ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVI, 4 (1980)

ALGORITHM 68

H. MALINOWSKI and R. SMARZEWSKI (Lublin)

DETERMINATION OF THE SOLUTION OF ABEL INTEGRAL EQUATIONS, III

1. Procedure declaration. The procedure *inteqAbel3* determines the approximation $f_\Delta(s)$ of the solution $f(s)$ of the integral equations

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{(t^p - s^p)^\alpha} ds, \quad t \in [0, R], \tag{1}$$

and

$$g(t) = \int_t^R \frac{f(s)}{(s^p - t^p)^\alpha} ds, \quad t \in [0, R], \tag{2}$$

where

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{and} \quad p = \frac{1}{l} \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

These approximations $f_\Delta(s)$ are defined by

$$f_\Delta(s) = \frac{p \sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{g(0)}{s^{1-\alpha p}} + \frac{1}{s^{1-p}} \int_0^s \frac{g'_\Delta(t)}{(s^p - t^p)^{1-\alpha}} dt \right), \quad s \in (0, R], \tag{4}$$

and

$$f_\Delta(s) = \frac{p \sin \alpha\pi}{\pi s^{1-p}} \left(\frac{g(R)}{(R^p - s^p)^{1-\alpha}} - \int_s^R \frac{g'_\Delta(t)}{(t^p - s^p)^{1-\alpha}} dt \right), \quad s \in (0, R], \tag{5}$$

respectively, where g_Δ is a spline function of degree $m = 2k-1$ $(1 < k \leqslant n)$ interpolating the function g at the nodes t_i, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = R$, and given in the form

$$g_\Delta(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i t^i + \sum_{j=1}^{n} B_j \theta(t, t_j)(t - t_j)^m \tag{6}$$

with

$$\theta(t, t_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < t_j, \\ 1 & \text{if } t \geqslant t_j. \end{cases}$$

```
procedure inteqAbel3(m,n,s,F,R,g,alfa,l,A,B,t,f);
 value m,n,s,R,g,l;
 integer m,n,l;
 real s,R,g,alfa,f;
 array A,B,t;
 Boolean F;
 begin
  integer m1,m2,i,v,mm,j;
  real r,h,p,sp,Rp,ars,sp1,Ri,s11,tp1,tp2,s1,s2,sum2,tj,bj,
  tjp,s12,si1,sp2,ats,si;
  f:=.0;
  if ¬F∧s=R
   then go to fin;
  m1:=1;
  m2:=l-1;
  r:=h:=alfa-1.0;
  p:=1.0/l;
  sp:=s↑p;
  if F
   then
   begin
    Rp:=R:=1.0;
    ars:=sp↑alfa
   end F
   else
   begin
    Rp:=R↑p;
    ars:=-(Rp-sp)↑alfa/Rp
   end¬F;
  sp1:=sp/Rp;
```

```
s11:=Ri:=1.0;
for i:=1 step 1 until m do
 begin
  tp1:=1.0;
  s1:=.0;
  for v:=m2 step -1 until m1 do
   begin
    s1:=s1+tp1;
    tp1:=tp1×sp1×v/(v+h)
   end v;
  m1:=m2+1;
  m2:=m2+l;
  r:=r+l;
  Ri:=Ri×R;
  s11:=tp1×s11;
  if ¬F
   then s11:=s11+s1;
  f:=f+Ri×s11×i×A[i]/r
 end i;
f:=f×ars;
sum2:=ars×Ri×s11×B[1]/r;
n:=n-1;
mm:=m-1;
for j:=2 step 1 until n do
 begin
  tj:=t[j];
  if s≤tj∧F
   then go to E1;
  m1:=1;
  m2:=l-1;
```

```
bj:=.0;
r:=l+h;
si1:=(-tj)↑mm;
tjp:=tj↑p;
sp2:=sp/tjp;
ats:=s12:=if s≠tj then abs(tjp-sp)↑alfa/tjp else .0;
s11:=ars;
Ri:=R;
tjp:=tj;
for i:=0 step 1 until mm do
 begin
  s1:=s2:=.0;
  si:=tp1:=tp2:=1.0;
  for v:=m2 step -1 until m1 do
   begin
    s1:=s1+tp1×si;
    s2:=s2+tp2×si;
    tp1:=sp1×tp1;
    tp2:=sp2×tp2;
    si:=si×v/(v+h)
   end v;
  m1:=m2+1;
  m2:=m2+l;
  s11:=s1×ars+si×tp1×s11;
  s12:=s2×ats+si×tp2×s12;
  bj:=bj+si1×(if F then s12×tjp else s11×Ri+(if s<tj
      then s12×tjp else .0))/r;
  r:=r+l;
  tjp:=tjp×tj;
  Ri:=Ri×R;
```

```
        si1:=-si1×(mm-i)/(i+1)/tj
      end i;
      sum2:=sum2+B[j]×bj
    end j;
E1:
  f:=0.318309886184×sin(3.14159265359×alfa)×sp×(g×(if F
      then sp else Rp-sp)↑h/l+f+m×sum2)/s;
fin:
 end inteqAbel3
```

Data:

m — degree of the spline function (6);
n — number of nodes of the spline function g_Δ;
s — an arbitrary fixed point from the interval $(0, R]$;
F — Boolean variable; if $F \equiv$ **true**, then equation (1) is solved, otherwise equation (2) is solved;
R — if $F \equiv$ **false**, then R denotes the upper limit of integral (2), otherwise it is inessential;
g — if $F \equiv$ **true**, then g is equal to $g(0)$, else to $g(R)$;
alfa, l — parameters defined by (1)-(3);
$A[0:m]$, $B[1:n]$ — arrays of coefficients of g_Δ;
$t[1:n]$ — array of nodes of g_Δ.

Result:

f — approximate value of $f(s)$ of equation (1) if $F \equiv$ **true** or of (2) if $F \equiv$ **false**.

2. Method used. The method from [2] has been used. Additionally, the method from [1] is proposed to the determination of A_i and B_j in (6).

3. Certification. The procedure *inteqAbel3* has been tested on the Odra 1204 computer. The obtained results of calculations have been given in [2].

References

[1] H. Malinowski and R. Smarzewski, *A numerical method for solving the Abel integral equation*, Zastosow. Matem. 16 (1978), p. 275-281.

[2] R. Smarzewski and H. Malinowski, *Numerical solutions of a class of Abel integral equations*, J. Inst. Maths. Applics. 22 (1978), p. 159-170.

DEPARTMENT OF NUMERICAL METHODS
M. CURIE-SKŁODOWSKA UNIVERSITY
20-031 LUBLIN

Received on 7. 7. 1977

ALGORYTM 68

H. MALINOWSKI i R. SMARZEWSKI (Lublin)

WYZNACZANIE ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ CAŁKOWYCH ABELA, III

STRESZCZENIE

Procedura *inteqAbel3* wyznacza aproksymację $f_\Delta(s)$ rozwiązania $f(s)$ równania całkowego (1) lub (2). Aproksymacja $f_\Delta(s)$ określona jest odpowiednio przez (4) lub (5), gdzie g_Δ jest funkcją sklejaną stopnia $m = 2k-1$ $(1 < k \leqslant n)$, interpolującą funkcję g w węzłach t_i, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = R$, i daną wzorem (6).

Dane:

m — stopień funkcji sklejanej (6);
n — liczba węzłów funkcji sklejanej g_Δ;
s — dowolnie ustalony punkt z przedziału $(0, R]$;
F — zmienna boolowska; gdy $F \equiv$ **true**, wtedy rozwiązywane jest równanie (1), w przeciwnym razie — równanie (2);
R — jeśli $F \equiv$ **false**, to R jest górną granicą całki (2), w przeciwnym razie — jest nieistotne;
g — jeśli $F \equiv$ **true**, to g jest równe $g(0)$, w przeciwnym razie zaś $g(R)$;
alfa, l — parametry określone przez (1)-(3);
$A[0:m]$, $B[1:n]$ — tablice współczynników g_Δ;
$t[1:n]$ — tablica węzłów g_Δ.

Wynik:

f — wartość $f_\Delta(s)$, aproksymująca rozwiązanie $f(s)$ równania (1), gdy $F \equiv$ **true**, lub równania (2), gdy $F \equiv$ **false**.

W procedurze *inteqAbel3* zastosowano metodę szczegółowo opisaną w [2]. Do wyznaczania współczynników A_i oraz B_j w (6) autorzy proponują numerycznie stabilną metodę z pracy [1].

Obliczenia, wykonane na maszynie Odra 1204, wykazały poprawność algorytmu. Wyniki obliczeń przedstawiono w pracy [2].