

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

*PRÓBA MATEMATYCZNEGO UJĘCIA RZEŻBY TERENU
JAKO CZYNNIKA EROZJI*

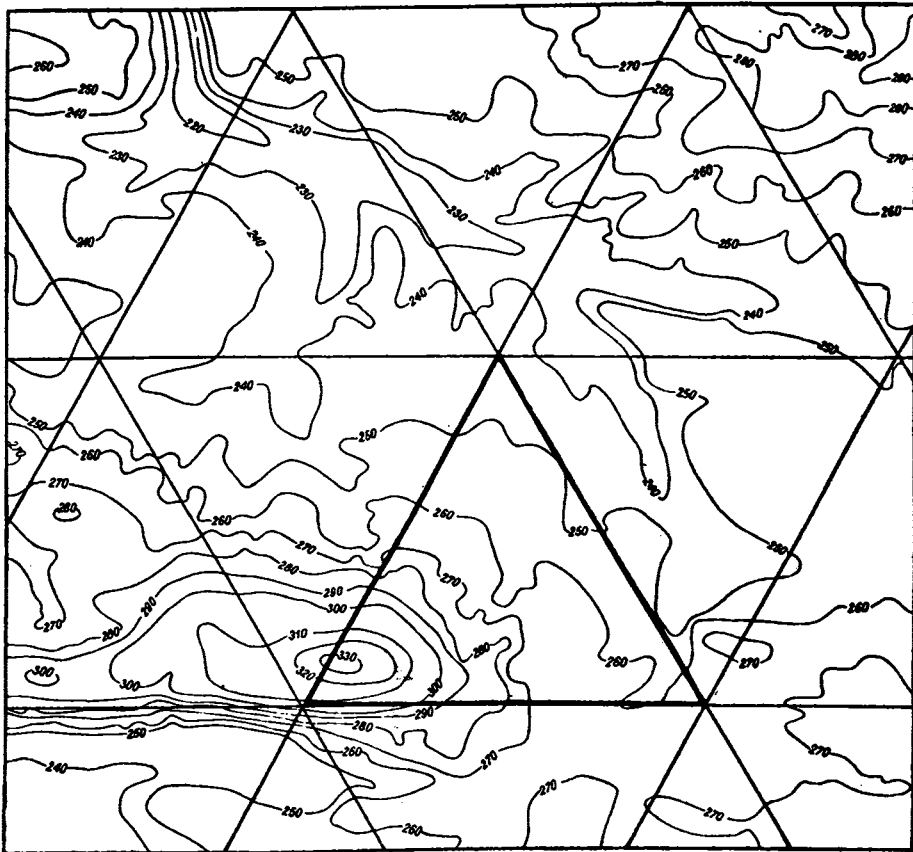
1. Zagadnienie omawiane w tej pracy wyłoniło się z prac Działu Gospodarki Wodnej Instytutu Uprawy i Nawożenia Gleb nad mapą, która by klasyfikowała tereny Polski ze względu na zagrożenie erozją. Wielkość erozji zależy od wielu czynników przyrodzonych, przede wszystkim zaś od rzeźby terenu, jakości gleby i klimatu. S. Bac zaproponował sporządzać mapy obrazujące wpływ każdego czynnika z osobna i wydzielać tereny najbardziej potencjalnie zagrożone, przez nałożenie na siebie tych trzech map.

Znane są empiryczne wzory uzależniające erozję od takich parametrów stoku, jak jego długość lub nachylenie (zob. [1]). Odnoszą się one jednak do stoków płaskich, co tak bardzo utrudnia używanie ich do oceny wpływu rzeźby terenu na erozję, że w praktyce ocenę taką przeprowadza się sposobem szacunkowym z wyglądu mapy warstwicowej badanego obszaru. Wobec tego S. Bac postawił pytanie, czy nie można by tej szacunkowej oceny zastąpić jakimś prostym wzorem zależnym od kilku danych, które można mierzyć na mapie warstwicowej. Pozytywne rozwiązanie miałoby duże znaczenie dla sporządzania map erozyjnych, ekspertyz terenowych i projektowania właściwego układu pól w terenach falistych. Ocena taka nie byłaby subiektywna, a ponieważ redukowałaby się do kilku pomiarów, więc pozwoliłaby na powierzenie pracy klasyfikacyjnej osobom mniej wykwalifikowanym.

Praca niniejsza jest próbą znalezienia takiego wzoru.

2. Jako obszary podlegające ocenie przyjęliśmy (z J. Perkałem) trójkąty równoboczne o boku 2 km. Trzy egzemplarze mapy możliwie urozmaiconego terenu, w skali 1:25000, z warstwicami co 10 m, podzieliśmy w identyczny sposób na takie trójkąty (fragment mapy podano na rysunku 1). Jeden egzemplarz przedstawiliśmy S. Bacowi we Wrocławiu, drugi J. Ostromeckiemu w Bydgoszczy, trzeci A. Renigerównie w Puławach, z prośbą o ocenienie wpływu rzeźby terenu na erozję, stosując skalę ocen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ocenę 0 dawano trójkątowi najmniej zagrożonemu przez erozję, 9 — trójkątowi najbardziej zagro-

żonemu. Przyjeliśmy, że średnia z tych trzech ocen, którą będziemy nazywali *empirycznym współczynnikiem erozji*, wyraża prawdziwe zagrożenie trójkąta. W ten sposób zebraliśmy materiał obserwacyjny i sprowadziliśmy zagadnienie do znalezienia takiej funkcji (zależnej od danych mierzonych na mapie), która by dostatecznie dokładnie wyrażała empiryczny współczynnik erozji.



ZM-151

Rys. 1

Zebrany materiał składa się z ocen nadesłanych bez wzajemnego porozumienia się przez trzech rzeczoznawców. Nasuwa się pytanie, czy zgodność tych ocen jest zadowalająca. Gdyby bowiem oceny okazały się zbyt rozbieżne, dalsze badania byłyby bezpodstawne. Odpowiedź daje tu błąd empirycznego współczynnika erozji, znaleziony w sposób następujący:

Oznaczmy przez $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)}$, oceny empirycznego współczynnika erozji podane kolejno przez trzech rzeczoznawców (zobacz tablicę 1) oraz

przez v_i empiryczny współczynnik erozji ($i=1,2,\dots,65$ oznacza numer trójkąta) obliczany jako średnia arytmetyczna z trzech ocen. Traktując ocenę empirycznego współczynnika erozji w poszczególnym trójkącie jako zmienną losową, znajdujemy dla każdego trójkąta wariancję tej oceny według wzoru

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2} ((v_i^{(1)} - r_i)^2 + (v_i^{(2)} - r_i)^2 + (v_i^{(3)} - r_i)^2).$$

Znajdujemy następnie średnią wariancję

$$\sigma^2 = \frac{1}{65} \sum_{i=1}^{65} \sigma_i^2.$$

Pierwiastek σ z tak otrzymanej średniej wariancji nazywamy *błędem oceny empirycznego współczynnika erozji*. Dla naszego materiału mamy $\sigma=0,871$. Przy skali ocen obejmującej 10 jednostek mamy błąd oceny mniejszy od jednostki. Można przeto uważać oceny za wystarczająco zgodne na to, by je użyć za podstawę dalszych badań. Jest to także wskazówka, jak dokładnej estymacji trzeba szukać, wystarczy bowiem jeśli jej błąd będzie mniejszy niż σ .

Można z kolei zapytać, czy są systematyczne różnice między ocenami poszczególnych rzeczoznawców. W tym celu zbadamy wiarygodność hipotezy, że oceny każdego rzeczoznawcy z osobna są niezależnymi realizacjami zmiennych losowych, które mają średnią zmieniającą się wraz z trójkątem, natomiast w ustalonym trójkącie tę samą dla wszystkich trzech rzeczoznawców, oraz dyspersję we wszystkich trójkątach równą σ . Wtedy różnica $v^{(k)} - v^{(m)}$ dla $k, m=1,2,3$ oraz $k \neq m$ miałyby średnią 0 i dyspersję $\sqrt{2}\sigma$, a różnica średnia

$$r_{km} = \frac{1}{65} \sum_{i=1}^{65} (v_i^{(k)} - v_i^{(m)})$$

miałaby średnią 0 i dyspersję $\sqrt{2}\sigma/\sqrt{65}$, w naszym przypadku równą 0,153. Mamy $r_{2,3}=0,545$, $r_{2,1}=0,496$, $r_{1,3}=0,076$. Prawdopodobieństwa przekroczenia tych wartości wynoszą kolejno 0,0001, 0,0011, 0,3099. Wynika stąd, że oceny pierwszego i trzeciego rzeczoznawcy nie wykazują istotnych różnic, natomiast oceny drugiego rzeczoznawcy są systematycznie wyższe zarówno od ocen pierwszego, jak i trzeciego rzeczoznawcy.

Oceny empirycznego współczynnika erozji podane są w tablicy 1.

3. Badałem korelację empirycznego współczynnika erozji z następującymi danymi:

t — długość wszystkich warstw w trójkącie w decymetrach (mierzyłem ją longimetrem Steinhausa z siatką kwadratową),

- u — ilość warstwicy o różnych rzędnych w trójkącie,
 w — różnica potrojonej rzędnej środka trójkąta i sumy rzędnych wierzchołków; rzędne punktów trójkąta brano w metrach,
 p — suma wskaźników w dla czterech trójkątów, na które dzieli się badany trójkąt przez proste łączące środki jego boków; dane w i p obrazują wypukłość,
 r — zmniejszona o 800 suma rzędnych czterech punktów trójkąta, a mianowicie rzędnych środków trójkątów, powstałych przez podział badanego trójkąta na cztery części prostymi, łączącymi środki jego boków; dana ta obrazuje wysokość trójkąta nad poziomem morza.
 s — zmniejszona o 20 wysokość najwyższej warstwicy w trójkącie w dziesiątkach metrów.

Wymienione tu dane są zawarte w tablicach 2 i 3.

Próbowałem najpierw przedstawić empiryczny współczynnik erozji jako funkcję liniową, następnie zaś kwadratową danych t i u , jednak błąd estymacji był zbyt duży. Nie poprawiło też estymacji uwzględnienie ponadto wskaźników, zależnych liniowo od danych w lub p . Najmniejszy z otrzymanych tu błędów estymacji wyniósł 0,95. Dopiero dla zespołów danych t , u , r oraz t , u , s uzyskałem błędy estymacji mniejsze od błędów oceny empirycznego współczynnika erozji, mianowicie dla pierwszego zespołu danych błęd estymacji wyniósł 0,76, dla drugiego 0,79. (W obu tych przypadkach uwzględniłem wyrazy pierwszego i drugiego stopnia dla danych t i u i wyrazy pierwszego stopnia dla pozostałej danej). Ze względu na to, że dane r i s mają podobny charakter, mówią bowiem o wysokości nad poziomem morza, i że spośród nich dana r jest z trójkątem bardziej związana i daje lepszą estymację, uważam funkcję danych t , u , r za właściwą estymację współczynnika erozji. Wyraża się ona wzorem

$$(1) \quad v = 2,22t - 0,197t^2 + 0,08u + 0,0231u^2 + 0,0118r - 4,61.$$

W tablicy 3 podaję porównanie empirycznych współczynników erozji ze współczynnikami obliczonymi według wzoru (1).

Tak więc uzyskałem pożądaną estymację empirycznego współczynnika erozji, wyrażającą się jako funkcja trzech danych mierzonych na mapie. Znaczenie uzyskanego wyniku ograniczone jest do pewnego stopnia charakterem i wielkością mapki użytej do badań, stanowi jednak dowód, że zastąpienie oceny „na oko” przez estymację zależną od wielkości mierzonych na mapie jest możliwe.

Na uwagę zasługuje fakt, że jednym z czynników, od którego uzyskana estymacja w dużym stopniu zależy, jest średnia wysokość trójkąta nad poziomem morza, a więc wielkość nie związana bezpośrednio z kształtem

TABLICA 1

Nr trój- kąta	Oceny rzeczoznawców			Średnia ocen	Nr trój- kąta	Oceny rzeczoznawców			Średnia ocen
	Bac	Ostro- męcki	Renige- równa			Bac	Ostro- męcki	Renige- równa	
	(1)	(2)	(3)			(4)	(5)	(6)	
1	3	4	3	3,33	34	0	1	0	0,33
2	3	4	4	3,67	35	2	3	2	2,33
3	1	3	3	2,33	36	6	6	4	5,33
4	2	5	3	3,33	37	4	5	4	4,33
5	3	5	4	4,00	38	4	4	3	3,67
6	6	6	6	6,00	39	7	6	4	5,67
7	6	5	4	5,00	40	8	8	8	8,00
8	5	6	4	5,00	41	7	7	8	7,33
9	2	3	3	2,67	42	2	2	2	2,00
10	2	2	1	1,67	43	2	2	3	2,33
11	2	1	2	1,67	44	1	1	1	1,00
12	2	3	2	2,33	45	3	1	1	1,67
13	3	5	4	4,00	46	5	6	4	5,00
14	3	3	3	3,00	47	—	6	6	—
15	3	6	4	4,33	48	9	7	9	8,33
16	3	6	4	4,33	49	6	6	4	5,33
17	7	8	5	6,67	50	6	7	5	6,00
18	8	9	7	8,00	51	3	3	3	3,00
19	6	6	5	5,67	52	2	2	2	2,00
20	1	2	1	1,33	53	0	1	1	0,67
21	3	6	3	4,00	54	1	1	2	1,33
22	8	7	7	7,33	55	1	1	2	1,33
23	5	5	4	4,67	56	3	2	3	2,67
24	8	6	7	7,00	57	5	3	4	4,00
25	8	7	8	7,67	58	7	5	7	6,33
26	7	7	7	7,00	59	9	7	9	8,33
27	2	2	2	2,00	60	6	6	6	6,00
28	0	1	2	1,00	61	6	6	5	5,67
29	0	1	0	0,33	62	2	2	2	2,00
30	2	1	2	1,67	63	5	6	5	5,33
31	2	1	1	1,33	64	3	5	3	3,67
32	1	1	1	1,00	65	1	2	1	1,33
33	4	5	3	4,00	66	4	8	5	5,67

TABLICA 2

Nr trój- kąta	Dane mierzone na mapie						Nr trój- kąta	Dane mierzone na mapie					
	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>s</i>		<i>t</i>	<i>u</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>s</i>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	4,2	3	26	2	139	4	34	1,5	2	-38	-59	130	4
2	4,8	4	-41	-55	114	5	35	4,6	6	-98	-203	164	10
3	3,4	3	-3	-29	121	4	36	3,8	5	-98	-11	232	10
4	3,5	5	-10	5	188	7	37	4,1	5	-64	-25	277	10
5	4,6	5	-27	-103	175	7	38	3,1	3	30	24	314	9
6	4,3	5	38	-44	287	9	39	3,3	5	38	-19	318	11
7	3,3	4	20	2	261	8	40	7,4	10	68	41	339	13
8	3,7	5	12	-66	172	8	41	4,7	7	6	-123	239	10
9	2,4	2	8	35	149	4	42	2,4	3	43	7	183	6
10	2,3	3	-15	-21	97	4	43	2,8	4	58	82	175	5
11	2,0	4	5	65	81	4	44	2,3	2	-16	-19	95	3
12	2,8	2	21	39	190	5	45	1,7	3	24	12	204	7
13	3,5	4	-22	-42	147	5	46	4,3	6	-8	-44	275	9
14	3,4	4	-37	12	151	5	47	-	-	-	-	-	10
15	3,0	5	-18	6	196	7	48	5,7	5	91	160	438	12
16	4,1	5	-8	-76	205	8	49	3,6	4	-17	40	341	10
17	4,0	8	32	34	304	12	50	4,0	7	0	12	302	7
18	4,6	11	29	-79	235	18	51	2,7	4	-34	2	219	7
19	3,5	7	-6	-3	212	10	52	2,4	4	-16	-22	182	6
20	2,2	3	-7	-19	-56	5	53	1,7	2	-42	-57	132	4
21	3,8	5	42	45	165	7	54	1,6	3	8	11	135	4
22	4,3	8	98	149	253	10	55	2,5	3	-26	-35	85	3
23	3,5	6	27	54	261	10	56	2,2	4	-31	-19	246	7
24	5,4	7	24	180	332	11	57	3,2	5	-1	-22	308	9
25	4,2	10	-39	-24	234	13	58	3,7	3	38	65	394	11
26	3,9	9	-40	5	264	13	59	4,0	4	6	45	415	12
27	2,5	4	-1	-34	195	7	60	3,9	5	-30	-42	318	11
28	1,9	3	-5	4	246	7	61	4,1	6	-9	6	309	11
29	1,0	3	0	-21	222	7	62	2,8	4	-5	-83	221	7
30	1,9	3	14	-25	244	7	63	4,4	6	52	19	249	9
31	2,1	2	9	39	197	5	64	3,8	5	43	-29	168	7
32	2,0	3	-2	37	147	4	65	2,2	3	-23	-26	124	4
33	3,1	5	29	-10	185	7	66	5,1	11	-74	-14	175	13

TABLICA 3

Nr trójkąta	Współczynnik erozji		Różnica (2) - (3)	Nr trójkąta	Współczynnik erozji		Różnica (2) - (3)
	empiryczny	według wzoru			empiryczny	według wzoru	
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	3,33	3,31	0,02	34	0,33	0,06	0,27
2	3,67	3,51	0,16	35	2,33	4,62	-2,29
3	2,33	2,52	-0,19	36	5,33	4,65	0,68
4	3,33	3,90	-0,57	37	4,33	5,38	-1,05
5	4,00	4,43	-0,43	38	3,67	4,52	-0,85
6	6,00	5,61	0,39	39	5,67	5,26	0,41
7	5,00	4,32	0,68	40	8,00	7,96	0,04
8	5,00	3,87	1,13	41	7,33	5,90	1,43
9	2,67	1,59	1,08	42	2,00	1,17	0,83
10	1,67	1,03	0,64	43	2,33	2,79	-0,46
11	1,67	0,66	1,01	44	1,00	0,82	0,18
12	2,33	0,53	1,80	45	1,67	1,43	0,24
13	4,00	3,14	0,86	46	5,00	5,79	-0,79
14	3,00	3,10	0,10	47	-	-	-
15	4,33	3,52	0,81	48	8,33	7,74	0,59
16	4,33	4,53	-0,20	49	5,33	5,51	-0,18
17	6,67	6,71	-0,04	50	6,00	6,29	-0,29
18	8,00	7,67	0,33	51	3,00	3,19	-0,19
19	5,67	4,85	0,82	52	2,00	1,39	0,61
20	1,33	-0,91	2,24	53	0,67	0,40	0,27
21	4,00	3,86	0,14	54	1,33	0,46	0,87
22	7,33	6,28	1,05	55	1,00	1,14	-0,14
23	4,67	5,07	-0,40	56	2,67	2,89	-0,22
24	7,00	7,16	-0,16	57	4,00	5,04	-1,04
25	7,67	6,98	0,69	58	6,33	5,99	0,34
26	7,00	6,61	0,39	59	8,33	6,67	1,66
27	2,00	2,67	-0,67	60	6,00	5,74	0,26
28	1,00	2,33	-1,33	61	5,67	6,07	-0,40
29	0,33	0,47	-0,14	62	2,00	3,33	-1,33
30	1,67	2,31	-0,64	63	5,33	5,53	-0,20
31	1,33	1,75	-0,42	64	3,67	3,90	-0,23
32	1,00	1,21	-0,21	65	1,33	1,22	0,11
33	4,00	3,50	0,50	66	5,67	7,11	-1,44

trójkąta. Zależność ta wyprowadza nas poza ramy zagadnienia, któreśmy sobie postawili. Nie jest ona bezpodstawna, gdyż wiadomo, że szkody spowodowane przez zinywy zależą od ilości opadów, ilość zaś opadów bardzo silnie zależy od wysokości nad poziomem morza. Świadczy to jednak o tym, że ocena „na oko”, którą staraliśmy się naśladować, uwzględnia nie tylko rzeźbę terenu, ale i pewne czynniki klimatyczne, których ze względu na położenie ocenianego terenu można się spodziewać. Dlatego należałoby we wzorze (1) pominąć przedostatni wyraz, zgodnie z założeniem, że v ma charakteryzować wyłącznie wpływ kształtu powierzchni na erozję. Taka korektura jest ciekawym przykładem ulepszenia wzoru empirycznego bez interwencji teorii.

Praca cytowana

[1] J. Ostromięcki, *Erozja gleb jako zagadnienie melioracyjne*, Gospodarka Wodna 7 (1947), str. 192-201; 7 (1947), str. 247-250.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 8. 3. 1955 r.

С. ВУБЖИЦКИЙ (Вроцлав)

ПОПЫТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА К РЕЛЬЕФУ КАК ФАКТОРУ ЭРОЗИИ

РЕЗЮМЕ

Автор разрабатывает метод оценки степени угрозы эрозии, вызванной пересеченностью местности. Задача состоит в определении формулы, зависящей от нескольких параметров, которые можно измерит на гипсометрической карте, и позволяющую оценивать угрозу эрозии для основных площадей определенной величины и формы.

Для обработки были избраны карты масштаба 1 : 25 000 с частотой изогипс 10 м. За основные площади принято равносторонние треугольники с длиной стороны 2 км. Исходным материалом была карта, содержащая 65 треугольников, для которых степень угрозы эрозии была оценена независимо друг от друга тремя экспертами цифрами от 0 до 9. Среднюю этих оценок автор называет *эмпирическим коэффициентом эрозии* и принимает за фактическую угрозу для данного треугольника. Автором дается формула

$$v = 2,22t^2 - 0,197t^3 + 0,08u + 0,0213u^2 + 0,0118r - 4,61,$$

в которой v обозначает коэффициент эрозии, t — длину в дм всех изогипс в треугольнике, u — количество изогипс с разными координатами, r уменьшенную о 800 сумму координат четырех точек треугольника, а именно координат центров

треугольников, полученных путем деления исследуемого треугольника на четыре части средними линиями. Полученные по этой формуле результаты лучше согласуются с эмпирическим коэффициентом эрозии, чем оценки экспертов. Эта формула может заменить применяемую практиками оценку угрозы эрозии на основании осмотра гипсометрической карты.

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

*AN ATTEMPT AT MATHEMATICAL TREATMENT OF RELIEF
AS AN EROSION FACTOR*

SUMMARY

The author develops a method of estimating, for a given area, the danger of erosion arising from land configuration. His object is to find a formula, dependent on a number of parameters measurable on a contour-line map, which would estimate erosion danger to tracts of fixed size and shape. He uses maps 1:25 000, the contour-lines being 10 meters apart; equilateral triangles whose side is 2 km, are taken as tracts. The starting point has been a map comprising 65 triangles, marked independently by three experts with numbers from 0 to 9, according to their liability to erosion due to the relief. The mean of those three assessments, called by the author *the empirical coefficient of erosion*, is taken to be the real danger to the triangle. The author gives the formula

$$v = 2,22t - 0,197t^2 + 0,08u + 0,0213u^2 + 0,0118r - 4,61,$$

in which v is the erosion coefficient; t is the length of all contour-lines in the triangle given in dcm; u is the number of contour lines with different ordinates in the triangle; r is the sum, diminished by 800, of the ordinates of four points in the triangle, namely the ordinates of the centres arising from a division of the triangle into four parts by means of straight lines joining the centres of its sides. This formula expresses the empirical erosion coefficient with an error less than the divergence of the assessments of the experts. The use of this formula can replace the practice of estimating the erosion danger of an area on the basis of a visual inspection of a contour-line map.
