepsilon$  i  $\varrho$ . Dowód ten jest jednak dość skomplikowany. Upraszcza się znacznie w przypadku, gdy

$$(25) \quad \varepsilon^2 + \varrho^2 > 1.$$

Ponieważ w zadaniach praktycznych na ogół  $\varrho$  jest bliskie 1, a badaną metodę zalecamy stosować jedynie dla  $\varepsilon > 0,5$  <sup>(1)</sup>, zatem podajemy tu dowód przy założeniu (25) <sup>(2)</sup>.

Rozważmy ciąg  $\{r_k\}$ , gdzie  $r_k = q_{2k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Z równości (19) otrzymujemy

$$(26) \quad r_{k+1} = \frac{\omega_k - r_k}{\omega_k - r_k - \mu\omega_k^2}, \quad r_0 = 2.$$

Można udowodnić (np. indukcyjnie, wykorzystując łatwe do sprawdzenia nierówności  $\mu\omega_k^2 < 1$ ,  $\mu\omega_k < \frac{1}{2}$ ), że dla każdego  $k$  zachodzi nierówność

$$(27) \quad r_k < \frac{1}{2} \omega_k.$$

Pokażemy, że ciąg  $\{r_k\}$  jest malejący. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Nierówność  $r_1 < r_0 = 2$  otrzymujemy po prostych przekształceniach. Załóżmy, że  $r_k < r_{k-1}$ . Pokażemy, że  $r_{k+1} < r_k$ . Rozważmy funkcję dwu zmiennych

$$\psi(r, \omega) = \frac{\omega - r}{\omega - r - \mu\omega^2}.$$

<sup>(1)</sup> Autorzy nie znają żadnej klasy ważnych w praktyce macierzy, które miałyby aż tak dużą „lukę” w widmie.

<sup>(2)</sup> Dowód ten zakomunikował nam T. W. Desperat.

Ze związków

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu \omega^2}{(\omega - r - \mu \omega^2)^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{\mu \omega (\omega - 2r)}{(\omega - r - \mu \omega^2)^2}$$

widać, że funkcja  $\psi(r, \omega)$ , traktowana jako funkcja jednej zmiennej ( $r$  lub  $\omega$ ), jest rosnąca w obszarze  $2r < \omega$ . Z (27) wynika, że  $r_k, \omega_k$  leżą w tym obszarze. A zatem

$$\begin{aligned} r_k &= \psi(r_{k-1}, \omega_{k-1}) = \frac{\omega_{k-1} - r_{k-1}}{\omega_{k-1} - r_{k-1} - \mu \omega_{k-1}^2} > \psi(r_k, \omega_{k-1}) = \\ &= \frac{\omega_{k-1} - r_k}{\omega_{k-1} - r_k - \mu \omega_{k-1}^2} > \psi(r_k, \omega_k) = \frac{\omega_k - r_k}{\omega_k - r_k - \mu \omega_k^2} = r_{k+1}, \end{aligned}$$

czyli  $r_k > r_{k+1}$ . Z powyższego i z (24) wynika, że ciąg  $\{r_k\}$  jest zbieżny. Ciąg  $\{s_k\}$ , gdzie  $s_k = q_{2k+1}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) jest także zbieżny, gdyż  $s_k = \omega_k / r_k$ .

Wyznaczmy granice ciągów  $\{r_k\}$  i  $\{s_k\}$ . Niech  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = q^*$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \tilde{q}$ .

Z (26) wynika, że  $q^*$  musi być pierwiastkiem równania kwadratowego

$$z^2 - (2 + \sigma \omega)z + \omega = 0.$$

Równanie to ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$z_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varepsilon^2)(1 - \varrho^2) + \varepsilon \varrho}}, \quad z_2 = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varepsilon^2)(1 - \varrho^2) - \varepsilon \varrho}}.$$

Ponieważ  $r_0 = 2 < z_2$ , więc  $q^* = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = z_1$ . Stąd i z (19) łatwo zauważymy, że  $\tilde{q} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = z_2$ .

Przeprowadziliśmy badania eksperymentalne wielomianów  $Q_{2k+1}(t)$ , tablicując numerycznie w przedziale  $\langle \varepsilon, \varrho \rangle$  ich ekstrema (wraz z punktami brzegowymi). Obliczenia takie wykonano dla  $\varepsilon$  i  $\varrho$  mających postać  $\varepsilon = 0, 1 + i \times 0, 2$ ,  $\varrho = 0, 2 + j \times 0, 2$  dla wszystkich  $i, j$  całkowitych takich, że  $0 < \varepsilon < \varrho < 1$  oraz  $k \leq 9$ . Na podstawie tych eksperymentów można wysunąć następujące hipotezy:

1. Zachodzą nierówności

$$C(Q_{2k}) > C(Q_{2k+1}) > C(Q_{2k+2}).$$

2. Ekstrema wielomianu  $Q_{2k+1}(t)$  wyrównują się przy rosnącym  $k$ . Gdy oznaczymy punkty ekstremalne wielomianu  $Q_{2k+1}(t)$  (wraz z punktami brzegowymi zbioru  $G$ ) przez  $t_{2k+1,0}, t_{2k+1,1}, \dots, t_{2k+1,2k+2}$ , to wielkość

$$\frac{\max_{0 \leq p \leq 2k+2} |Q_{2k+1}(t_{2k+1,p})|}{\min_{0 \leq p \leq 2k+2} |Q_{2k+1}(t_{2k+1,p})|}$$

wyduje się zbiegać do jedności. Własność

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|Q_{2k+1}(\varepsilon)|}{|Q_{2k+1}(\varrho)|} = 1$$

można zresztą łatwo udowodnić.

Wszystkie obliczenia zostały wykonane na maszynie GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

#### Prace cytowane

- [1] N. I. Achiezer, *Lekcje po teorii aproksymacji*, Moskwa 1965.
- [2] D. K. Faddeev, V. N. Faddeeva, *Vyčislitelnye metody linejnoj algebry*, Moskwa 1960.
- [3] G. Golub, R. Varga, *Chebyshev semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods*, Part I i II, *Numerische Math.* 3 (1961), str. 147-168.
- [4] A. Kielbasiński, *O liniowym postępowaniu iteracyjnym*, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Warszawski (1961).
- [5] J. von Neumann i inni, *A study of a numerical solution to a two-dimensional hydrodynamical problem*, *MTAC* (1959), XIII, Appendix II, p. 166-184.
- [6] E. Stiefel, *Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications*, *NBS Appl. Math. Series 49* (1958), p. 1-22.
- [7] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, New York 1939.

*Praca wpłynęła 2. 12. 1966*

---

Тереса ДЕСПЕРАТ и А. КЕЛБАСИНСЬКИ (Варшава)

#### АЛГОРИТМ НАЙЛУЧШЕЙ СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКОЙ, ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

#### РЕЗЮМЕ

В работе дан алгоритм наилучшей стратегии решения системы линейных уравнений  $x = Bx + \bar{g}$  с симметрической матрицей  $B$  такой что для некоторых  $\varepsilon$  и  $\varrho$ ,  $0 < \varepsilon < \varrho < 1$  выполняется условие

$$\text{spectr}(B) \subset \langle -\varrho, -\varepsilon \rangle \cup \langle \varepsilon, \varrho \rangle.$$

Предлагаемый алгоритм во многих практически важных отношениях близок алгоритму фон Неймана (метод Чебышева).

---

**Teresa DESPERAT and A. KIELBASIŃSKI (Warszawa)**

**BEST STRATEGY ALGORITHM FOR SOLVING LINEAR EQUATIONS WITH  
A SYMMETRIC, POSITIVE DEFINITE MATRIX OF SPECIAL TYPE**

SUMMARY

An algorithm of best strategy is constructed for solving a set of simultaneous linear equations  $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{g}$  with a symmetric matrix  $B$  such that for some  $\varepsilon$  and  $\varrho$ ,  $0 < \varepsilon < \varrho < 1$ , holds

$$\text{spectr}(B) \subset \langle -\varrho, -\varepsilon \rangle \cup \langle \varepsilon, \varrho \rangle.$$

The proposed algorithm resembles the von Neumann algorithm (Chebyshev's method) in many important practical features.

---