W. KRYSICKI (Łódź)

O POŁĄCZONYM ZAGADNIENIU BAYESA I BERNOULLIEGO

W podręczniku *Calcul des probabilités* (Paris 1912, Chapitre IX. 101-102, str. 160-163) H. Poincaré zajmuje się następującym zagadnieniem: Dwóch szachistów grało ze sobą $n+m$ partii; pierwszy wygrał n partii, drugi m partii; jeśli $n>m$, to można przypuścić, że pierwszy gracz jest silniejszy. Jeśli będą grać następną partię, pierwszy będzie miał więcej szans do jej wygrania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz pierwszy wygra następną partię?

Już po napisaniu mej pracy, zwróciła mi uwagę H. Millicer-Grużewska, że zagadnienie opracowane przeze mnie jest uogólnieniem cytowanego zagadnienia Poincaré'go.

1. Uogólnione zagadnienie Poincaré'go. Załóżmy, że w ciągu n jednakowych i niezależnych doświadczeń, o stałym lecz nieznanym prawdopodobieństwie p ($p\neq 0$, $p\neq 1$) zajścia w poszczególnym doświadczeniu, zdarzenie sprzyjające zaszło a razy. Wówczas gęstość prawdopodobieństwa *a posteriori* $P_a(p)$, przy założeniu, że gęstość prawdopodobieństwa *a priori* jest stała, wyrazi się wzorem Bayesa

$$P_a(p)=\frac{p^a(1-p)^{n-a}}{\int\limits_0^1 s^a(1-s)^{n-a}ds}, \tag{1}$$

czyli

$$P_a(p)=\frac{(n+1)!}{a!(n-a)!}p^a(1-p)^{n-a}. \tag{2}$$

Wyznaczymy teraz prawdopodobieństwo, że w N nowych takich samych doświadczeniach dane zdarzenie zajdzie β razy.

Prawdopodobieństwo, że w N doświadczeniach niezależnych o stałym prawdopodobieństwie p dane zdarzenie zajdzie β razy, daje wzór Bernoulliego

$$P[N,\beta|p]=\frac{N!}{\beta!(N-\beta)!}p^\beta(1-p)^{N-\beta}, \tag{3}$$

a prawdopodobieństwo *a posteriori*, że nieznane prawdopodobieństwo p jest zawarte w elementarnym przedziale o długości dp wyraża się iloczynem $P_a(p)dp$; wobec tego prawdopodobieństwo łącznego zajścia dwóch wymienionych zdarzeń zależnych jest

$$P_a(p)\,dp\cdot P[N,\beta|p]. \tag{4}$$

Ponieważ p może się zmieniać w granicach od 0 do 1, więc dla obliczenia poszukiwanego prawdopodobieństwa, które oznaczymy przez $P[N,\beta;n,a]$, należy scałkować wyrażenie (4) w przedziale $\langle 0,1\rangle$:

$$P[N,\beta;n,a]=\frac{(n+1)!\,N!}{a!\,(n-a)!\,\beta!\,(N-\beta)!}\int\limits_0^1 s^{a+\beta}(1-s)^{n+N-a-\beta}\,ds,$$

co po obliczeniu daje

$$P[N,\beta;n,a]=\frac{(n+1)!\,N!\,(a+\beta)!\,(n+N-a-\beta)!}{a!\,(n-a)!\,\beta!\,(N-\beta)!\,(n+N+1)!}. \tag{I}$$

2. Ekstremum funkcji $P[N,\beta;n,\alpha]$ przy stałych n,α,N.

Niech
$$P[N,\beta;n,a]=\frac{(n+1)!\,N!}{a!\,(n-a)!\,(n+N+1)}F(\beta),$$

gdzie

$$F(\beta)=\frac{(a+\beta)!\,(n+N-a-\beta)!}{\beta!\,(N-\beta)!}.$$

Obliczymy $F(\beta+1)$ i zbadamy stosunek

$$\frac{F(\beta+1)}{F(\beta)}=\frac{(a+\beta+1)(N-\beta)}{(n+N-a-\beta)(\beta+1)}.$$

Łatwo wykazać, że stosunek ten jest niemniejszy od 1, gdy

$$\beta\leqslant\frac{(N+1)a}{n}-1, \tag{5}$$

skąd wysnuwamy następujące wnioski:

1. Jeżeli $(N+1)a<n$, to $P[N,\beta;n,a]$ jest funkcją malejącą β przy stałych n,a,N, to znaczy dla $\beta=0$ osiąga największą wartość

$$P[N,0;n,a]=\frac{(n+1)!\,(n+N-a)!}{(n-a)!\,(n+N+1)!}.$$

2. Jeżeli $\alpha=n$, to $P[N,\beta;n,n]$ jest funkcją rosnącą przy stałych n,N, to znaczy dla $\beta=N$ osiąga największą wartość

$$P[N,N;n,n]=\frac{n+1}{N+n+1},$$

przy czym, przy stałym N i $\beta=N$, prawdopodobieństwo to rośnie ze wzrostem n.

3. Jeżeli $\alpha\neq n$ i $(N+1)\alpha/n=k$ jest liczbą naturalną, to $P[N,\beta;n,\alpha]$ osiąga tę samą największą wartość zarówno dla $\beta=k-1$ jak i dla $\beta=k$.

4. Jeżeli $(N+1)\alpha/n$ nie jest liczbą naturalną, to $P[N,\beta;n,\alpha]$ osiąga największą wartość dla $\beta=\mathrm{E}[(N+1)\alpha/n]$.

Oto dla przykładu wartości β_0, dla których zachodzi ekstremum obliczone przy pewnych wartościach n,α,N:

n	α	N	β_0
20	3	19	2 lub 3
20	3	20 do 25	3
20	3	26 do 32	4
31	3	9	0
31	3	10 do 19	1

3. Zagadnienia graniczne. Nasuwają się tutaj następujące zagadnienia graniczne:

1. Zakładając, że ilość n doświadczeń rośnie nieograniczenie wraz z α w ten sposób, że stosunek

$$\frac{\alpha}{n}=p_0 \qquad (p_0\neq 0,\ \ p_0\neq 1) \tag{6}$$

pozostaje stały, obliczyć graniczną wartość prawdopodobieństwa

$$\lim_{n\to\infty} P[N,\beta;n,\alpha]=\frac{N!}{\beta!(N-\beta)!}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(\alpha+\beta)!(n+N-\alpha-\beta)!}{\alpha!(n-\alpha)!(n+N+1)!} \tag{7}$$

traktując N,β jako stałe.

Po zastosowaniu wzoru Stirlinga w postaci

$$k!=k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}\, e^{\Theta k/12n}, \qquad 0<\theta_k<1 \tag{8}$$

do wszystkich czynników występujących pod znakiem granicy we wzorze (7), po przekształceniach przy zachowaniu warunku (6) i przejściu do granicy przy wartościach N, β stałych otrzymujemy następujący wzór graniczny:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{n\to\infty} P[N,\beta;n,a] = \frac{N!}{\beta!(N-\beta)!} p_0^\beta (1-p_0)^{N-\beta}.$$

Otrzymaliśmy wzór Bernoulliego przy prawdopodobieństwie danym przez wzór (6), co jest wynikiem granicznym zupełnie zgodnym z intuicją.

2. Zakładając, że β i N rosną nieograniczenie w ten sposób, iż stosunek

$$(9) \qquad \frac{\beta}{N} = P_0 \qquad (P_0 \neq 0,\ P_0 \neq 1)$$

pozostaje stały, obliczyć

$$\lim_{N\to\infty} P[N,\beta;n,a] = \frac{(n+1)!}{a!(n-a)!} \lim_{N\to\infty} \frac{N!(a+\beta)!(n+N-a-\beta)!}{\beta!(N-\beta)!(n+N+1)!}.$$

Granica ta — jak można było przewidzieć — jest równa zeru: jest to bowiem prawdopodobieństwo (przy stałych n, a), że przy $N\to\infty$ na N doświadczeń zajdzie dokładnie β doświadczeń sprzyjających, przy czym β spełnia warunek (9); jest to więc jedna szansa na N, gdy $N\to\infty$. Wyznaczymy teraz rząd zbieżności do zera względem $1/N$; w tym celu stawiamy zagadnienie następujące:

Należy znaleźć taką liczbę rzeczywistą $w\neq 0$ oraz taką funkcję $G(n,a,P_0)$, żeby przy spełnieniu warunku (9) zachodziła równość

$$\lim_{N\to\infty} \{N^w P[N,\beta;n,a]\} = G(n,a,P_0) \not\equiv 0.$$

Rachunki, przeprowadzone również przy użyciu wzoru Stirlinga (8), dają następujący wzór graniczny:

$$\text{(III)} \qquad \lim_{N\to\infty} \{N^1 P[N,\beta;n,a]\} = \frac{(n+1)!}{a!(n-a)!} P_0^a (1-P_0)^{n-a}.$$

4. Wartość oczekiwana zmiennej losowej β przy stałych n, a, N. Wartość ta wyraża się na podstawie definicji wzorem

$$(10) \qquad \mathrm{E}(\beta) = \frac{(n+1)!N!}{a!(n-a)!(n+N+1)!} \sum_{\beta=0}^{N} \frac{(a+\beta)!(n+N-a-\beta)!}{\beta!(N-\beta)!} \beta.$$

Aby obliczyć sumę szeregu po prawej stronie wzoru (10) korzystamy ze wzoru[1])

$$\iint_D x^p y^q dx dy = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \int_0^1 z^{p+q+1} dz,$$

prawdziwego dla $p>-1$, $q>-1$, przy czym obszar D określony jest przez nierówności $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$. Dla wartości naturalnych p i q

$$\iint_D x^p y^q dx dy = \frac{p!\,q!}{(p+q+2)!}.$$

Nie trudno wykazać, na podstawie ostatniego wzoru, że

$$\sum_{\beta=0}^{N} \frac{(\alpha+\beta)!\,(n+N-\alpha-\beta)}{\beta!\,(N-\beta)!}\beta =$$

$$= (n+N+2)!\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\iint_D \sum_{\beta=0}^{N} \frac{x^{\alpha+\beta} y^{n+N-\alpha-\beta}}{\beta!\,(N-\beta)!} z^\beta dx dy\right]\right\}_{z=1}.$$

Prawą stronę ostatniego wzoru napiszmy w postaci

$$(11) \qquad \frac{(n+N+2)!}{N!}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\iint_D \left[\sum_{\beta=0}^{N} \frac{N!}{\beta!\,(N-\beta)!}(xz)^\beta y^{N-\beta}\right] x^\alpha y^{n-\alpha} dx dy\right\}_{z=1}.$$

Ale suma ujęta w nawias pod znakiem całki podwójnej jest równa $(xz+y)^N$, wobec czego wyrażenie (11) przybiera postać

$$(12) \qquad \frac{(n+N+2)!}{(N-1)!} \iint_D (x+y)^{N-1} x^{\alpha+1} y^{n-\alpha} dx dy.$$

Tę całkę obliczamy według wzoru

$$\iint_D \frac{x^p y^q}{(x+y)^\mu} dx dy = \frac{1}{(p+q+2-\mu)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \text{[2]},$$

słusznego przy $p>-1$, $q>-1$, $\mu<p+q+2$. Wynik podstawiamy do wzoru (12), a wyrażenie w ten sposób otrzymane do wzoru (10) zamiast

---

[1]) Zobacz np. И. М. Рижик и И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1951, str. 247, wzór 3.935 3.

[2]) Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Москва 1952, Том III, str. 480.

sumy tam zawartej. Po uproszczeniach otrzymujemy ostateczny wynik w postaci

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{E}(\beta) = \frac{a+1}{n+2} N.$$

Interesujące jest to, że współczynnik przy N w otrzymanym wzorze jest dokładnie równy wartości oczekiwanej zmiennej losowej p w zagadnieniu Bayesa

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{E}(p) = \int_0^1 p P_a(p)\, dp = \frac{a+1}{n+2},$$

gdzie $P_a(p)$ dane jest przez wzór (3). I ten wynik jest zgodny z intuicją: jeżeli wartością oczekiwaną zmiennej losowej p jest ułamek (13), to wykonując nową serię N doświadczeń o tym samym prawdopodobieństwie p, należy istotnie spodziewać się zajścia sprzyjającej ilości zdarzeń wyrażonej przez wzór (IV).

Praca wpłynęła dnia 22. 12. 1953 r.

В. КРЫСИЦКИЙ (Лодзь)

О СОВМЕСТНОМ ПРОБЛЕМЕ БЕЙЕСА И БЕРНУЛЛИ

РЕЗЮМЕ

Событье с постоянной вероятностью p ($p \neq 0$, $p \neq 1$) состоялось a раз в n независимых одинаковых опытах. Какова вероятность, что состоится оно β раз в N новых таких-же опытах, если все значения величины p были ровно вероятны?

Ответ:

$$P[N, \beta; n, a] = \frac{(n+1)!\, N!\, (a+\beta)!\, (n+N-a-\beta)!}{a!\, (n-a)!\, \beta!\, (N-\beta)!\, (n+N+1)!}.$$

Исследовано экстремальное значение P и решено две предельные задачи. Наконец определено математическое ожидание $\mathrm{E}(\beta)$ при n, a, N постоянных, получая следующий результат:

$$\mathrm{E}(\beta) = \frac{a+1}{n+2} N.$$

W. KRYSICKI (Łódź)

ON THE COMBINED PROBLEM OF BAYES AND BERNOULLI

SUMMARY

A certain event with a constant probability p ($p \neq 0$, $p \neq 1$) of occurence has occured a times in n independent identical experiments. What is the probability of its occuring β times in N new, identical experiments if all values of p are equally probable?

The answer is

$$P[N,\beta;n,a] = \frac{(n+1)!\,N!\,(a+\beta)!\,(n+N-a-\beta)!}{a!\,(n-a)!\,\beta!\,(N-\beta)!\,(n+N+1)!}.$$

Next the extremum of the expression P was examined and two limit problems were solved. Finally the expected value $\mathrm{E}(\beta)$, with constant n, a, N, was determined and the result obtained was

$$\mathrm{E}(\beta) = \frac{a+1}{n+2} N.$$