ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

UWAGI O MODELU PROBABILISTYCZNYM ZMIENNOŚCI NA PŁASZCZYŹNIE

Kiedy geolog na podstawie pomiaru miąższości złoża w niewielu punktach chce oszacować zasoby cennego kruszcu (por. [5]), kiedy na podstawie pomiarów punktowych rolnik chce szacować plony lub leśnik zasoby drewna (por. [2]), kiedy łąkarz chce ocenić jaka część powierzchni łąki pokryta jest roślinami użytkowymi (por. [3]), kiedy podczas analizy metalograficznej stali, czy żeliwa, bada się jaką część pola przekroju zajmują poszczególne strukturalne składniki odlewu (por. [1]), wtedy nieodmiennie pojawia się pytanie, jakie rozmieszczenie punktów próbkowych jest najkorzystniejsze oraz czy i ile można zyskać na dokładności oszacowania przez właściwe rozmieszczenie tych punktów. Można szukać odpowiedzi na te pytania przez studium modeli matematycznych uwzględniających odpowiednio strukturę funkcyj, których średnie czy całki chcemy szacować.

W podstawowym modelu probabilistycznym przyjmuje się, że wartość $y(p)$ badanej cechy w danym punkcie p płaszczyzny jest zmienną losową, a wszystkie zmienne losowe $y(p)$ tworzą ciągły, stacjonarny i izotropowy proces stochastyczny na płaszczyźnie.

Celem komunikatu (¹) jest zrelacjonowanie najnowszych badań dotyczących zależności między dokładnością oszacowania, a sposobem rozmieszczania punktów pomiarowych, odnoszących się do tego modelu. I tak w pracach [6] i [7] porównywano losowe, warstwowe i systematyczne rozmieszczanie punktów pomiarowych na danym obszarze ograniczonym, a w [8] i [9] badano, jak od kształtu regularnej sieci punktów pomiarowych zależy graniczna wariancja średniej próbkowej „przypadająca na jedną obserwację”, a rozumiana jako granica

$$s_\infty^2 = \lim_{R\to\infty} n_R D^2 \bar{\eta}_R,$$

gdzie n_R jest liczbą punktów próbkowych w kole K o promieniu R i sta-

---

(¹) Komunikat był przedstawiony na Konferencji Statystycznych i Operacyjnych Zastosowań Matematyki odbytej w Warszawie w dniach 27-29 września 1962 r.

łym środku O, zaś

$$\bar{\eta}_R = \frac{1}{n_R}\big(y(p_1)+\ldots+y(p_{n_R})\big).$$

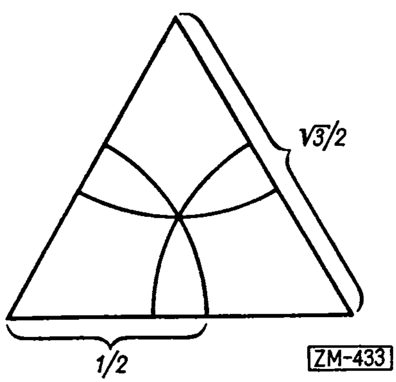
$(p_1, \ldots, p_{n_R}$ oznaczają punkty próbkowe leżące wewnątrz $K)$.

W szczególności w [8] pokazano na przykładach, że optymalny kształt sieci punktów próbkowych zależy od funkcji korelacyjnej procesu $y(p)$ i gęstości sieci w bardzo dziwny sposób.

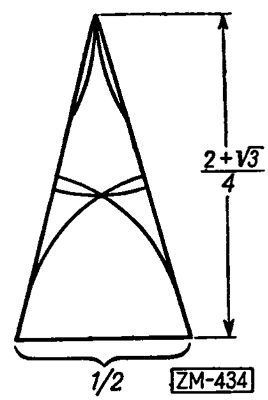
Rozpatrzmy mianowicie proces $y(p)$ z funkcją korelacyjną

$$r(d) = R\big(y(p), y(q)\big) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\{\arccos d - d(1-d^2)^{1/2}\} & \text{dla} \quad 0 \leqslant d \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $R\big(y(p), y(q)\big)$ oznacza współczynnik korelacji między zmiennymi losowymi $y(p)$ i $y(q)$, a $d = d(p, q)$ jest odległością punktów p i q. Wartość tej funkcji w punkcie d jest równa polu części wspólnej dwóch kół o promieniu $1/2$ i środkach odległych o d, podzielonemu przez $\pi/4$, czyli



Rys. 1



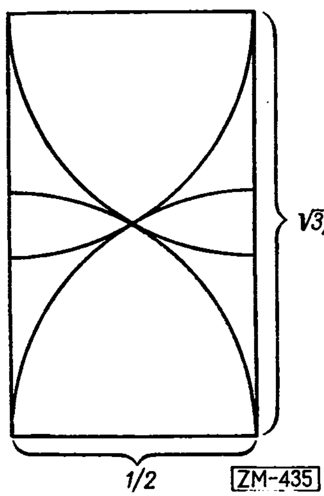
Rys. 2

przez pole koła o promieniu $1/2$. Otóż warunkiem dostatecznym na to, aby przy tej funkcji korelacyjnej regularna sieć punktów, to jest sieć punktów złożona z wierzchołków przystających figur wypełniających płaszczyznę, była optymalna, jest, żeby funkcja $k(p)$, która w danym punkcie p jest równa liczbie tych kół K_i o promieniu $1/2$ i środkach w punktach sieci, które pokrywają p, przyjmowała jako swe wartości tylko dwie kolejne liczby całkowite. Odsyłamy czytelnika po szczegółową dyskusję do pracy [8], a tu pragniemy pokazać jedynie kilka optymalnych sieci punktów próbkowych spełniających sformułowany wyżej warunek dostateczny. Na rysunkach pokazane są pojedyncze oczka sieci z zaznaczeniem kół K_i mających część wspólną z danym oczkiem. Przykłady uporządkowane są według gęstości sieci, to znaczy liczby c punktów próbkowych przypadających średnio na jednostkę pola. I tak

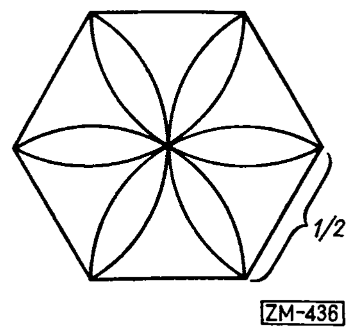
1. Jeśli $c = 8/3\sqrt{3} \approx 1{,}540$, to najlepsza jest sieć trójkątów równobocznych o boku $\sqrt{3}/2$ (porównaj rys. 1).

2. Jeśli $c = 8/(2+\sqrt{3}) \approx 2{,}144$, to najlepszą jest sieć trójkątów równoramiennych o podstawie $1/2$ i wysokości $(2+\sqrt{3})/4$ (porównaj rys. 2).

3. Jeśli $c = 4\sqrt{3}/3 \approx 2{,}309$, to najlepsza jest sieć złożona z prostokątów o bokach $1/2$ i $\sqrt{3}/2$ (porównaj rys. 3).



Rys. 3



Rys. 4

4. Jeśli $c = 16/3\sqrt{3} \approx 3{,}079$, to najlepsza jest sieć sześciokątów foremnych o boku $1/2$ (porównaj rys. 4). W przypadkach 2, 3 i 4 sieć trójkątów równobocznych o tej samej gęstości jest gorsza.

Prace cytowane

[1] S. Drápal, V. Horálek, Z. Režný, *Mrizkova kvantitativni metalograficka analysa*, Hutnické listy 12 (1957), str. 485-491.

[2] B. Matérn, *Metoder att uppskata noggranheten vid linje- och provytetaxering* (Metody estymowania dokładności przeglądów liniowych i punktowych), Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut 36 (1947), 138 str.

[3] J. Perkal, *Geometryczne wskaźniki łąk*, Zastosow. Mat. 2 (1955), str. 133-149.

[5] S. Zubrzycki, *O szacowaniu parametrów złóż geologicznych*, Zastosow. Mat. 3, (1957), str. 105-153.

[6] — *Remarks on random, stratified and systematic sampling in a plane*, Colloq. Math. 6 (1958), str. 251-264.

[7] J. Hájek, *Concerning relative accuracy of stratified and systematic sampling in a plane*, Colloq. Math. 8 (1961), str. 133-134.

[8] T. Dalenius, J. Hájek, S. Zubrzycki, *On plane sampling and related geometrical problems*, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. I: Theory of Statistics, Berkeley and Los Angeles 1961, str. 125-150.

[9] B. Matérn, *Spatial variation*, Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut 49 (1960), 144 str.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 11. 2. 1963

С. ЗУБЖИЦКИ (Вроцлав)

ЗАМЕЧАНИЯ О ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ВАРИАНТНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

РЕЗЮМЕ

В этом сообщении обсуждаются некоторые новые результаты (смотри цитированные работы, особенно [5]-[8]) относящиеся к вопросу как форма регулярной сетки точек влияет на точность оценки стационарного изотропного стохастического процесса на плоскости при помощи арифметической средней значений этого процесса в точках сетки.

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

REMARKS ON A PROBABILISTIC MODEL OF VARIABILITY ON A PLANE

SUMMARY

This communication reviews a number of recent results (see references, especially [5]-[8]) pertinent to the question how the shape of a regular net of points influences the accuracy of estimating the mean value of a continuous stationary isotropic stochastic process in the plane by the avarage of its values at the points of the net.
