

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

O SZACOWANIU PARAMETRÓW ZŁÓŻ GEOLOGICZNYCH

Wstęp. Praca niniejsza jest krokiem ku realizacji programu nakreślonego w referacie H. Steinhausa, wygłoszonym na 8. Zjeździe Matematyków Polskich (zob. [11], str. 87).

Współpraca matematyków wrocławskich z geologami zaczęła się, gdy zaproszony z inicjatywy H. Steinhausa, przez Wrocławski Oddział Polskiego Towarzystwa Matematycznego, A. Trembecki z Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie wygłosił w czerwcu 1952 r. odczyt o metodach szacowania złóż (zob. [12]). W jesieni 1952 r. nawiązano współpracę między katedrą geologii kopalnianej AGH kierowaną przez prof. R. Krajewskiego a Grupą Zastosowań Przyrodniczych i Gospodarczych IM PAN kierowaną przez prof. H. Steinhausa. Prof. Krajewski przedstawił na seminarium Grupy referat o aktualnym stanie zagadnienia (zobacz [6]), wielokroć służył radą i informacją o sprawach geologicznych i górniczych, aż do zorganizowania wycieczki do kopalni dla matematyków pracujących nad tym zagadnieniem, wreszcie wystarał się o materiały obserwacyjne (mapki, patrz § 6) i zorganizował na wniosek Grupy potrzebne pomiary (stumetrówka, patrz § 6) wykonane przez kopalniane biuro geologiczne kierowane przez inż. W. Piwowarskiego. Te materiały, opracowane częściowo przez grupę osób, zwaną dalej (§ 6) roboczą grupą statystyczną, wykorzystałem w niniejszej pracy.

Praca została wykonana w Grupie Zastosowań Przyrodniczych i Gospodarczych IM PAN. Muszę jednak przyznać, że jej powstanie było w pierwszorzędnej mierze ułatwione przez mój długotrwały udział w konsultacjach z teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych, prowadzonym w Grupie Funkcji Rzeczywistych IM PAN przez profesorów E. Marczewskiego i H. Steinhausa.

§ 1. Zagadnienie. Eksploatatora złóż geologicznych interesują niektóre cechy złoża, np. miąższość, zawartość cennego kruszcu, zawartość szkodliwych domieszek. Wielkości te nazywać będziemy *parametrami złoża*. Parametry złoża ocenia się na podstawie wyników wiercení próbných lub, gdy złożo jest już udostępnione przez sieć korytarzy, na podstawie prób brzdowych lub rowkowych. Najprostszą oceną parametru złoża jest

średnia arytmetyczna otrzymanych wyników prób. W piśmiennictwie fachowym podaje się jeszcze wiele innych ocen. Tak np. Hancock (zob. [9], str. 261) proponuje jako ocenę średnią geometryczną, Sichel ([9], str. 266, wzór (4)) — iloczyn średniej geometrycznej przez czynnik zależny od wariancji parametru w próbie, Böldyriew [1] — średnią ważoną. W tym ostatnim przypadku jako wagi próbek bierze się pola obszarów, na jakie rozpada się badany obszar przez przyłączenie każdego punktu tego obszaru do najbliższego miejsca pobrania próbki. Smirnow (zob. [10], str. 70 i następne) podaje w swojej książce osiem różnych ocen. Wszystkie te oceny albo nie uwzględniają rozmieszczenia próbek (np. średnia geometryczna, arytmetyczna, Sichela), albo uwzględniają je tylko w pewien konwencjonalny sposób (np. ocena Böldyriewa, trójkątowa, warstwicowa).

Ta wielka ilość wariantów świadczy o poszukiwaniu takiej oceny, która by na podstawie poczynionych obserwacji dawała najdokładniejszą ocenę parametrów złoża. Wydaje się, że taka optymalna ocena powinna uwzględniać rozmieszczenie próbek w sposób podyktowany przez strukturę badanego złoża. Można np. przypuszczać, że dwie próbki pobrane blisko siebie charakteryzują badany obszar gorzej, niż dwie próbki pobrane daleko od siebie. W pierwszym bowiem przypadku druga próbka jest po prostu powtórzeniem pierwszej, podczas gdy w drugim przypadku daje ona nową informację. Dzieje się tak dlatego, że parametr złoża zmienia się w sposób do pewnego stopnia ciągły. Gdy w pewnym punkcie badany parametr ma dużą wartość, wtedy także w pewnym otoczeniu tego punktu wartości badanego parametru są duże. Podobnie z dwu prób, z których jedna jest zrobiona na środku badanego obszaru, a druga na brzegu, pierwsza jest cenniejsza.

Celem niniejszej pracy jest podanie metody opartej na teorii procesów stochastycznych, która pozwala wykorzystać przy szacowaniu informacji o statystycznej strukturze złoża. Na gruncie wspomnianej teorii statystyczna struktura złoża jest opisana (§ 2) przez pewne stałe oraz funkcję korelacyjną podającą korelację między próbkami w zależności od ich odległości. Stałe te oraz funkcję korelacyjną trzeba w konkretnym przypadku, dla danego typu złoża i dla danego parametru, wyestymować na podstawie prób. Zagadnieniom związanym z estymowaniem funkcji korelacyjnej poświęcone są §§ 3, 4, 5 i 7. W § 9 opisano różne oceny oraz sposoby obliczania tych ocen i ich błędów. W § 12 omówiono przypadki, w których obliczanie ocen znacznie się upraszcza.

Przedstawioną metodę zastosowano do opracowania materiałów z górnośląskich złóż cynkowych, dotyczących zawartości cynku. I tak, w § 6 opisano sposób obliczania współczynników korelacji między próbkami. W § 8 wyrównano obliczone współczynniki korelacji za pomocą funkcji

zaproponowanych w § 5. Tak wyestymowaną funkcję korelacyjną przyjęto za podstawę przykładów numerycznych (§ 10) ilustrujących dokładność najlepszych ocen w porównaniu z innymi.

Przedstawionych w §§ 6 i 8 wyników estymacji funkcji korelacyjnej złoża nie można uważać za wystarczające. W szczególności bardzo różne okazały się wyniki otrzymane z mapek w porównaniu z otrzymanymi ze stumetrówki (patrz rys. 1). Pewne hipotezy tłumaczące tę różnicę przedstawiono w § 13, gdzie przedstawiono także projekty dalszych badań.

W niektórych pracach geologów (zobacz np. [7] i [12]) przy szacowaniu zasobów używa się kryterium t Studenta. Kryterium to wymaga, żeby próbki były niezależne. Okazuje się, że dla zawartości cynku, sądząc na podstawie wyników otrzymanych z mapek, za niezależne można uważać próbki dopiero wtedy (§ 12), gdy są wzajemnie odległe o więcej niż 184 metry.

W pracy niniejszej będziemy mówili tylko o wyznaczaniu optymalnych ocen, gdy obszar i rozmieszczenie na nim próbek są podane. Nie ma dotychczas dostatecznie prostej metody, która by pozwalała, przy znajomości statystycznej struktury złoża, odpowiedzieć na pytanie, gdzie na danym obszarze umieścić żadaną ilość próbek, aby uzyskać ocenę jak najlepszą. Można jednak obliczając błędy ocen przy różnych rozmieszczeniach próbek, wybierać rozmieszczenia korzystniejsze.

§ 2. Matematyczny opis struktury złoża. Szacowanie parametru złoża na podstawie próbek, to znaczy na podstawie znajomości wartości tego parametru w pewnych punktach złoża, z matematycznego punktu widzenia sprowadza się, z grubsza mówiąc, do szacowania sumy zmiennych losowych zależnych, gdy znane są wartości niektórych składników.

Zadanie, którym się zajmujemy, jest takie: Dany jest obszar D , o którym wiadomo, że leży wewnątrz konturu złoża. Może to być na przykład blok eksploatacyjny, otoczony ze wszystkich stron korytarzami. W punktach p_1, p_2, \dots, p_k tego obszaru D zmierzono wielkość parametru y i otrzymano z pomiarów liczby $y(p_1) = y_1, \dots, y(p_k) = y_k$. Znając liczby y_1, \dots, y_k i położenie punktów p_1, \dots, p_k na obszarze D , należy optymalnie oszacować średnią wartość parametru y na obszarze D , wyrażającą się wzorem

$$(2.1) \quad \eta = \eta(D) = \frac{1}{|D|} \int_D y(p) dp,$$

($|D|$ oznacza pole obszaru D , $y(p)$ — wartość rozważanego parametru w punkcie p , a dp — różniczkę pola) lub, co na jedno wychodzi, całkę

$$(2.2) \quad Y = Y(D) = \int_D y(p) dp.$$

Jeśli rozważanym parametrem jest np. miąższość, to całka Y jest objętością złoża na obszarze D , a średnia η — miąższością średnią.

Mogłaby się czytelnikowi nasunąć wątpliwość, czy zawsze chodzi o taką średnią, jak opisana wzorem (2.1). Nie należałoby np. średniować w ten sposób procentowej zawartości, gdybyśmy potem chcieli przez pomnożenie ogólnej masy rudy przez średnią procentową zawartość otrzymać zapas metalu, szczególnie, gdyby występował wyraźny związek między procentową zawartością a miąższością złoża. Wtedy jednak należałoby średniować iloczyny względnej zawartości przez miąższość, a więc średniować inny parametr. W pewnych przypadkach można by jednak usprawiedliwić średniowanie procentowej zawartości, np. gdy miąższość (czytaj tu: masa rudy przypadająca na jednostkę powierzchni) jest stała lub gdy miąższość i procentowa zawartość są stochastycznie niezależne.

Wartości $y(p)$ parametru w poszczególnych punktach obszaru D będziemy traktowali jako zmienne losowe. Należy to rozumieć tak: złoże nie jest wprawdzie czymś losowym, wartości jego parametrów w ustalonym punkcie są ustalone. Położenie obszaru D względem tego ustalonego złoża może być rozmaite i można je uważać za losowe. Wyobraźmy sobie, że kontur obszaru D ustawiamy w coraz to innym miejscu i za każdym razem notujemy wartości parametru w punktach p sztywno z nim związanych. Wtedy wartość parametru w punkcie p będzie zależała od położenia konturu D . W tym właśnie sensie, że względu na rozmaitość położen, wartości $y(p)$ parametru będziemy uważali za zmienne losowe. Gdy zaś kontur ustawimy w jakimś konkretnym miejscu, wtedy aktualne wartości parametru w punktach p związanych sztywno z konturem będziemy uważali za realizacje zmiennych losowych $y(p)$. W dalszym ciągu mówiąc o wartościach $y(p)$ jako o zmiennych losowych, tę właśnie interpretację będziemy mieli na myśli. Taki sens losowości odpowiada praktycznemu zadaniu, w którym chodzi o szacowanie rozmaitych odcinków złoża.

Mamy tu więc do czynienia z rodziną zmiennych losowych „ponumerowanych” punktami obszaru D . O tych zmiennych losowych zakładamy co następuje: wszystkie zmienne losowe $y(p)$ mają jednakową średnią $E\{y(p)\} = m$ i jednakową wariancję $D^2\{y(p)\} = s^2$; współczynnik korelacji $R\{y(p_1), y(p_2)\}$ między zmiennymi $y(p_1)$ i $y(p_2)$ zależy tylko od odległości $d(p_1, p_2)$ punktów p_1 i p_2 , czyli

$$(2.3) \quad R\{y(p_1), y(p_2)\} = f(d(p_1, p_2))$$

i funkcję $f(d)$ uważamy za znaną; ponadto zakładamy, że $\lim_{d \rightarrow 0} f(d) = 1$.

Innymi słowy, złoże traktujemy tu jako rodzinę zmiennych losowych $y(p)$ przypisanych poszczególnym punktom p obszaru D , na którym ono zalega. Przyjmujemy, że te zmienne losowe są ze sobą związane w taki

sposób, że współczynnik korelacji między zmiennymi losowymi $y(p_1)$ i $y(p_2)$ zależy tylko od odległości punktów p_1 i p_2 . W ten sposób przyjmujemy założenie, że złóż ma strukturę izotropową, niezależną od kierunku. W definicji procesu stacjonarnego żąda się, żeby współczynnik korelacji między zmiennymi losowymi $y(p_1)$ i $y(p_2)$ zależał tylko od wektora $\overline{p_1 p_2}$, łączącego punkty p_1 i p_2 , czyli żeby było

$$(2.4) \quad R(y(p_1), y(p_2)) = f(\overline{p_1 p_2}) = f(x, y),$$

gdzie przez x i y oznaczamy współrzędne wektora $\overline{p_1 p_2}$ w obranym układzie współrzędnych. Funkcją korelacyjną płaskiego procesu stochastycznego stacjonarnego nazywa się właśnie tę funkcję $f(x, y)$ ze wzoru (2.4). My od funkcji korelacyjnej żądamy więcej, mianowicie żeby zależała tylko od długości $d = d(\overline{p_1 p_2}) = d(p_1, p_2)$ wektora $\overline{p_1 p_2}$, rozpatrujemy więc szczególny przypadek płaskiego stacjonarnego procesu stochastycznego, tzw. *proces izotropowy*.

Uczynione założenie jednakowości średnich i wariancji wyłącza z naszych rozważań przypadki, w których chodzi o szacowanie jakiegoś małego gniazda kruszcu o mniej więcej znanym geometrycznym kształcie, które całe znajduje się w obszarze D . Właściwym przedmiotem naszych rozważań jest szacowanie odcinków złoża, które na wielkich przestrzeniach mają mniej więcej taką samą strukturę, a obszar D w porównaniu z całym złożem jest mały. Także założenie izotropowości nie we wszystkich złożach można uważać za spełnione. Jest jednak wiele złóż, przede wszystkim osadowych, które zalegają na wielkich przestrzeniach i w których nie stwierdza się zależności struktury od kierunku. Do takich należą np. górnośląskie złoża cynkowo-olowiane, z których pochodzą obserwacje opracowane w niniejszej pracy.

A więc złóż będziemy traktowali jako płaski proces stochastyczny, stacjonarny i izotropowy.

Całką Y , którą tu chcemy oszacować, jest zmienną losową, którą należy rozumieć jako stochastyczną granicę odpowiednio utworzonych kombinacji liniowych zmiennych $y(p)$, odpowiadających poszczególnym punktom obszaru D . Wyobraźmy sobie podział obszaru D na n kawałków o polach $\Delta_1, \dots, \Delta_n$; w i -tym kawałku wybierzmy jeden punkt q_i i utwórzmy sumę

$$(2.6) \quad y(q_1) \Delta_1 + \dots + y(q_n) \Delta_n.$$

Jest ona kombinacją liniową zmiennych losowych odpowiadających punktom q_1, q_2, \dots, q_n . Weźmy teraz ciąg takich kombinacji liniowych dla normalnego ciągu podziałów obszaru D . Otóż zmienną Y rozumiemy jako stochastyczną granicę takich kombinacji liniowych.

Z takiego sensu zmiennej Y wynikają w szczególności następujące wzory na wartość oczekiwaną $E(Y)$ zmiennej Y , kowariancję $\omega(y(p), Y)$ zmiennej Y i zmiennej $y(p)$ odpowiadającej jednemu punktowi p z obszaru D oraz wariancję $\omega(Y, Y) = D^2(Y)$:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_D E(y(p)) dp = m|D|, \\ (2.5) \quad \omega(y(p), Y) &= \int_D \omega(y(p), y(q)) dq, \\ \omega(Y, Y) &= \int_D \int_D \omega(y(p), y(q)) dp dq. \end{aligned}$$

Ponieważ na mocy (2.3) mamy $\omega(y(p_1), y(p_2)) = s^2 f(d(p_1, p_2))$, więc wszystkie wielkości w (2.6) wyrażają się przez m , s^2 i $f(d)$. Funkcja korelacyjna $f(d)$ opisuje tu zmienność złoza.

Tak więc zadaniem naszym jest szacowanie całki Y — granicy sum zmiennych losowych — gdy znamy wartości zmiennych losowych $y(p_1), \dots, y(p_k)$ związanych w pewien sposób ze „składnikami” $y(p)$ „sumy” Y , z kolei powiązanymi ze sobą.

§ 3. Jakie funkcje mogą być funkcjami korelacyjnymi? W poprzednim paragrafie rozważania prowadziliśmy przy założeniu, że znamy m — tj. wspólną średnią zmiennych losowych $y(p)$, że znamy s^2 — tj. ich wspólną wariancję, i wreszcie, że znamy główną charakterystykę zmienności złoza — funkcję korelacyjną $f(d)$. Znajomość tych parametrów musimy jednak zdobyć z obserwacji, wobec czego faktycznie możemy te charakterystyki znać tylko w przybliżeniu. W szczególności dotyczy to funkcji korelacyjnej. Funkcję tę, z definicji określoną dla każdego d , możemy odtwarzać znając tylko w przybliżeniu jej wartości dla niektórych odległości d . Dlatego musimy te zaobserwowane i przy tym obciążone błędem losowym współczynniki korelacji w pewien sposób wyrównać. Najwygodniej zrobić to, gdy założymy dla funkcji korelacyjnej jakąś postać, z której funkcję korelacyjną otrzymuje się przez ustalenie pewnych parametrów. Dopasowujemy wówczas funkcję wybranej postaci do zaobserwowanych dla pewnych d współczynników korelacji i tę dopasowaną funkcję przyjmujemy za funkcję korelacyjną złoza. Powstaje pytanie, jaką postać można przyjąć dla funkcji korelacyjnej? Innymi słowy: jakie funkcje mogą być funkcjami korelacyjnymi?

Nie mogą to być funkcje dowolne. Poza ciągłością, która jest konsekwencją tego, że $\lim_{d \rightarrow 0} f(d) = 1$, muszą one spełniać jeszcze pewne warunki.

Na przykład dla każdego d musi być $f(d) \geq -\frac{1}{2}$. Istotnie, wariancja sumy $y(p_1) + y(p_2) + y(p_3)$ trzech zmiennych losowych, odpowiadających trzem

punktom p_1, p_2, p_3 będącym wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku d , musi być z definicji nieujemna. Mamy zaś

$$D^2(y(p_1) + y(p_2) + y(p_3)) = 3D^2(y(p_1)) + 6\omega(y(p_1), y(p_2)) = 3s^2(1 + 2f(d)).$$

Z nierówności $3s^2(1 + 2f(d)) \geq 0$ wynika, że $f(d) \geq -\frac{1}{2}$.

Otóż znane są warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja mogła być funkcją korelacyjną. W szczególności na to, aby funkcja $f(d)$ mogła być funkcją korelacyjną płaskiego procesu stochastycznego ciągłego i izotropowego, potrzeba i wystarcza, żeby była ona postaci

$$(3.1) \quad f(d) = \int_0^\infty J_0(\lambda d) dF(\lambda),$$

gdzie $F(\lambda)$ jest dystrybucją taką, że $F(0) = 0$, a $J_0(x)$ jest funkcją Bessla ze wskaźnikiem 0 (zob. [5], str. 69, wzór (3.26)).

§ 4. Proces stochastyczny ruchomego całkowania. Operowanie wzorem (3.1) jest uciążliwe. Funkcję korelacyjną ustala się tu przez zadanie dystrybucji, a gdy dystrybucja jest już zadana, to jeszcze dla wyznaczenia wartości funkcji $f(d)$ potrzebne jest całkowanie. Nam zaś wystarczy znać kilka szczególnych postaci funkcji korelacyjnej, w których ustala się ją przez zadanie pewnych parametrów. To umożliwia dopasowanie takiej funkcji do wyników obserwacji, dopasowanie bowiem sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości parametru czy parametrów. Celem naszym jest wyznaczenie kilku takich postaci. Do tego podejmiemy nie od strony wzoru (3.1), ale od strony procesów specjalnego rodzaju, analogicznych do procesów ruchomego sumowania w przypadku procesów stacjonarnych z czasem dyskretnym (zob. np. [13], § 10.2). Obecnie opiszemy te procesy.

W przypadku procesów z czasem dyskretnym ciąg stacjonarny

$$(4.1) \quad \dots, y(-1), y(0), y(1), \dots$$

ruchomych średnich lub ruchomego sumowania konstruuje się wychodząc z ciągu

$$(4.2) \quad \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots$$

zmiennych losowych niezależnych i mających jednakowe rozkłady. Na przykład dla ruchomych średnich przyjmuje się z definicji

$$(4.3) \quad y(k) = \frac{1}{n} \{x(k-1) + \dots + x(k-n)\}$$

lub ogólniej:

$$(4.4) \quad y(k) = c_1 x(k-1) + \dots + c_n x(k-n),$$

gdzie nieujemne liczby c_1, \dots, c_n mają sumę 1. Łatwo wtedy sprawdzić, że zmienne $y(i)$, $i = 0, +1, -1, +2, -2, \dots$, określone wzorem (4.3) lub (4.4), mają jednakowe średnie i jednakowe wariancje, a współczynnik korelacji między dwiema zmiennymi $y(i_1)$ i $y(i_2)$ zależy tylko od modułu różnicy wskaźników. Funkcja korelacyjna $f(|i_1 - i_2|) = R(y(i_1), y(i_2))$ jest tu całkowicie wyznaczona przez współczynniki c_1, \dots, c_n .

W opisanym na początku § 2 przypadku dyskretnym moglibyśmy postąpić tak: Przypuśćmy, że całe złoże jest podzielone na trójkąty równoboczne, wszystkie jednakowej wielkości, i przypuśćmy na chwilę, że złoże rozciąga się na całą płaszczyznę. Niech poszczególne trójkąty będą w jakiś sposób ponumerowane liczbami naturalnymi (niech np. trójkąty o numerach od 1 do N tworzą obszar nas interesujący). Niech $x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych i o jednakowym rozkładzie, i niech zmienna $x(i)$ będzie przypisana trójkątowi o numerze i . Wtedy, przez analogię do ruchomej średniej, moglibyśmy wziąć za zmienną $y(i)$, reprezentującą badany parametr złoża w i -tym trójkącie, sumę

$$(4.5) \quad y(i) = \sum_{a(i,j) < O} x(j),$$

to znaczy sumę zmiennych $x(j)$ odpowiadających trójkątom, których środek jest odległy od środka i -tego trójkąta o mniej niż ustalona liczba O . Moglibyśmy też brać w sumie (4.5) zmienne $x(j)$ ze współczynnikami zależnymi od odległości środka j -tego trójkąta od środka i -tego trójkąta.

Przejdźmy do interesującego nas przypadku ciągłego. Nie ma tu prostego odpowiednika ciągu (4.2) w postaci, powiedzmy, zmiennych losowych ponumerowanych punktami płaszczyzny, mających jednakowe rozkłady i takich, że zmienne odpowiadające różnym punktom są niezależne. Jako taki odpowiednik weźmiemy płaski proces stochastyczny jednorodny o przyrostach niezależnych. Można go opisać tak: Każdemu zbiorowi borelowskiemu G (w szczególności każdemu obszarowi) na płaszczyźnie przypisana jest zmienna losowa $Y(G)$; mamy więc rodzinę zmiennych losowych ponumerowanych zbiorami borelowskimi z płaszczyzny. Przyjmujemy, że zbiorom o skończonym polu przypisane są zmienne losowe o skończonej średniej i skończonej wariancji. Przyjmujemy ponadto, że jeśli $G = G_1 + G_2$ i zbiory G_1 i G_2 są rozłączne, to $Y(G) = Y(G_1) + Y(G_2)$. Przez jednorodność rozumiemy tu, że zbiorom o jednakowych polach przypisane są zmienne losowe o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwa. Przyrosty niezależne oznaczają, że zmienne losowe $Y(G_1)$ i $Y(G_2)$ są niezależne, skoro tylko zbiory G_1 i G_2 są rozłączne.

Tak opisana rodzina zmiennych losowych jest ciągłym odpowiednikiem przypadku dyskretnego opisanego wyżej — z tym, że w przypadku dyskretnym trójkąty, na jakie jest podzielone złoż, są uważane za najmniejsze, już niepodzielne zbiory, a każdy zbiór, któremu jest przypisana zmienna losowa, musi być sumą pewnej skończonej liczby takich niepodzielnych trójkątów; takiej sumie niepodzielnych trójkątów przyporządkowuje się oczywiście sumę zmiennych losowych przypisanych trójkątom składającym się na tę sumę. Proces opisany przez sumy (4.5) — analogon procesu ruchomych średnich — będzie w tym ujęciu rodziną zmiennych losowych przypisanych zbiorom trójkątów niepodzielnych ustalonego kształtu i wielkości, np. zbiorom składającym się z trójkąta środkowego i jego trzech sąsiadów graniczących z nim bokami.

Niech teraz $Y(G)$ będzie płaskim procesem stochastycznym jednorodnym o przyrostach niezależnych w sensie powyżej sprecyzowanym. Stacjonarny proces ruchomego całkowania, $y(p)$, konstruujemy teraz tak: Bierzemy funkcję rzeczywistą $k(x, y) = k(p)$, określoną na płaszczyźnie, ciągłą, całkowalną bezwzględnie na całej płaszczyźnie wraz z kwadratem i spełniającą następujący warunek symetrii:

$$(S) \quad \text{Jeśli } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2, \text{ to } k(x_1, y_1) = k(x_2, y_2).$$

Dla wygody, przez $k(p - p_0)$ będziemy rozumieli $k(x - x_0, y - y_0)$, gdy $p = (x, y)$, a $p_0 = (x_0, y_0)$. Dowolnemu punktowi p_0 płaszczyzny przypisujemy teraz zmienną losową

$$(4.6) \quad y(p_0) = \iint k(p - p_0) Y(dp)$$

(jeżeli nie są podane granice całkowania, należy rozumieć, że całkowanie rozciąga się na całą płaszczyznę). Proces określony wzorem (4.6) będziemy nazywali *procesem ruchomego całkowania*, a funkcję $k(p)$ nazwiemy *pro wizorycznie jego funkcją wagową*.

Musimy wyjaśnić sens całki (4.6). Przypuśćmy najpierw, że obszar całkowania jest ograniczony, np. że jest to pewien prostokąt D . Niech ten prostokąt będzie podzielony na rozłączne obszary D_1, \dots, D_n . W obszarze D_i wybierzmy jeden punkt p_i i utwórzmy sumę

$$(4.7) \quad k(p_1 - p_0) Y(D_1) + \dots + k(p_n - p_0) Y(D_n).$$

Jest to pewna zmienna losowa. Otóż przez całkę (4.6) po obszarze D rozumiemy granicę stochastyczną zmiennych losowych (4.7) odpowiadających normalnemu ciągowi podziałów obszaru D . Przez całkę (4.6) rozciągniętą na całą płaszczyznę rozumiemy stochastyczną granicę całek (4.6) rozciągających się na coraz większe ograniczone obszary $G_1 \subset G_2 \subset \dots$,

które w sumie pokrywają całą płaszczyznę. Zauważmy tutaj, że jeśli $k(p) = 1$, to dla obszaru G o skończonym polu jest

$$(4.8) \quad \iint k(p) Y(dp) = Y(G).$$

Z definicji procesu $Y(G)$ wynika, że istnieją takie stałe k_1 i $k_2 \geq 0$, że

$$(4.9) \quad E(Y(G)) = k_1 |G|,$$

$$(4.10) \quad D^2(Y(G)) = k_2 |G|,$$

gdzie $|G|$ oznacza pole obszaru G .

Z definicji (4.6) zmiennych $y(p_0)$ wynikają następujące relacje:

I. Dla każdego p_0 jest

$$(4.11) \quad E(y(p_0)) = k_1 \iint k(p) dp = m,$$

$$(4.12) \quad D^2(y(p_0)) = k_2 \iint k^2(p) dp = s^2$$

(stałe k_1 i k_2 są tu te same, co we wzorach (4.9) i (4.10)).

II. Dla dowolnych p_1 i p_2 jest

$$(4.13) \quad E(y(p_1) - E(y(p_1))(y(p_2)) - E(y(p_2))) = \\ = k_2 \iint k(x, y) k(x + d(p_1, p_2), y) dx dy,$$

$$(4.14) \quad R\{y(p_1), y(p_2)\} = \frac{\iint k(x, y) k(x + d(p_1, p_2), y) dx dy}{\iint k^2(x, y) dx dy} = R\{d(p_1, p_2)\}$$

($d(p_1, p_2)$ jest to odległość punktów p_1 i p_2).

Wzory (4.11) i (4.12) pokazują, że średnia i wariancja jest dla wszystkich zmiennych $y(p)$, określonych wzorem (4.6), taka sama, a wzór (4.13) pokazuje, że współczynnik korelacji między zmiennymi $y(p_1)$ i $y(p_2)$, przypisanymi według wzoru (4.6) punktom p_1 i p_2 , zależy tylko od odległości tych punktów. Z tego wynika, że *proces ruchomego całkowania jest procesem stacjonarnym w sensie § 2*. Proces ruchomego całkowania jest zadany przez stałe k_1 i k_2 oraz funkcję $k(x, y)$. W szczególności charakteryzująca strukturę złoza funkcja korelacyjna zależy tylko od funkcji $k(x, y)$, jak to pokazuje wzór (4.14). Wzoru (4.14) użyjemy do wyznaczenia kilku szczególnych postaci funkcji korelacyjnej.

§ 5. Kilka szczególnych postaci funkcji korelacyjnej. W paragrafie poprzednim zobaczyliśmy, że dla specjalnych procesów stacjonarnych, mianowicie dla procesów ruchomego całkowania, funkcja korelacyjna

procesu jest wyznaczona przez jego funkcję wagową $k(x, y)$. Biorąc najprostsze funkcje za $k(x, y)$ wyznaczymy teraz kilka postaci szczegółowych funkcji korelacyjnej.

PRZYKŁAD 1. Weźmy za $k(x, y)$ funkcję

$$(5.1) \quad k(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy, na mocy wzoru (4.14), wartość funkcji korelacyjnej $R(d)$ w punkcie d będzie równa ilorazowi pola części wspólnej dwóch kół o promieniu r , których środki są odległe o d , przez pole koła o promieniu r . Nietrudne rachunki prowadzą w tym przypadku do następującego wzoru na funkcję korelacyjną:

$$(5.2) \quad R(d) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \frac{d}{2r} - \frac{d}{2r} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2r}\right)^2} \right\} & \text{dla } d \leq 2r, \\ 0 & \text{dla } 2r \leq d. \end{cases}$$

Funkcja korelacyjna zależy tu od jednego parametru r .

PRZYKŁAD 2. Chcę zwrócić uwagę na pewną intuicję, dotyczącą funkcji $k(x, y)$, a polegającą na odpowiednim odczytaniu wzoru (4.6). Mianowicie, z dokładnością do przejścia granicznego przy całkowaniu, można wzór (4.6) odczytać tak: wartość parametru złoża w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$ powstała w ten sposób, że ktoś spacerując po całej płaszczyźnie z każdego punktu $p_1 = (x_1, y_1)$ rozrzucał losowo na płaszczyznę garść złoża równą $mY(dp)$ i ta garść rozsypywała się po płaszczyźnie symetrycznie wokół punktu p z rozkładem proporcjonalnym do funkcji $k(p - p_1)$, a dokładniej tak, że na obszar wielkości dp wokół jakiegoś punktu p upadła z tej garści frakcja

$$\frac{k(p - p_1) dp}{\iint k(p) dp}.$$

Kierując się tą intuicją J. Perkal zaproponował wziąć za funkcję wagową $k(x, y)$ gęstość prawdopodobieństwa płaskiego rozkładu normalnego. Współczynniki proporcjonalności, czyniące z funkcji wykładniczej gęstość prawdopodobieństwa, można opuścić, bo po podstawieniu do wzoru (4.14) i tak by się uprościły. Przyjmijmy więc

$$(5.3) \quad k(x, y) = \exp \left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2s^2} \right).$$

Podstawiając (5.3) do licznika wzoru (4.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad & \iint k(x, y) k(x+d, y) dx dy = \\
 & = \iint \exp(-(k^2 + y^2)/2s^2) \exp(-((x+d)^2 + y^2)/2s^2) dx dy = \\
 & = \iint \exp(-\{2(x^2 + xd + \frac{1}{2}d^2 + y^2) + \frac{1}{2}d^2\}/2s^2) dx dy = \\
 & = \exp(-d^2/4s^2) \iint \exp(-\{(x + \frac{1}{2}d)^2 + y^2\}/s^2) dx dy = \\
 & = \exp(-d^2/4s^2) \iint \exp(-(x^2 + y^2)/s^2) dx dy;
 \end{aligned}$$

podstawiając (5.3) do mianownika wzoru (4.14) otrzymamy

$$(5.5) \quad \iint k^2(x, y) dx dy = \iint \exp(-(x^2 + y^2)/s^2) dx dy.$$

Wzory (5.4) i (5.5) dają następującą postać funkcji korelacyjnej:

$$(5.6) \quad R(d) = \exp(-d^2/4s^2).$$

Funkcja ta zależy od parametru s .

PRZYKŁAD 3. H. Steinhaus zaproponował następującą postać funkcji korelacyjnej, która zaleca się swoją prostotą:

$$(5.7) \quad R(d) = e^{-Ad},$$

gdzie $A > 0$ jest parametrem do wyznaczenia. Wiadomo, że funkcja ta może być funkcją korelacyjną procesu stacjonarnego z czasem ciągłym (zob. [5], str. 52, wzór (2.125)), to jest dla rodziny zmiennych losowych $y(t)$ ponumerowanych liczbami rzeczywistymi t .

Aby udowodnić, że funkcja (5.7) może być funkcją korelacyjną, posłużymy się twierdzeniem (zob. [5], str. 67), które orzeka, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby funkcja $f(x, y)$ mogła być funkcją korelacyjną płaskiego procesu stochastycznego, jest jej przedstawialność w postaci

$$(5.8) \quad f(x, y) = \iint \exp(i(xu + yv)) dG(u, v) \quad (1),$$

gdzie $G(u, v)$ jest pewną dystrybuantą dwuwymiarową, czyli, innymi słowy, żeby była funkcją charakterystyczną pewnego płaskiego rozkładu prawdopodobieństwa.

Wzór (3.3) jest wariantem tego warunku dla procesów izotropowych.

(1) Gdy nie podaje granic całkowania, należy rozumieć, że całkowanie rozciąga się na całą płaszczyznę.

Gdy dystrybuanta $G(u, v)$ ma gęstość $g(u, v)$, a tak jest, gdy funkcja $f(x, y)$ dostatecznie szybko znika w nieskończoności, można wzór (5.8) napisać w postaci

$$(5.9) \quad f(x, y) = \iint \exp(i(xu + yv)) g(u, v) du dv.$$

Dla rozstrzygnięcia interesującego nas pytania wystarczy więc wyznaczyć dla funkcji (5.7), to jest dla funkcji

$$(5.10) \quad \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}),$$

transformatę $g(u, v)$ i przekonać się, czy jest ona gęstością prawdopodobieństwa.

Mamy (zob. [3], str. 658, wzory na transformacje Fouriera funkcji dwóch zmiennych; por. też [2], wzory (10.6.3) i (10.6.4))

$$(5.11) \quad g(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \exp(-i(ux + vy)) f(x, y) dx dy = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \exp(-i(ux + vy)) \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

Korzystając z rozwinięcia

$$(5.12) \quad \exp(-i(ux + vy)) = \cos(ux + vy) - i \sin(ux + vy) = \\ = \cos ux \cos vy - \sin ux \sin vy - i \sin ux \cos vy - \\ - i \cos ux \sin vy,$$

możemy całkę (5.11) przedstawić jako sumę czterech całek:

$$(5.13) \quad g(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}) \cos ux \cos vy dx dy - \\ - \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}) \sin ux \sin vy dx dy - \\ - \frac{i}{(2\pi)^2} \iint \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}) \sin ux \cos vy dx dy - \\ - \frac{i}{(2\pi)^2} \iint \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}) \cos ux \sin vy dx dy.$$

Ponieważ funkcja (5.10) jest parzysta ze względu na zmienną x i ze względu na zmienną y oraz funkcja $\cos x$ jest parzysta, a funkcja $\sin x$ jest nieparzysta, trzy ostatnie całki po prawej stronie wzoru (5.13) znikają. Wykorzystując ponadto parzystość funkcji pod pierwszą z tych całek, możemy napisać

$$(5.14) \quad g(u, v) = \frac{4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-A\sqrt{x^2 + y^2}) \cos ux \cos vy dx dy.$$

Znany jest następujący wzór (zob. [3], str. 288, przykład 21):

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-A \sqrt{x^2 + y^2}) \cos ux \cos vy \, dx dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A}{(A^2 + u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

Otrzymujemy stąd ostatecznie

$$g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A}{(A^2 + u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

Transformata $g(u, v)$ okazała się dodatnia, łatwo sprawdzić, że jest ona gęstością prawdopodobieństwa, a więc nasze twierdzenie udowodniliśmy w zupełności.

§ 6. O współczynnikach korelacji obliczonych przez roboczą grupę statystyczną. W latach 1953 i 1954 robocza grupa statystyczna, w skład której wchodził J. Battek, M. Kusiakowa, F. Szczotka, J. Włoka i L. Zubrzycka, pod kierownictwem J. Perkala i moim, zajmowała się ustaleniem współczynników korelacji między zawartością cynku w próbkach w zależności od odległości miejsc ich pobrania. Paragraf niniejszy poświęcę opisowi materiałów obserwacyjnych i obliczeń przeprowadzonych przez ową grupę.

Materiał obserwacyjny, jakim grupa rozporządzała, składał się w pierwszym rzędzie z 21 mapek około dwuhektarowych fragmentów złóż cynku i ołowiu różnych kopalń górnośląskich. Mianowicie były to mapki $A/1$, $A/2$, $A/3$, $A/4$, $A/5$, $A/6$, $A/7$, $A/8$, $A/9$ i $A/10$ z kopalni oznaczonej literą A , mapki $C/1$, $C/2$, $C/3$ i $C/4$ z kopalni oznaczonej literą C , mapka $D/1$ z kopalni oznaczonej literą D , mapki $E/1$ i $E/2$ z kopalni oznaczonej literą E , i mapki $F/1$, $F/2$, $F/3$ i $F/4$ z kopalni oznaczonej literą F . Na mapkach narysowana była sieć chodników i miejsca pobrania próbek ścinkowych oraz zanotowane były wyniki analizy chemicznej tych próbek. W wynikach tych podano miąższość złoża w metrach, względną zawartość cynku ($\%Zn$), względną zawartość ołowiu ($\%Pb$), względną zawartość cynku w związkach tlenkowych ($\%ZnO$) i wreszcie względną zawartość ołowiu w związkach tlenkowych ($\%PbO$), razem pięć parametrów. Z tych parametrów grupa wybrała do numerycznego opracowania względną zawartość cynku. Wpłynęły na to względy następujące: 1° Miąższość podana na mapkach dotyczy nie całego złoża, ale tylko tej jego części, która jest udostępniona korytarzem i wynosi w zasadzie tyle, ile wysokość korytarza. Tylko gdzieś spąg korytarza leży w płonej skale lub też złoże kończy się poniżej stropu. Dlatego badanie miąższości podanej na mapkach byłoby raczej badaniem wysokości korytarzy, niż badaniem miąższości złoża, i wobec tego grupa zre-

zygnowała z opracowania tego parametru. 2° Odrzucono także badanie zawartości ołowiu, ponieważ złóż jest w zasadzie cynkowe, a ołów występuje jako domieszka w ilości dużo mniejszej od cynku. 3° Wreszcie, mając do wyboru badanie względnej zawartości cynku i badanie względnej zawartości cynku w związkach tlenkowych, zdecydowano się na to pierwsze, mniemając, że dla określenia zasobów istotna jest całkowita zawartość cynku, a dane o zawartości cynku związanego w związkach tlenkowych mają znaczenie wtórne, dotyczące sposobu wykorzystania rudy.

Tak więc wszelkie obliczenia prowadzono dla względnej zawartości cynku. Dla zorientowania się w przebiegu funkcji korelacyjnej złoża postanowiono wykorzystać wszystkie pary obserwacji, których odległość nie przekracza 30 metrów. W tym celu na każdej mapce ponumerowano punkty pobierania próbek i sporządzono, dla każdej mapki z osobna, ewidencję par próbek według następującego wzoru: W kolumnie (1) zapisywano numer pierwszej próbki w parze (Nr_1), w kolumnie (2) zapisywano numer drugiej próbki (Nr_2), w kolumnie (3) zapisywano zawartość cynku w pierwszej próbce (Zn_1), w kolumnie (4) zapisywano zawartość cynku w drugiej próbce (Zn_2), w kolumnie (5) zapisywano odległość próbek (d) w metrach. Pary próbek o jednakowej odległości zebrano obok siebie.

Wzór 1

Ewidencja par próbek. Mapka ...

Nr_1	Nr_2	Zn_1	Zn_2	d
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Z kolei, do obliczenia współczynników korelacji, sporządzono dla poszczególnych odległości wykazy według następującego wzoru:

Wzór 2

Sumy. Odległość ... metrów

n	$\sum Zn_1$	$\sum Zn_2$	$\sum Zn_1^2$	$\sum Zn_2^2$	$\sum Zn_1 Zn_2$	Mapka
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

Wpisywano tu: w kolumnie (7) symbol mapki, w kolumnie (1) ilość par próbek o odległości zapisanej w nagłówku wykazu, wypisanych z tej mapki, której symbol wpisano do kolumny (7), wreszcie w kolumnach (2), (3), (4), (5) i (6) wpisano kolejno sumę liczb kolumny (3), sumę kwa-

dratów liczb kolumny (4) i sumę iloczynów liczb kolumny (3) i (4) w ewidencji par próbek; podano oczywiście sumy liczb dotyczących par, których liczbę wpisano w kolumnie (1).

TABLICA 1

Współczynniki korelacji obliczone z mapek

Odległość <i>d</i>	Wszystkie mapki		Kopalnia A		7 mapek	
	<i>n</i>	<i>r</i>	<i>n</i>	<i>r</i>	<i>n</i>	<i>r</i>
3	41	0,616	11	0,102		
4	87	0,526	26	0,358		
5	277	0,491	133	0,437	59	0,359
6	377	0,606	193	0,635	106	0,722
7	366	0,574	180	0,621	134	0,625
8	523	0,559	309	0,635	205	0,598
9	599	0,488	344	0,437	189	0,493
10	659	0,448	336	0,420	185	0,501
11	489	0,500	252	0,550	173	0,585
12	495	0,423	215	0,362	181	0,498
13	532	0,392	267	0,293	163	0,489
14	518	0,430	281	0,464	219	0,503
15	815	0,481	471	0,471	268	0,489
16	808	0,505	446	0,512	288	0,604
17	778	0,406	395	0,414	295	0,491
18	741	0,371	355	0,373	270	0,409
19	726	0,345	360	0,307	267	0,384
20	812	0,327	453	0,300	274	0,342
21	852	0,285	463	0,285	317	0,324
22	858	0,398	460	0,382	314	0,324
23	858	0,337	460	0,333	306	0,274
24	908	0,366	513	0,384	352	0,330
25	988	0,313	534	0,311	334	0,351
26	921	0,339	498	0,312	347	0,411
27	970	0,307	518	0,350	344	0,207
28	932	0,394	515	0,414	377	0,379
29	866	0,325	471	0,316	348	0,386
30	861	0,171	504	0,163	362	0,133

n — liczba par, na podstawie których obliczono współczynniki *r*;

7 mapek to mapki: A/1, A/2, A/3, A/4, A/10, C/1 i E/1.

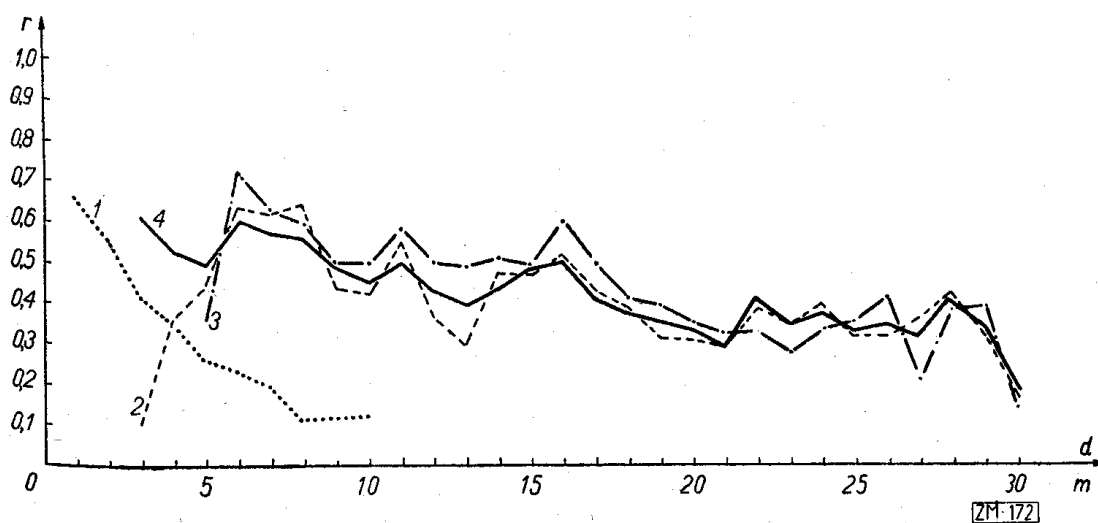
Chcąc teraz obliczyć współczynnik korelacji np. między próbkami odległymi o 10 metrów i tylko na podstawie mapek A/1, A/2, A/3 i A/4, brano z wykazu zatytułowanego „Sumy. Odległość 10 metrów” wiersze odpowiadające tym czterem mapkom, dodawano oddzielnie liczby z kolumn (1), (2), (3), (4), (5) i (6) i otrzymywano w ten sposób sumaryczne

iczby n , $\sum Zn_1$, $\sum Zn_2$, $\sum Zn_1^2$, $\sum Zn_2^2$ i $\sum Zn_1 Zn_2$, łącznie dla owych czterech mapek, a z nich obliczano współczynnik korelacji według następującego wzoru:

$$6.1) \quad R = \frac{(2 \sum Zn_1 Zn_2) / 2n - ((\sum Zn_1 + \sum Zn_2) / 2n)^2}{(\sum Zn_1^2 + \sum Zn_2^2) / 2n - ((\sum Zn_1 + \sum Zn_2) / 2n)^2}.$$

Dlaczego używano tego właśnie wzoru? Otóż ewidencję par robiono w ten sposób, że zawsze było $Nr_1 < Nr_2$ i wobec tego od numeracji zależało, czy dana próbka wystąpiła w (3) czy w (4) kolumnie ewidencji. Żeby ten wpływ numeracji uchylić, postanowiono współczynniki korelacji obliczać tak, jak gdyby każda para występowała dwa razy, raz w takim porządku, w jakim jest zapisana w ewidencji, i drugi raz w porządku odwrotnym. To zaś prowadzi do wzoru (6.1).

W ten sposób robocza grupa statystyczna obliczyła współczynniki korelacji na podstawie wszystkich mapek oraz, dla porównania, raz na podstawie mapek z kopalni A i drugi raz na podstawie 7 mapek z różnych kopalń. W tablicy 1 powtarzam te wyniki za sprawozdaniem roboczej grupy statystycznej za rok 1954, a na rysunku 1 podaję wykresy tych współczynników.



Rys. 1. Obliczone współczynniki korelacji. Krzywa 1 — stumetrówka, krzywa 2 — kopalnia A, krzywa 3 — siedem mapek, krzywa 4 — wszystkie mapki

Z wykresów na rysunku 1 widać, że współczynniki korelacji obliczone tylko z części materiału nie odbiegają systematycznie od współczynników obliczonych z całego materiału, a wyrysowane krzywe przeplatają się ze sobą w sposób przypadkowy, tak jak należy tego oczekiwać, gdy próbki pochodzą ze złóż o takiej samej strukturze. Duża ilość załamania

wyrysowanych krzywych świadczy o tym, że obliczone współczynniki obarczone są jeszcze dużym błędem. Jest to dość zrozumiałe, mimo że liczba par obserwacji, na podstawie których obliczono poszczególne współczynniki, może wydawać się duża. Par obserwacji jest bowiem dużo, ale powstało to stąd, że każda obserwacja występuje wiele razy w różnych parach.

Próbki ścinkowe, które posłużyły za materiał obserwacyjny do obliczenia współczynników korelacji, są pobierane w zasadzie co 8 metrów, a często jeszcze rzadziej. Dlatego znalazło się bardzo mało par do obliczenia współczynników korelacji przy małych odległościach próbek. Gdy ponadto zobaczyliśmy, że przedłużenie w kierunku zerowej odległości próbek wyrysowanych na rysunku 1 krzywej współczynników korelacji nie trafia w jedność, powzięliśmy podejrzenie, że jest to spowodowane selekcją polegającą na tym, iż próbki zagęszczano w miejscach szczególnie wielkiej zmienności złoża. Dla wyjaśnienia tej kwestii i dla dokładniejszego zbadania przebiegu funkcji korelacyjnej przy małych odległościach zrobiono w dwu prostopadłych chodnikach 84 próby co metr ⁽²⁾. Ten materiał będę nazywał dalej *stumetrówką*. Na podstawie *stumetrówki* obliczono w sposób wyżej opisany współczynniki korelacji zawarte w tabelicy 2. I te współczynniki przedstawiono na rysunku 1.

TABLICA 2

Współczynniki korelacji obliczone ze *stumetrówki*

Odległość	Liczba par	Współczynnik korelacji
d	n	r
1	80	0,648
2	76	0,550
3	73	0,412
4	71	0,343
5	69	0,257
6	67	0,226
7	65	0,192
8	63	0,106
10	61	0,111

Rzut oka na rysunek 1 pokazuje, że jeżeli wyrównamy obliczone współczynniki korelacji jakąś krzywą gładką, to jej przedłużenie nie przetnie osi r w punkcie $r = 1$ dla d równego 0, jak to być powinno,

⁽²⁾ Ze sprawozdania roboczej grupy statystycznej za rok 1954.

gdyby próbki dawały dokładną wartość parametru złoża. Można wyjaśnić taką sytuację błędem losowym próbek.

Współczynniki korelacji obliczono na podstawie zanotowanych wyników analizy chemicznej próbek ścinkowych. Próbkę tę pobiera się w ten sposób, że z wyrównanej na szerokości około 20 cm ściany korytarza ściosa się od stropu do spągu na szufelkę około półtora kilograma urobku. Złoże jest bardzo niejednorodne, tak że nie można wyciosać rowka o jakimś regularnym geometrycznym kształcie. Zdarza się, że wpadnie na szufelkę jakaś większa twarda bryłka, to znów posypie się cała garść miękkich okruchów. Dlatego, nie mówiąc już o możliwych błędach analizy chemicznej związanej choćby z pomniejszeniem próbek, trudno uważać ostatecznie zanotowany wynik za wartość parametru złoża w punkcie pobierania próbki, lecz trzeba go traktować jako wartość parametru złoża *plus* błąd losowy. Z tego wynika, że empiryczna funkcja korelacyjna jest zniekształconym obrazem funkcji korelacyjnej złoża. Wymaga więc wyjaśnienia kwestia: jak na podstawie obliczonych współczynników korelacji odtworzyć funkcję korelacyjną złoża? Jak obciążenie próbek błędem losowym wpływa na konstrukcję oceny parametru i na dokładność oszacowania?

§ 7. Jak szacować parametry złoża, gdy pomiary są obciążone błędem losowym? W § 2 mówiliśmy o szacowaniu całki

$$Y = Y(D) = \int_D y(p) dp,$$

gdy znane nam są wartości $y_1 = y(p_1), \dots, y_k = y(p_k)$ parametru w punktach p_1, \dots, p_k obszaru D .

Gdyby za pomocą odpowiednich pomiarów można było bezbłędnie określić wartość badanego parametru w poszczególnych punktach złoża, to znaczy gdybyśmy mogli bezbłędnie wyznaczać wartości $y(p)$, wtedy moglibyśmy z tych zaobserwowanych wartości wyestymować dane m , s^2 i $f(d)$ charakteryzujące złoże. Niestety, jak to przedstawiliśmy w § 6, wyników pomiarów dokonanych w złożu nie można traktować jako dokładne wartości parametru w punktach dokonywania pomiarów. Należy liczyć się z tym, że pomiary te są obciążone dość znacznym błędem losowym. Wskazują na to tak ogłędziny sposobu pobierania próbek, jak i obliczonych współczynników korelacji, które zademonstrowałem w § 6. Należy więc zdać sobie sprawę z konsekwencji, jakie płyną z obciążenia pomiarów błędem losowym.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że na podstawie pomiaru możemy ustalić wartości y_1, \dots, y_k badanego parametru w wybranych punktach p_1, \dots, p_k obszaru D . Oznaczmy teraz wyniki pomiarów badanego pa-

rametru w punktach p_1, \dots, p_k obszaru D przez $y_1^* = y^*(p_1), \dots, y_k^* = y^*(p_k)$. Zadanie będzie teraz brzmiało tak: oszacować jak najlepiej całkę Y , gdy znane są wyniki y_1^*, \dots, y_k^* pomiarów zrobionych w punktach p_1, \dots, p_k . I tu trzeba będzie w tym celu znać wariancje i kowariancje zmiennych losowych y_1^*, \dots, y_k^* i Y .

W paragrafie niniejszym chcemy ustalić związki między tymi wariancjami i kowariancjami a (dostępnymi do szacowania na podstawie pomiarów) wartością oczekiwaną pomiarów $m^* = E(y^*(p))$, wariancją pomiarów $s^{*2} = D^2(y^*(p))$ i funkcją korelacyjną $f^*(d)$ pomiarów, oraz związki między wielkościami m^*, s^* i $f^*(d)$, charakteryzującymi wyniki pomiarów parametru, a wielkościami $m, s, f(d)$ charakteryzującymi rzeczywisty rozkład wartości badanego parametru w złożu. Do tego obecnie przystępuję.

Obciążenie pomiarów błędem losowym sprecyzuję tak: Przyjmę, że wynik $y^*(p)$ pomiaru badanego parametru w punkcie p jest sumą wartości $y(p)$ badanego parametru w tym punkcie i niezależnej od $y(p)$ zmiennej losowej ε , reprezentującej błąd pomiaru. Będziemy więc mieli

$$(7.1) \quad y_1^* = y_1 + \varepsilon_1, \quad \dots, \quad y_k^* = y_k + \varepsilon_k.$$

O błędach $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ założę ponadto, że mają wartości oczekiwane równe 0 i jednakowe wariancje równe s'^2 oraz że są wzajemnie niezależne stochastycznie, a także, że są niezależne od zmiennych losowych y_1, \dots, y_k .

Na mocy założenia, że $E(\varepsilon) = 0$, mamy

$$(7.2) \quad m^* = m.$$

Z niezależności błędu od wartości parametru wynika, że dla każdego p mamy

$$(7.3) \quad s^{*2} = D^2(y^*(p)) = D^2(y(p)) + D^2(\varepsilon) = s^2 + s'^2.$$

Korzystając z niezależności błędów od wartości parametrów i z wzajemnej niezależności błędów, mamy dla $p_1 \neq p_2$

$$\begin{aligned} (7.4) \quad \omega(y_1^*, y_2^*) &= E((y_1^* - E(y_1^*))(y_2^* - E(y_2^*))) = \\ &= E([(y_1 - E(y_1)) + (\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1))] [(y_2 - E(y_2)) + (\varepsilon_2 - E(\varepsilon_2))]) = \\ &= E((y_1 - E(y_1))(y_2 - E(y_2))) + E((y_1 - E(y_1))(\varepsilon_2 - E(\varepsilon_2))) = \\ &= E((\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1))(y_2 - E(y_2))) + E((\varepsilon_1 - E(\varepsilon_1))(\varepsilon_2 - E(\varepsilon_2))) = \\ &= E((y_1 - E(y_1))(y_2 - E(y_2))) = \\ &= \omega(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Zupełnie analogicznie uzyskujemy relację

$$(7.5) \quad \omega(y^*(p), Y) = \omega(y(p), Y) \quad \text{dla każdego } p.$$

Ze związków (7.3) i (7.4) wyprowadzę relację między funkcjami $f(d)$ i $f^*(d)$. Ustalmy dowolne dwa punkty p_1 i p_2 , których odległość $d(p_1, p_2)$ wynosi d ($d > 0$). Z definicji współczynnika korelacji mamy wtedy

$$(7.6) \quad f(d) = R(y_1, y_2) = \omega(y_1, y_2)/D(y_1)D(y_2),$$

$$(7.7) \quad f^*(d) = R(y_1^*, y_2^*) = \omega(y_1^*, y_2^*)/D(y_1^*)D(y_2^*).$$

Ponieważ $D(y(p)) = s$ dla każdego p , więc zamiast (7.6) możemy napisać

$$(7.8) \quad f(d) = \omega(y_1, y_2)/s^2;$$

podobnie, stosując (7.3) do (7.7), otrzymamy

$$(7.9) \quad f^*(d) = \omega(y_1^*, y_2^*)/s'^2 = \omega(y_1^*, y_2^*)/(s^2 + s'^2).$$

Korzystając z relacji (7.4) otrzymujemy przez porównanie równości (7.8) i (7.9) relację

$$(7.10) \quad f^*(d) = \frac{s^2}{s'^2} f(d).$$

Relacja ta pokazuje, że funkcja korelacyjna pomiarów, $f^*(d)$, jest proporcjonalna do funkcji korelacyjnej złoża, $f(d)$. Pozwala ona wyrazić funkcję korelacyjną złoża $f(d)$, wariancję rzeczywistych wartości parametru złoża s^2 oraz błąd pomiarów s' przez funkcję korelacyjną pomiarów $f^*(d)$ i wariancję pomiarów s'^2 . Ma to bardzo wielkie znaczenie, bo funkcję $f^*(d)$ i wariancję s'^2 można ustalać dowolnie dokładnie na podstawie odpowiednio licznych pomiarów-observacji, natomiast funkcja $f(d)$, błąd s' i wariancja s^2 bezpośrednio z pomiarów wyliczyć się nie dają. Znajdę teraz zależność tych wyrażeń od pomiarów.

Znając funkcję korelacyjną pomiarów możemy ustalić liczbę $f^*(0+) = \lim_{d \rightarrow 0+} f^*(d)$. Z założenia jest $f(0+) = \lim_{d \rightarrow 0+} f(d) = 1$. Przypuśćmy, dalej, że znamy także wariancję s'^2 . Wówczas, wykorzystując relację (7.10), otrzymujemy równość $f^*(0+) = s^2/s'^2$, skąd uzyskujemy natychmiast następujące wyrażenie na wariancję s^2 rzeczywistych wartości parametru złoża:

$$(7.11) \quad s^2 = s'^2 f^*(0+).$$

Stąd i z relacji (7.3) otrzymujemy wyrażenie na kwadrat błędu s' pomiarów

$$(7.12) \quad s'^2 = s^2 (1 - f^*(0+)).$$

Wzory (7.2), (7.4), (7.5), (7.10) i (7.11) pozwalają z łatwością wyrazić przez m^* , s^{*2} i $f^*(d)$ wszystkie wariancje, kowariancje i wartości oczekiwane zmiennych y_1^*, \dots, y_k^*, Y . Znajdujemy

$$(7.13) \quad \omega(y_i^*, y_i^*) = s^{*2},$$

$$(7.14) \quad \omega(y_i^*, y_j^*) = s^{*2} f^*(d(p_i, p_j)), \quad \text{gdy } i \neq j,$$

$$(7.15) \quad \omega(y_i^*, Y) = s^{*2} \int_D f^*(d(p, q)) dq,$$

$$(7.16) \quad \omega(Y, Y) = s^{*2} \int_D \int_D \left\{ \int_D f^*(d(p, q)) dq \right\} dp,$$

$$(7.17) \quad E(y_i^*) = E(y_i) = m,$$

$$(7.18) \quad E(Y) = m|D|.$$

§ 8. Wyrównanie współczynników korelacji. W paragrafie niniejszym pragnę opisać sposób i podać wyniki wyrównania obliczonych współczynników korelacji.

Zwróciliśmy uwagę na to, że wyników prób nie można uważać za dokładne wartości parametru złoża w punkcie pobierania próbki. Dlatego wyrównywanie obliczonych współczynników korelacji oparłem na teorii wyłożonej w § 7. W myśl § 7 obliczone z wyników prób współczynniki korelacji należy traktować jako wartości przybliżone funkcji korelacyjnej pomiarów, a nie funkcji korelacyjnej złoża. Wobec wzoru (7.10), ustalającego, że funkcja korelacyjna złoża i funkcja korelacyjna pomiarów są do siebie proporcjonalne ze współczynnikiem proporcjonalności zależnym od wielkości błędu losowego próbek, weźmiemy — jako typowe funkcje korelacyjne pomiarów — funkcje korelacyjne złoża przedstawione w § 5, dodając do nich jako drugi parametr współczynnik proporcjonalności. A więc będziemy wyrównywali obliczone współczynniki korelacji za pomocą następujących funkcji⁽³⁾, zależnych od dwu parametrów A i c :

$$(8.1) \quad f_1^*(d; A, c) = \begin{cases} c \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \frac{d}{A} - \frac{d}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{A}\right)^2} \right\} & \text{dla } d \leq A, \\ 0 & \text{dla } A \leq d, \end{cases}$$

$$(8.2) \quad f_2^*(d; A, c) = ce^{-d^2/A^2},$$

$$(8.3) \quad f_3^*(d; A, c) = ce^{-d/A}.$$

⁽³⁾ Porównaj wzory (5.2), (5.6) i (5.7).

Parametry A i c wyznaczyliśmy ⁽⁴⁾ tak, aby nadać minimalną wartość wyrażeniu

$$(8.4) \quad B^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (r_i - f^*(d_i; A, c))^2,$$

w którym r_1, r_2, \dots, r_k oznaczają współczynniki korelacji obliczone dla odległości d_1, d_2, \dots, d_k , a n_1, n_2, \dots, n_k są liczbami par, na podstawie których obliczono poszczególne współczynniki r_1, r_2, \dots, r_k , $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ oraz $f^*(d; A, c)$ jest jedną z funkcji (8.1), (8.2), (8.3).

Funkcje (8.1), (8.2), (8.3) zależą od parametru A w taki sposób, że minimizowanie wyrażenia (8.4) nie sprowadza się do prostych równań, z których można by wyznaczyć optymalne wartości parametrów A i c . Dlatego postąpiliśmy inaczej, wykorzystując następujące równości:

$$(8.5) \quad f_1^*(d; A, c) = c f_1^*(d/A; 1, 1),$$

$$(8.6) \quad f_2^*(d; A, c) = c f_2^*(d/A; 1, 1),$$

$$(8.7) \quad f_3^*(d; A, c) = c f_3^*(d/A; 1, 1).$$

Dzięki nim można wyrażenie (8.4) napisać w postaci

$$(8.8) \quad B^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (r_i - c f^*(d_i/A; 1, 1))^2.$$

Wyrażenie (8.8) można przy ustalonym A zminimalizować względem c przez różniczkowanie. Jak łatwo przeliczyć, c minimizujące wyrażenie (8.8) jest równe

$$(8.9) \quad c = \frac{\sum_{i=1}^k n_i r_i f^*(d_i/A; 1, 1)}{\sum_{i=1}^k n_i f^{*2}(d_i/A; 1, 1)}.$$

Wobec tego do minimizacji wyrażenia (8.4) postanowiliśmy zastosować odmianę metody prób, mianowicie dla poszczególnych wartości parametru A wyznaczyć parametr c ze wzoru (8.9), dla takiej pary wartości obliczyć B^2 ze wzoru (8.8) i wybrać w końcu tę parę wartości, dla której B^2 wypadnie najmniejsze.

Dla ułatwienia rachunków stolicowaliśmy funkcje $f_1^*(d; 1, 1)$, $f_2^*(d; 1, 1)$ i $f_3^*(d; 1, 1)$. W tablicach 3, 4, i 5 podaje niektóre wartości tych funkcji, a rysunek 2 ilustruje ich kształt.

⁽⁴⁾ Przy obliczeniach pomagała mi L. Zubrzyoka.

Postępowanie to zastosowaliśmy do współczynników korelacji obliczonych ze wszystkich mapek i do współczynników korelacji obliczonych ze stumetrówki. Wykonaliśmy pierwszy krok. Stałą A wyznaczyliśmy w tym kroku w następujący sposób:

Dla współczynników korelacji obliczonych ze wszystkich mapek wzięliśmy takie k , żeby wartości funkcji wyrównujących współczynniki korelacji w punktach $d = 8$ metrów oraz $d = 24$ metry miały się do siebie tak, jak średnie

$$(8.10) \quad \frac{1}{5}(r_6 + r_7 + r_8 + r_9 + r_{10})$$

oraz

$$(8.11) \quad \frac{1}{5}(r_{22} + r_{23} + r_{24} + r_{25} + r_{26}).$$

Dla współczynników korelacji obliczonych ze stumetrówki wzięliśmy takie A , żeby wartości funkcji wyrównujących współczynniki korelacji w punktach $d = 2$ metry oraz $d = 6$ metrów miały się do siebie tak, jak średnie

$$(8.12) \quad \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

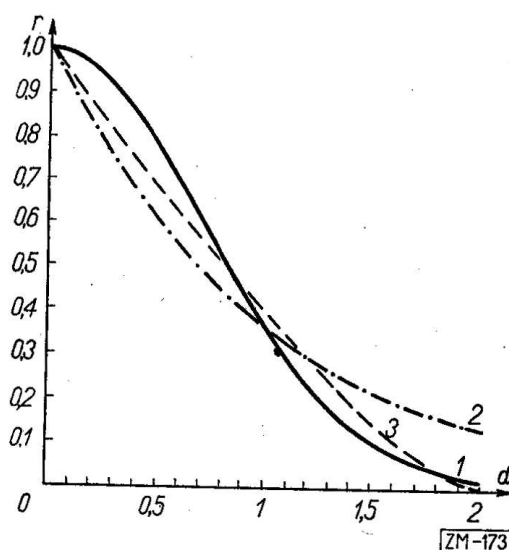
oraz

$$(8.13) \quad \frac{1}{3}(r_5 + r_6 + r_7);$$

we wzorach (8.10), (8.11), (8.12) i (8.13) r_i oznacza współczynnik korelacji obliczony dla odległości $d = i$ metrów, odpowiednio ze wszystkich mapek lub ze stumetrówki.

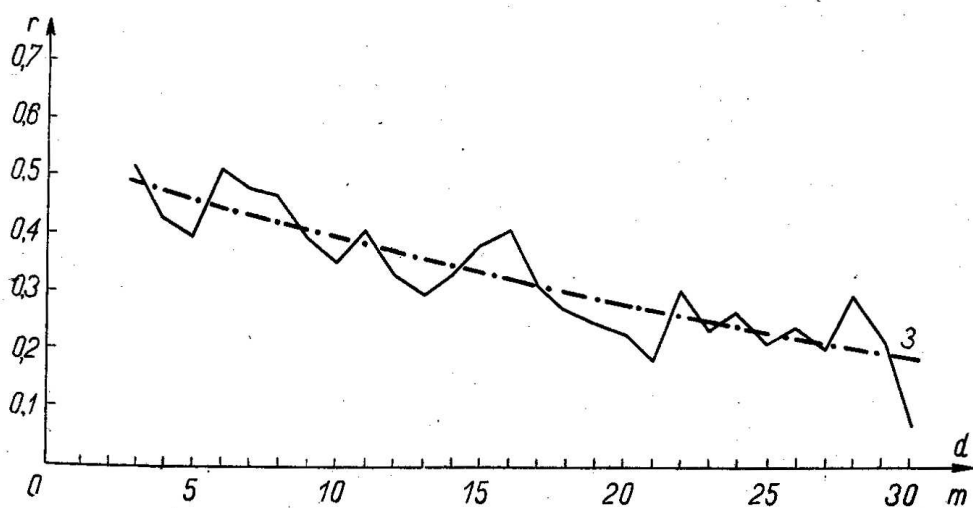
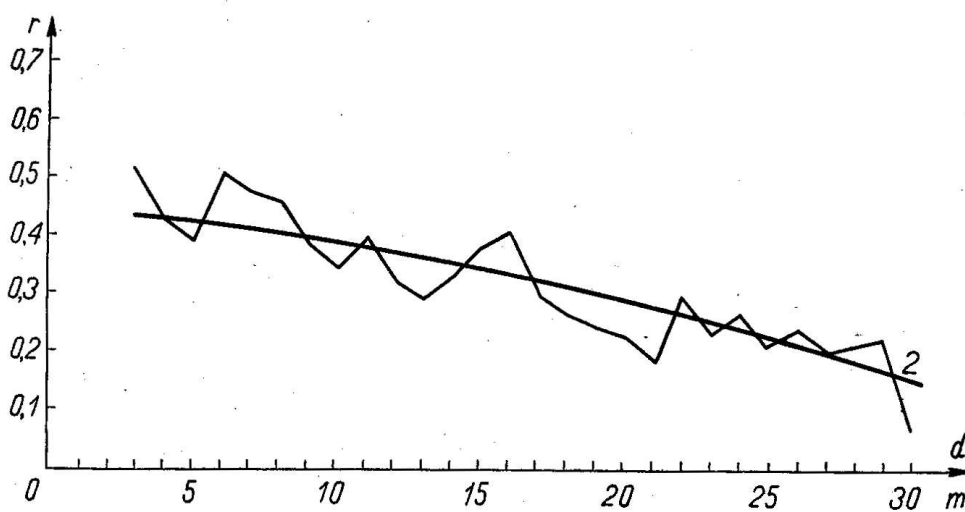
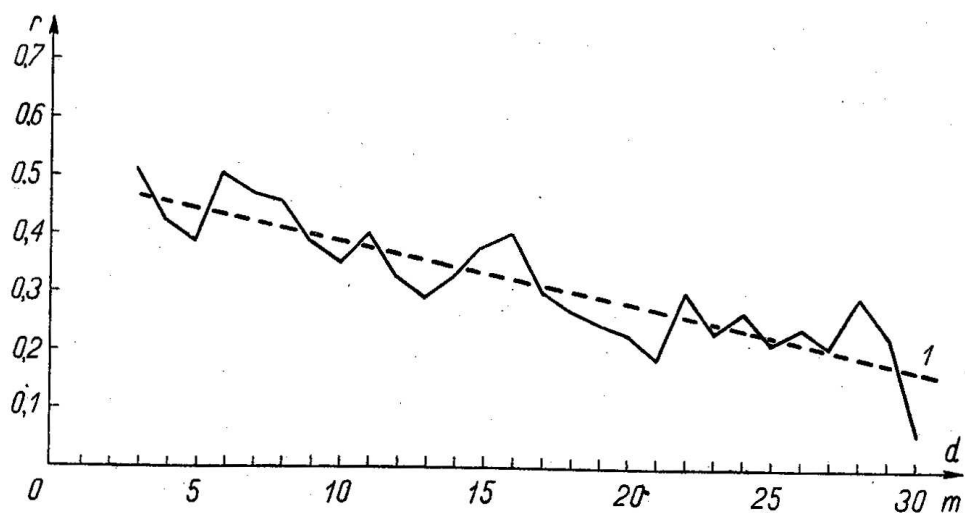
W tablicach 6 i 7 zanotowano wyrównane wartości współczynników korelacji uzyskane w pierwszym kroku. Zanotowane u dołu liczby B , obliczone według wzoru (8.4), świadczą o dobroci wyrównania. Dane zawarte w tablicach 6 i 7 zilustrowano na rysunkach 3 i 4.

Z rysunków tych i tablic widać, że: 1° nie należy się spodziewać istotnej poprawy wyrównania w dalszych krokach, 2° najlepiej wyrównują się obliczone współczynniki korelacji za pomocą funkcji typu (8.3), co widać szczególnie wyraźnie na stumetrówce, 3° współczynniki obliczone ze stumetrówki maleją dużo szybciej niż obliczone ze wszystkich mapek.



Rys. 2. Typowe funkcje korelacyjne. Krzywa 1: $r = e^{-d^2}$, krzywa 2: $r = e^{-d}$, krzywa 3:

$$r = \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \frac{d}{2} - \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right\}$$

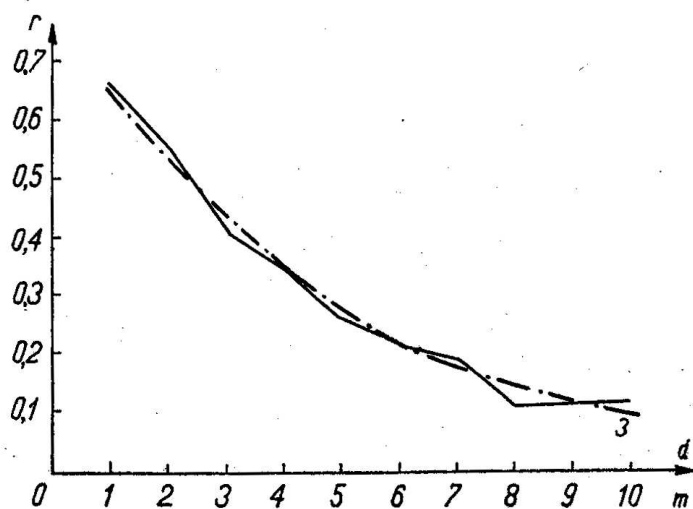
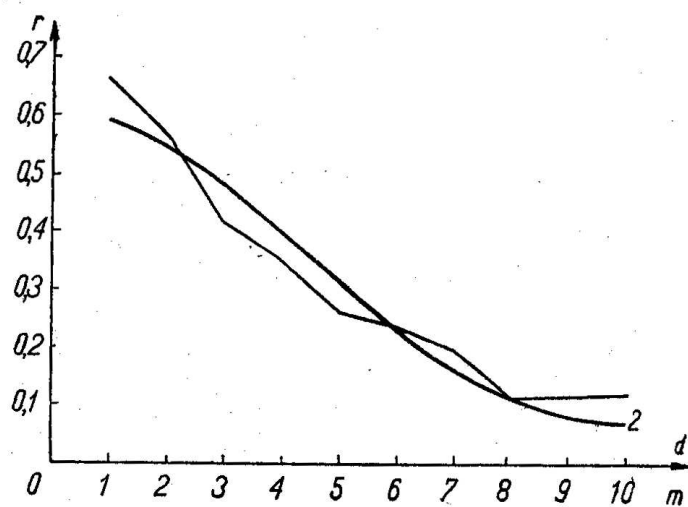
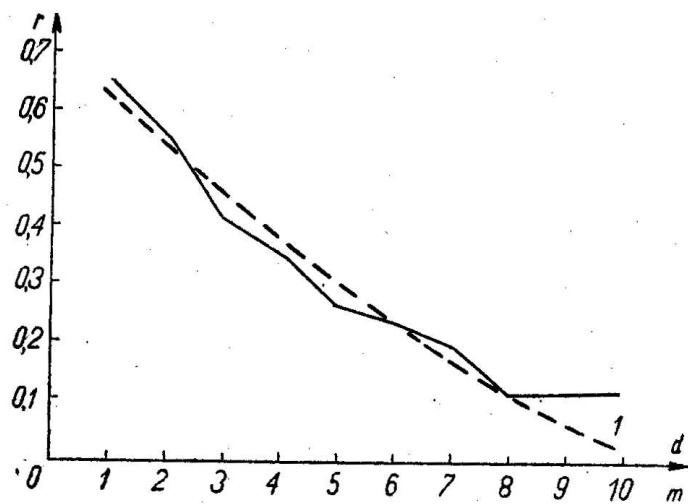


ZM-174

Rys. 3. Wyrównanie współczynników korelacji obliczonych ze wszystkich mapek

$$\text{Krzywa 1: } r = 0,605 \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \frac{d}{67,2} - \frac{d}{67,2} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{67,2} \right)^2} \right\},$$

$$\text{krzywa 2: } r = 0,536 e^{-(d/34,8)^2}, \quad \text{krzywa 3: } r = 0,635 e^{-d/37,9}$$



ZM-175

Rys. 4. Wyrównanie współczynników korelacji obliczonych ze stumetrówki

Krzywa 1: $r = 0,701 \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \frac{d}{10,6} - \frac{d}{10,6} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{10,6} \right)^2} \right\},$

krzywa 2: $r = 0,599 e^{-(d/6,06)^2},$ krzywa 3: $r = 0,813 e^{-d/4,61}$

TABLICA 3

Funkcja $f_1^*(d; 1, 1)$

d	f_1^*	d	f_1^*	d	f_1^*	d	f_1^*
0,00	1,000	0,25	0,685	0,50	0,391	0,75	0,144
0,05	0,936	0,30	0,624	0,55	0,337	0,80	0,104
0,10	0,873	0,35	0,564	0,60	0,285	0,85	0,068
0,15	0,810	0,40	0,505	0,65	0,235	0,90	0,037
0,20	0,747	0,45	0,447	0,70	0,188	0,95	0,013
0,25	0,685	0,50	0,391	0,75	0,144	1,00	0,000

TABLICA 4

Funkcja $f_2^*(d; 1, 1)$

d	f_2^*	d	f_2^*	d	f_2^*	d	f_2^*
0,0	1,000	0,5	0,779	1,0	0,368	1,5	0,105
0,1	0,990	0,6	0,698	1,1	0,298	1,6	0,077
0,2	0,961	0,7	0,613	1,2	0,237	1,7	0,056
0,3	0,914	0,8	0,527	1,3	0,185	1,8	0,039
0,4	0,852	0,9	0,445	1,4	0,141	1,9	0,027
0,5	0,779	1,0	0,368	1,5	0,105	2,0	0,018

TABLICA 5

Funkcja $f_3^*(d; 1, 1)$

d	f_3^*	d	f_3^*	d	f_3^*	d	f_3^*
0,0	1,000	1,0	0,368	2,0	0,135	3,0	0,050
0,2	0,819	1,2	0,301	2,2	0,111	3,2	0,041
0,4	0,670	1,4	0,247	2,4	0,091	3,4	0,033
0,6	0,549	1,6	0,202	2,6	0,074	3,6	0,027
0,8	0,449	1,8	0,165	2,8	0,061	3,8	0,022
1,0	0,368	2,0	0,135	3,0	0,050	4,0	0,018

TABLICA 6

Wyrównanie współczynników korelacji
obliczonych ze wszystkich mapek

d	r	f_1^*	f_2^*	f_3^*
3	0,616	0,570	0,532	0,587
4	,526	,559	,529	,572
5	,491	,547	,524	,556
6	,606	,536	,520	,542
7	,574	,525	,515	,528
8	,559	,513	,508	,514
9	,488	,502	,501	,501
10	,448	,491	,493	,488
11	,500	,479	,485	,475
12	,423	,468	,476	,462
13	,392	,457	,466	,451
14	,430	,445	,456	,439
15	,481	,434	,445	,427
16	,505	,424	,434	,417
17	,406	,412	,422	,406
18	,371	,401	,410	,395
19	,345	,390	,398	,385
20	,327	,379	,385	,375
21	,285	,368	,372	,365
22	,398	,357	,359	,355
23	,337	,346	,347	,346
24	,366	,335	,333	,337
25	,313	,324	,320	,328
26	,339	,315	,307	,320
27	,307	,304	,294	,311
28	,394	,294	,281	,304
29	,325	,283	,268	,295
30	,171	,273	,255	,288

$$1/A = 0,0149 \quad 0,0287 \quad 0,0264$$

$$A = 67,2 \quad 34,8 \quad 37,9$$

$$c = 0,605 \quad 0,536 \quad 0,635$$

$$B = 0,0517 \quad 0,0544 \quad 0,0516$$

§ 9. Różne sposoby szacowania. Zadaniem naszym jest oszacowanie całki

$$(9.1) \quad Y = \iint_D y(p) dp,$$

TABLICA 7

Wyrównanie współczynników korelacji
obliczonych ze stumetrówki

d	r	f_1^*	f_2^*	f_3^*
1	0,648	0,616	0,583	0,654
2	,550	,533	,537	,527
3	,412	,450	,469	,423
4	,343	,371	,387	,341
5	,257	,295	,303	,275
6	,226	,223	,225	,221
7	,192	,156	,157	,178
8	,106	,097	,105	,143
10	,111]	,011	,066	,095
$1/A =$				
		0,0945	0,165	0,217
$A =$		10,6	6,06	4,61
$c =$		0,701	0,599	0,813
$B =$		0,0413	0,0415	0,0177

gdy znamy zaobserwowane wartości

$$(9.2) \quad y_1^* = y^*(p_1), \quad \dots, \quad y_k^* = y^*(p_k).$$

Zapowiedzieliśmy w § 1, że chcemy podać metodę wyznaczania najlepszej oceny i metodę wyznaczania błędu dowolnej oceny oparte na znajomości struktury złoża i rozmieszczenia próbek. W tym paragrafie stawiamy sobie za zadanie bliżej sprecyzować oceny, które chcemy wziąć pod uwagę. Przypominamy, że mamy szacować zmienną losową Y , gdy znane nam są wartości zmiennych losowych $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*$. Otóż oceny, jakie zamierzamy rozpatrzyć, będą to różne liniowe funkcje zmiennych $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*$. Różnić się one będą liczbą dowolnych parametrów i , co z tym idzie w parze, ilością informacji o strukturze złoża potrzebnej do ich skonstruowania.

Ocena I. Najogólniejsza z ocen, jakie zamierzamy rozpatrzyć, to ogólna funkcja liniowa $c_0 + c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*$. Współczynniki c_0, c_1, \dots, c_k należy tu wyznaczać tak, aby nadać minimalną wartość wyrażeniu

$$(9.3) \quad E(c_0 + c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - Y)^2.$$

Minimalną wartość wyrażenia (9.3) będziemy oznaczali przez $s_1^2 = s_1^2(Y; y_1^*, \dots, y_k^*)$,

$$s_1^2 = \min_{c_0, c_1, \dots, c_k} E(c_0 + c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - Y)^2,$$

a s_1 będziemy nazywali błędem oceny I.

Ocena II. Jako drugą ocenę rozważmy funkcję liniową jednorodną $c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*$, w której współczynniki c_1, \dots, c_k wyznacza się tak, by nadać minimalną wartość wyrażeniu

$$(9.4) \quad E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - Y)^2.$$

Minimalną wartość wyrażenia (9.4) będziemy oznaczali przez $s_{II}^2 = s_{II}^2(Y; y_1^*, \dots, y_k^*)$,

$$s_{II}^2 = \min_{c_1, \dots, c_k} E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - Y)^2,$$

a s_{II} będziemy nazywali *błędem oceny II*.

Ocena III. Trzecią oceną będzie również liniowa funkcja jednorodna $c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*$, ale spełniająca warunek

$$(9.5) \quad E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*) = E(Y).$$

Będziemy ją nazywali *najlepszą średnią ważoną*. Stałe c_1, \dots, c_k będziemy tu wyznaczać tak, żeby był zachowany dodatkowy warunek (9.5). Minimalną wartość wyrażenia (9.4) pod warunkiem (9.5) będziemy oznaczali przez $s_{III}^2 = s_{III}^2(Y; y_1^*, \dots, y_k^*)$,

$$s_{III}^2 = \min_{\substack{c_1, \dots, c_k \\ E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*) = E(Y)}} E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - Y)^2,$$

a s_{III} będziemy nazywali *błędem oceny III*.

Ocena IV. Czwarta ocena to funkcja liniowa jednorodna $c y_1^* + \dots + c y_k^*$ spełniająca warunek

$$(9.6) \quad E(c y_1^* + \dots + c y_k^*) = E(Y).$$

Będziemy ją nazywali *średnią arytmetyczną*. Mamy tu do wyznaczenia jedną stałą c i wyznaczamy ją z warunku (9.6). Wartość oczekiwaną $E(c y_1^* + \dots + c y_k^* - Y)^2$ pod warunkiem (9.6) będziemy oznaczali przez $s_{IV}^2 = s_{IV}^2(Y; y_1^*, \dots, y_k^*)$, a s_{IV} będziemy nazywali *błędem oceny IV*.

Ocena V. Rozważmy wreszcie „samobójczą” ocenę nie korzystającą w ogóle z wartości y_1^*, \dots, y_k^* , a mianowicie stałą C równą wartości oczekiwanej całki Y , $C = E(Y)$. Wartość oczekiwaną

$$E(C - Y)^2 = E(Y - E(Y))^2 = \omega(Y, Y),$$

równą wariancji całki Y , oznaczmy podobnie jak przy ocenach poprzednich przez s_V^2 , a s_V nazwijmy *błędem oceny V*.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób trzeba wyznaczać poszczególne oceny i ich błędy i jakie informacje o strukturze złoża są potrzebne do skonstruowania każdej z tych pięciu ocen. Pamiętamy, że struktura złoża, które traktujemy jako proces stochastyczny stacjonarny, ciągły i izotropowy, jest scharakteryzowana przez trzy wielkości: $m = E(y(p))$ — to jest wspólną dla wszystkich punktów wartość oczekiwaną parametru w poszczególnym punkcie złoża, $s^2 = D^2(y(p))$ — to jest wspólną dla wszystkich punktów wariancję parametru w pojedynczym punkcie złoża oraz $f(d)$ — to jest funkcję korelacyjną złoża. Do tego, w przypadku obciążenia pomiarów błędem losowym, trzeba doliczyć, jak to opisałem w § 7, wielkość s'^2 — to jest wariancję losowego błędu pomiarów.

Przy wyznaczaniu ocen wyliczonych na początku ingerują wartości oczekiwane, wariancje i kowariancje zmiennych losowych Y, y_1^*, \dots, y_k^* . Dla wygody (porównaj § 7) napiszmy, jak wyrażają się te wielkości przez $m, f(d), s^2$ i s'^2 . Mamy

$$(9.7) \quad \mathbb{E}(y_1^*) = \mathbb{E}(y_2^*) = \dots = \mathbb{E}(y_k^*) = m;$$

$$(9.8) \quad \mathbb{E}(Y) = m|D|;$$

$$(9.9) \quad D^2(y_1^*) = D^2(y_2^*) = \dots = D^2(y_k^*) = s^2 + s'^2 = s^{*2};$$

$$(9.10) \quad \omega(y_i^*, y_j^*) = s^2 f(d(p_i, p_j)), \quad i \neq j;$$

$$(9.11) \quad \omega(y_j^*, Y) = s^2 \iint_D f(d(p_i, q)) dq;$$

$$(9.12) \quad \omega(Y, Y) = s^2 \int_D \int_D \left\{ \int_D \int_D f(d(p, q)) dq \right\} dp.$$

Wyznaczanie oceny I jest znanym (zob. [2], rozdz. 23) w rachunku prawdopodobieństwa zadaniem optymalnego szacowania zmiennej losowej Y przez funkcję liniową zmiennych y_1^*, \dots, y_k^* . Stałe c_1, \dots, c_k trzeba w tym przypadku wyznaczać z układu równań normalnych

[illegible]

(gdzie $\omega(x, y)$ oznacza kowariancję zmiennych losowych x i y , czyli wartość oczekiwaną $E((x - E(x))(y - E(y)))$, a następnie stałą c_0 z równania

$$(9.14) \quad c_0 + c_1 E(y_1^*) + \dots + c_k E(y_k^*) = E(Y).$$

Podstawiając w (9.13) wyrażenia (9.9), (9.10) i (9.11) możemy zauważyć, że do wyznaczenia stałych c_1, \dots, c_k potrzebna jest tylko znajomość funkcji korelacyjnej $f(d)$ i stosunku s'^2/s^2 , niepotrzebna jest natomiast

Uwzględnivszy teraz wzory (9.9)-(9.11) przekonujemy się, dzieląc pierwsze k równań w układzie (9.16) przez s^2 , że do wyznaczenia stałych c_1, \dots, c_k potrzebna jest tylko znajomość funkcji korelacyjnej $f(d)$ i stosunku s'/s , natomiast w ogóle nie jest potrzebna znajomość m . Nie znam prostszego wyrażenia na błąd s_{III} tej oceny niż następujące rozwinięcie wyrażenia s_{III}^2 :

$$\begin{aligned} s_{III}^2 = & c_1 \{c_1 \omega(y_1^*, y_1^*) + \dots + c_k \omega(y_1^*, y_k^*) - \omega(y_1^*, Y)\} + \dots + \\ & + c_k \{c_1 \omega(y_k^*, y_1^*) + \dots + c_k \omega(y_k^*, y_k^*) - \omega(y_k^*, Y)\} - \\ & - \{\omega(Y, y_1^*) + \dots + \omega(Y, y_k^*) - \omega(Y, Y)\}. \end{aligned}$$

W przypadku oceny IV, uwzględniając wzory (9.7) i (9.8), otrzymujemy z (9.6) następujące równanie dla c :

$$(9.17) \quad ckm = m|D|,$$

a stąd

$$(9.18) \quad c = |D|/k.$$

Zauważmy wreszcie, że podstawiając we wzorach niniejszego paragrafu $s'^2 = 0$ otrzymujemy wzory odnoszące się do szacowania całki Y przy znajomości parametru w punktach p_1, \dots, p_k .

§ 10. Przykłady numeryczne. W § 1 zapowiedzieliśmy, że chcemy na materiale obserwacyjnym zebranym w górnośląskich złóżach cynkowych przestudiować, jaka jest tu dokładność najlepszej oceny i porównać tę dokładność z dokładnością innych ocen. W § 8 zreferowałem wyniki obliczeń współczynników korelacji między zawartością cynku w zależności od odległości miejsc pobierania próbek. Na gruncie teorii wyłożonej w §§ 3, 4 i 7 zaproponowaliśmy w § 5 kilka postaci funkcji korelacyjnych. W § 7 zastanowiliśmy się nad konsekwencjami płynącymi z obciążenia próbek błędem losowym. Zaproponowanych w § 5 funkcji korelacyjnych użyliśmy w § 8 do wyrównywania współczynników korelacji obliczonych z danych o zawartości cynku. Uwzględniliśmy przy tym wpływ losowych błędów próbek. Okazało się, że i współczynniki korelacji obliczone z mappek, i współczynniki korelacji obliczone ze stumetrówki najlepiej wyrównywały się za pomocą funkcji wykładniczej. Jak jednak widać już z rysunku 1, funkcja korelacyjna obliczona ze stumetrówki różni się zasadniczo od funkcji korelacyjnej obliczonej z mappek. Pierwsza maleje szybko i już przy odległości próbek 10 m jest bliska $\frac{1}{10}$. Druga zaś jeszcze przy odległości prób 30 m waha się około $\frac{3}{10}$. Nad możliwościami wyjaśnienia tej różnicy zastanowimy się jeszcze w § 13. W niniejszym paragrafie chcemy

podać pewne przykłady numeryczne, które pozwoliły by zorientować się, jakiego polepszenia dokładności oszacowania można oczekiwać przy wykorzystaniu znajomości struktury złoża, a ściślej mówiąc, znajomości: 1° średniej m , 2° wariancji s^2 wartości parametru złoża, 3° wariancji s'^2 losowego błędu próbek i 4° funkcji korelacyjnej $f(d)$.

W przykładach tych przyjmujemy, że

$$(10.1) \quad m = 10,$$

$$(10.2) \quad s^2 + s'^2 = 100,$$

$$(10.3) \quad f(d) = 10^{-0,1d},$$

$$(10.4) \quad \frac{s^2}{s^2 + s'^2} = 0,813.$$

Z (10.2) i (10.4) otrzymujemy

$$(10.5) \quad s^2 = 81,3, \quad s = 9,0161;$$

$$(10.6) \quad s'^2 = 18,7, \quad s' = 4,3244.$$

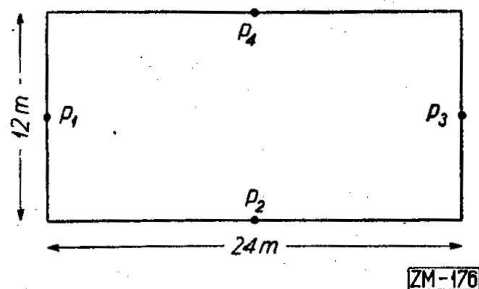
Przyjęta w (10.1) wartość m jest niemal równa średniej zawartości cynku obliczonej z mappek, która wynosi 10,23. Przyjęta w (10.2) wartość sumy $s^2 + s'^2$ jest niemal równa wariancji zawartości cynku obliczonej z mappek, która wynosi 98,67. Przyjęta w (10.3) funkcja korelacyjna jest niemal równa wykładniczej funkcji korelacyjnej, najlepiej wyrównującej współczynniki korelacji obliczone ze stumetrówki (zob. § 8), która wynosi

$$e^{-d/4,61} = 10^{-0,094\,206\,d}.$$

Wreszcie przyjęty w (10.4) stosunek jest wzięty z wykładniczej funkcji korelacyjnej wyrównującej współczynniki korelacji obliczone ze stumetrówki.

Rozważymy dwa przykłady. W każdym z nich rozważymy po dwa warianty. W wariancie pierwszym przyjmujemy, że próbki są obciążone błędem losowym o wariancji $s'^2 = 18,7$ (wzór (10.6)). W drugim wariancie przyjmujemy, że $s'^2 = 0$, czyli że próbki dają nam dokładne wartości mierzonego parametru. Pozwoli to nam zorientować się, jak błędy próbek pogarszają oszacowanie lub, innymi słowy, o ile można by polepszyć oszacowanie zwiększając dokładność próbek (np. robiąc próbki bruzdowe zamiast ścinkowych). W przykładach tych poszczególne oceny będziemy oznaczali literą L z rzymską cyfrą u dołu, wskazującą numer oceny. Ponadto w wariancie pierwszym dodamy jeszcze gwiazdkę, dla zaznaczenia, że chodzi o próbki obciążone błędami.

PRZYKŁAD 1. Za obszar D przyjmijmy tu prostokąt o bokach $12\text{ m} \times 24\text{ m}$ i rozważymy szacowanie na podstawie czterech próbek umieszczonych w środkach czterech boków tego prostokąta. Sytuację tę ilustruje rysunek 5.



Rys. 5. Obszar D

Mamy w tym przykładzie

$$L_{I^*} = 28,509(y_1^* + y_3^*) + 35,127(y_2^* + y_4^*) + 1607,28,$$

$$L_I = 34,397(y_1 + y_3) + 42,224(y_2 + y_4) + 1347,58,$$

$$L_{II^*} = 62,407(y_1^* + y_3^*) + 64,762(y_2^* + y_4^*),$$

$$L_{II} = 62,684(y_1 + y_3) + 68,789(y_2 + y_4),$$

$$L_{III^*} = 69,704(y_1^* + y_3^*) + 74,296(y_2^* + y_4^*),$$

$$L_{III} = 69,143(y_1 + y_3) + 74,857(y_2 + y_4),$$

$$L_{IV^*} = 72(y_1^* + y_2^* + y_3^* + y_4^*),$$

$$L_{IV} = 72(y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

$$L_V = 2880;$$

$$s_{I^*}^2 = 9608,8 \cdot 81,7, \quad s_I^2 = 8475,2 \cdot 81,7,$$

$$s_{II^*}^2 = 16111,7 \cdot 81,7, \quad s_{II}^2 = 12654,4 \cdot 81,7,$$

$$s_{III^*}^2 = 18352,2 \cdot 81,7, \quad s_{III}^2 = 13577,2 \cdot 81,7,$$

$$s_{IV^*}^2 = 18377,0 \cdot 81,7, \quad s_{IV}^2 = 13607,7 \cdot 81,7,$$

$$s_V^2 = 15170,8 \cdot 81,7.$$

PRZYKŁAD 2. Za obszar D przyjmijmy tu prostokąt o bokach $6\text{ m} \times 12\text{ m}$ i rozważymy, tak jak poprzednio, szacowanie na podstawie czterech próbek umieszczonych w środkach czterech boków tego prostokąta, pierwsza i trzecia próbka pośrodku boków krótszych, druga i czwarta — pośrodku boków dłuższych.

Mamy w tym przykładzie

$$\begin{aligned}
 L_{I*} &= 13,735(y_1^* + y_3^*) + 14,338(y_2^* + y_4^*) + 158,54, \\
 L_I &= 15,952(y_1 + y_2) + 16,218(y_2 + y_4) + 76,60, \\
 L_{II*} &= 16,987(y_1^* + y_3^*) + 16,964(y_2^* + y_4^*), \\
 L_{II} &= 17,590(y_1 + y_3) + 17,482(y_2 + y_4), \\
 L_{III*} &= 18,086(y_1^* + y_3^*) + 17,914(y_2^* + y_4^*), \\
 L_{III} &= 18,114(y_1 + y_3) + 17,886(y_2 + y_4), \\
 L_{IV*} &= 18(y_1^* + y_2^* + y_3^* + y_4^*), \\
 L_{IV} &= 18(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\
 L_V &= 720; \\
 s_{I*}^2 &= 562,27 \cdot 81,7, & s_I^2 &= 218,92 \cdot 81,7, \\
 s_{II*}^2 &= 589,4 \cdot 81,7, & s_{II}^2 &= 332,24 \cdot 81,7, \\
 s_{III*}^2 &= 635,61 \cdot 81,7, & s_{III}^2 &= 337,52 \cdot 81,7, \\
 s_{IV*}^2 &= 635,64 \cdot 81,7, & s_{IV}^2 &= 337,56 \cdot 81,7, \\
 s_V^2 &= 1955,32 \cdot 81,7.
 \end{aligned}$$

Widzimy z tych przykładów, że błędy losowe pomiarów bardzo wyraźnie pogarszają dokładność oszacowania. Średnia arytmetyczna z pomiarów dokładnych L_{IV} jest w przykładzie 1 dokładniejsza od wszystkich ocen oprócz oceny L_{I*} . W przykładzie 2 średnia arytmetyczna pomiarów dokładnych L_{IV} jest dokładniejsza od wszystkich ocen utworzonych z pomiarów obarczonych błędami.

Widzimy dalej, że w przykładzie 1 współczynniki przy obserwacjach w ocenach L_I i L_{I*} są około dwa razy mniejsze od analogicznych współczynników w pozostałych ocenach, natomiast wyrazy wolne w tych ocenach L_I i L_{I*} są dość duże. W przykładzie 2, gdzie obszar D jest cztery razy mniejszy, różnice między współczynnikami przy obserwacjach w ocenach L_I i L_{I*} i współczynnikami przy obserwacjach w pozostałych ocenach są dużo mniejsze. Stosunkowo małe są także wyrazy wolne w ocenach L_I i L_{I*} . Efekty te wynikają stąd, że z małym obszarem D z przykładu 2 obserwacje są o wiele mocniej skorelowane, niż z dużym obszarem w przykładzie 1. Dlatego też w ocenach L_I i L_{I*} w przykładzie 1 znacznie większa rola przypada wyrazom wolnym, a mniejsza obserwacjom niż w przykładzie 2.

Widzimy z kolei, że w przykładzie 1 oceny L_{II*} , L_{III*} , L_{IV*} są wszystkie mniej dokładne niż „samobójcza” ocena L_V . W przykładzie 2, wskutek

większego skorelowania obserwacji z szacowanym obszarem, sytuacji takiej nie ma.

Widzimy wreszcie, że w żadnym przypadku nie ma wyraźnych różnic w dokładności między najlepszą średnią ważoną a średnią arytmetyczną. Co więcej, w przykładach tych widzimy ścieranie się dwóch wpływów, tego, który sprawia, że ważniejsze są obserwacje mocniej skorelowane z obszarem, i tego, który sprawia, że obserwacje skorelowane między sobą są mało ważne, bo jedna poniekąd powtarza drugą. Otóż w przykładzie 1 próbki są takie odległe, że przeważa pierwszy z tych wpływów, skutkiem czego w najlepszej średniej ważonej większe są współczynniki przy próbach zrobionych w środku dłuższych boków. W przykładzie 2 przeważa zaś wpływ drugi: w najlepszej średniej ważonej większe są współczynniki przy próbach zrobionych w środkach krótszych boków, mimo że z osobna każda z nich jest z obszarem szacowanym skorelowana mniej niż próby zrobione w środkach boków dłuższych. Można by więc wybrać prostokąt o wielkości pośredniej, dla którego najlepsza średnia ważona byłaby po prostu średnią arytmetyczną. Zdaje się to świadczyć o tym, że nie należy się spodziewać istotnego poprawienia dokładności szacowania na drodze zastąpienia średniej arytmetycznej przez najlepszą średnią ważoną. Możliwe jest natomiast znaczne polepszenie dokładności szacowania, gdy szacuje się za pomocą ogólnej funkcji liniowej (ocena I).

Dla obliczenia kowariancji $\omega(y_i^*, Y)$ trzeba znajdować wartości całek

$$I(a, b, A) = \int_0^a \int_0^b 10^{-\sqrt{x^2+y^2}/A} dx dy.$$

Tak na przykład w przykładzie 1 znajdujemy

$$\omega(y_1^*, Y) = \iint_D f(d(p_1, q)) dq = 2s^2 I(6, 12, 10).$$

Otóż przez podstawienie $x/A = u$, $y/A = v$ dochodzimy do identyczności

$$I(a, b, A) = A^2 I(a/A, b/A, 1).$$

Podobnie obliczanie wariancji $\omega(Y, Y)$ daje się sprowadzić do operowania wyrażeniami, w których funkcją podcałkową jest $10^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. W tym ostatnim przypadku trzeba znać wiele wartości $I(x, y, 1)$ dla wielu wartości x i y . Aby móc obliczać różne przykłady, obliczyliśmy⁽⁵⁾ sporo wartości funkcji $I(x, y, 1)$. Podaję je w tablicy 8.

(5) Rachunki wykonała L. Zubrzycka.

Zwróćmy wreszcie uwagę na to, że ze względu na związki pozwalające operować funkcją $I(x, y, 1)$, przykłady 1 i 2, w których przyjęto za funkcję korelacyjną złożeń funkcję (10.3), a więc funkcję kształtu $e^{-d/A}$ ze stałą $A = 10$, ilustrują jednocześnie sytuacje, jakie zachodziłyby przy funkcjach korelacyjnych z innymi stałymi A . Gdyby na przykład $A = 37,9$, jak w przypadku wyrównania współczynników korelacji obliczonych ze wszystkich mapek, to z przykładów 1 i 2 otrzymalibyśmy natychmiast przykłady odnoszące się do prostokątów o bokach $37,9/4,61 = 8,22$ razy dłuższych, z czterema obserwacjami w ich środku; trzeba by tylko wszystkie stałe c_i , występujące w ocenach, pomnożyć przez $8,22^2 = 67,57$, a wszystkie wypisane tam kwadraty błędów — przez $67,57^2 = 4573$.

TABLICA 8

Wartości całki $I(x, y, 1)$

$x \backslash y$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,1	0,0084							
0,2	,0153	0,0284						
0,3	,0209	,0390	0,0541					
0,4	,0253	,0476	,0664	0,0819				
0,5	,0288	,0545	,0763	,0955	0,1095			
0,6	,0316	,0600	,0843	,1047	,1216	0,1355		
0,7	,0339	,0644	,0907	,1130	,1315	,1467	0,1592	
0,8	,0356	,0678	,0958	,1196	,1394	,1558	,1693	0,1803
1,0		,0728		,1291		,1691		,1965
1,2		,0760	0,1194	,1352		,1777		,2071
1,4		,0780		,1391		,1832		,2139
1,6		,0793		,1416		,1868		,2184
2,0				,1441				,2230
2,4				,1451		0,1919		,2249

Wartości całki $I(x, y, 1)$

$x \backslash y$	1,0	1,2	1,4	1,6	2,0	2,4
1,0	0,2148					
1,2	,2269	0,2401				
1,4	,2348	,2488	0,2581			
1,6	,2400	,2546	,2643	0,2708		
2,0		,2606		,2777	0,2851	
2,4		,2631		,2806	,2882	0,2914

§ 11. Relacje graniczne przy rosnącym obszarze szacowania.

W tym paragrafie pragnę rozważyć pewne relacje graniczne, ważne dla oszacowania całki Y za pomocą najlepszej średniej ważonej.

Zacznijmy od tego, że dla całki Y zachodzi pewnego rodzaju prawo wielkich liczb. Rozważmy bowiem zamiast całki Y , która podaje jak-gdyby globalną zawartość kruszcu na obszarze D , średnią

$$(11.1) \quad \eta = \frac{1}{|D|} Y.$$

Mamy na wariancję całki Y (porównaj wzór (9.12)) wzór

$$\omega(Y, Y) = s^2 \iint_D \left\{ \iint_D f(d(p, q)) dq \right\} dp.$$

Wobec wzoru (11.1) wariancja średniej η jest $|D|^2$ razy mniejsza niż wariancja całki Y ,

$$(11.3) \quad \omega(\eta, \eta) = \frac{s^2}{|D|^2} \iint_D \left\{ \iint_D f(d(p, q)) dq \right\} dp.$$

Otóż łatwo udowodnić

TWIERDZENIE 1. *Jeśli* ⁽⁶⁾

$$(11.4) \quad C = \iint |f(d(p, q))| dq < \infty,$$

to

$$(11.5) \quad \lim_{D \rightarrow \infty} \omega(\eta, \eta) = 0.$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że wówczas

$$\iint_D \left\{ \iint_D f(d(p, q)) dq \right\} dp \leq \iint_D C dp = |D| C,$$

i stąd, wobec wzoru (11.3),

$$\omega(\eta, \eta) \leq s^2 / |D|,$$

a to pociąga za sobą (11.5), c. n. d.

Nieco trudniej jest udowodnić, że współczynnik korelacji między pojedynczą próbką $y_0^* = y^*(p_0)$ a całką Y zmierza do zera, gdy obszar D rośnie nieograniczenie. Okazuje się przy tym, że ta zbieżność zależy od sposobu wzrastania obszaru D . Będziemy mówić, że obszar D wzrasta *właściwie*, jeśli dla pewnego $\varepsilon > 0$ liczba rozłącznych kółek o średnicy ε zawartych w obszarze D wzrasta nieograniczenie przy wzroście obszaru D . Udowodnimy

TWIERDZENIE 2. *Jeśli*

$$(11.6) \quad f(d) \geq 0,$$

$$(11.7) \quad C = \iint |f(d(p, q))| dq < \infty$$

(*) Gdy nie podaję granic całkowania, należy rozumieć, że całkowanie rozciąga się na całą płaszczyznę.

i obszar D wzrasta właściwie, to

$$(11.8) \quad \lim_{D \rightarrow \infty} R(y^*(p_0), Y) = 0.$$

Dowód. Z definicji mamy

$$(11.9) \quad R(y^*(p_0), Y) = \frac{\omega(y^*(p_0), Y)}{\sqrt{\omega(y^*(p_0), y^*(p_0)) \omega(Y, Y)}}.$$

Otóż, ponieważ (zobacz wzór (9.11))

$$\omega(y^*(p_0), Y) = s^2 \iint_D f(d(p_0, q)) dq,$$

więc na mocy (11.6) i (11.7) dla obszaru D mamy

$$\omega(y^*(p_0), Y) \leq C,$$

czyli licznik prawej strony wzoru (11.9) jest ograniczony. Dalej, $\omega(y^*(p_0), y^*(p_0))$ jest stałe, mianowicie równe s^{*2} . Aby więc udowodnić (11.8), wystarczy pokazać, że jeśli obszar D będzie wzrastał właściwie, to przy $|D| \rightarrow \infty$ będzie $\omega(Y, Y) \rightarrow \infty$.

Niech teraz K_1, K_2, \dots, K_n oznaczają rozłączne kółka o średnicy ε zawarte w obszarze D i niech

$$Y_i = \iint_{K_i} y(p) dp \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad Y_0 = \iint_{D'} y(p) dp,$$

gdzie D' jest resztą obszaru D pozostałą po wyjęciu kółek K_1, K_2, \dots, K_n . Będzie więc

$$Y = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n.$$

Korzystając z tego przedstawienia możemy napisać następujący wzór na wariancję $\omega(Y, Y)$ całki Y :

$$\begin{aligned} \omega(Y, Y) = & \omega(Y_0, Y_0) + \omega(Y_0, Y_1) + \dots + \omega(Y_0, Y_n) + \dots + \\ & + \omega(Y_n, Y_0) + \omega(Y_n, Y_1) + \dots + \omega(Y_n, Y_n). \end{aligned}$$

Ze względu na nieujemność funkcji korelacyjnej (wzór (11.6)) będziemy mieli dla wszelkich $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ nierówność $\omega(Y_i, Y_j) \geq 0$. To wraz z poprzednim daje nam nierówność

$$\omega(Y, Y) \geq \omega(Y_1, Y_1) + \omega(Y_2, Y_2) + \dots + \omega(Y_n, Y_n),$$

a ponieważ wariancje całek Y_1, Y_2, \dots, Y_n są wszystkie jednakowe, więc

$$\omega(Y, Y) \geq n \omega(Y_1, Y_1).$$

Ponieważ zaś z założenia przy wzrastaniu obszaru D liczba n zawartych w nim rozłącznych kółek o promieniu ε wzrasta nieograniczenie, więc otrzymujemy stąd, że przy $|D| \rightarrow \infty$ jest $\omega(Y, Y) \rightarrow \infty$, co kończy dowód twierdzenia 2.

Pokażemy teraz, że w twierdzeniu 2 założenie o właściwym wzrastaniu obszaru D jest istotne. Udowodnimy mianowicie

Twierdzenie 3. *Jeśli spełnione są tylko założenia (11.6) i (11.7) twierdzenia 2, to istnieje taki ciąg D_1, D_2, \dots obszarów, że*

$$(11.10) \quad |D_n| \rightarrow \infty \quad \text{dla} \quad n \rightarrow \infty$$

oraz

$$(11.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(y^*(p_0), Y) = a > 0.$$

Dowód. Analizując wzór

$$\omega(Y, Y) = s^2 \iint_D \left\{ \iint_D f(d(p, q)) dq \right\} dp$$

na wariancję całki

$$Y = Y(D) = \iint_D y(p) dp,$$

zauważamy łatwo, że dla każdego D zachodzi nierówność

$$(11.12) \quad \omega(Y(D), Y(D)) \leq s^2 |D|^2.$$

Wobec (11.7) mamy relację

$$(11.13) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} f(d) = 0.$$

Opierając się na tych dwóch relacjach definiujemy wstępujący ciąg obszarów

$$(11.14) \quad D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$$

spełniający twierdzenie 3. Idea jest tu taka: Licznik prawej strony wzoru (11.9) jest, jak już wiemy, ograniczony, a ponieważ ze względu na (11.6) i (11.14) nie będzie malał, więc będzie miał granicę i to dodatnią. Występująca w mianowniku prawej strony wzoru (11.9) wariancja $\omega(Y, Y)$ także może tylko rosnać przy zwiększaniu obszaru D . Twierdzenie 3 będzie więc udowodnione, gdy skonstruujemy ciąg (11.14) obszarów tak, żeby ich pola rosły nieograniczenie i żeby wariancje całek

$$Y_n = Y(D_n) = \iint_{D_n} y(p) dp$$

były ograniczone. Opiszemy teraz, jak można to zrobić.

Za obszar D_1 weźmiemy koło K_1 o polu 1 ze środkiem w punkcie p_0 . Za obszar D_2 weźmiemy obszar D_1 , do którego dodano koło K_2 o polu $\frac{1}{2}$ położone tak daleko od obszaru D_1 , żeby było

$$(11.15) \quad \omega(Y(D_1), Y(K_2)) \leq s^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

można to zrobić ze względu na (11.13). Ogólnie, gdy już określimy obszar D_n , za D_{n+1} weźmiemy obszar złożony z D_n i koła K_{n+1} o polu $1/(n+1)$, tak oddalonego od obszaru D_n , żeby było

$$(11.16) \quad \omega(Y(D_n), Y(K_{n+1})) \leq s^2/(n+1)^2.$$

Ze względu na (11.12) i (11.15) będziemy wówczas mieli

$$\omega(Y(D_1), Y(D_1)) \leq s^2 \cdot 1^2,$$

$$\begin{aligned} \omega(Y(D_2), Y(D_2)) &= \omega(Y(D_1), Y(D_1)) + 2\omega(Y(D_1), Y(K_2)) + \\ &\quad + \omega(Y(K_2), Y(K_2)) \leq s^2 \{1^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\} \end{aligned}$$

i ogólnie, przez łatwą indukcję,

$$\omega(Y(D_n), Y(D_n)) \leq s^2 \{1^2 + 3[(1/2)^2 + (1/3)^2 + \dots + (1/n)^2]\}.$$

Jak wiadomo, szereg $(1/2)^2 + (1/3)^2 + \dots$ jest zbieżny. Oznaczając jego sumę przez γ , będziemy więc mieli dla każdego n

$$\omega(Y(D_n), Y(D_n)) < s^2(1 + 3\gamma),$$

czyli wariancje całek Y_n będą wspólnie ograniczone, a zatem zbieżne. Ponieważ współczynniki kowariancji $\omega(y^*(p_0), Y(D_n))$ są także zbieżne, więc otrzymujemy stąd tezę (11.11) twierdzenia 3.

Z definicji obszarów D_n mamy $|D_n| = 1 + (1/2) + \dots + (1/n)$, a więc pole obszaru D_n jest równe n -tej sumie częściowej rozbieżnego szeregu harmonicznego. Wynika stąd (11.10), co kończy dowód twierdzenia 3.

Przyjęte w naszych twierdzeniach założenie (11.4) wydaje się dość naturalne. Jest ono spełnione przez wszystkie funkcje korelacyjne, których używaliśmy do wyrównywania empirycznych współczynników korelacji.

Paradoksalne twierdzenie 3 udowodniliśmy tylko dzięki temu, że rozpatrzone tam obszary D_n są bardzo poszatkowane. Być może udałoby się zbudować analogiczny kontrprzykład z obszarami spójnymi, ale musiałyby się one wyciągać w cieniutką nitkę szybko uciekając do nieskończoności. W praktycznych sytuacjach mamy do czynienia przeważnie z obszarami prostokątnymi lub zbliżonymi do prostokątnych i wydaje się, że założenie o właściwym wzroście obszaru dobrze opisuje te sytuacje, a więc że przy dużych obszarach pojedyncza próbka będzie z wartością obszaru niemal nieskorelowana.

Z udowodnionego twierdzenia 1 wynika, że przy dostatecznie dużych obszarach D średnia η jest niemal stała, a więc niemal równa m . Szacowanie średniej η na podstawie obserwacji $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*$ sprowadza się wówczas w zasadzie do tego, żeby dobrze wyestymować m . Dlatego w tej sytuacji w ocenie I, przy której zakłada się znajomość m , obserwacje $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*$ będą odgrywały małą rolę. Przy ocenie II minimizowanie wyrażenia (11.4) sprowadzi się, poza niezbędnym dostosowaniem do szacowania średniej η (wszystkie stałe będą w tym przypadku $|D|$ razy mniejsze), do minimizowania wyrażenia

$$(11.17) \quad E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - m)^2.$$

Przy ocenie III, ze względu na warunek (9.5), który dostosowany do szacowania średniej η będzie miał postać

$$(11.18) \quad c_1 + \dots + c_k = 1,$$

wyrażenie, które trzeba będzie minimizować, będzie jeszcze prostsze, a mianowicie takie:

$$E(c_1(y_1^* - m) + \dots + c_k(y_k^* - m))^2 = D^2(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*).$$

Będzie więc chodziło po prostu o zbudowanie średniej ważonej z minimalną wariancją.

Wreszcie, ze względu na to, że przy nieujemności funkcji korelacyjnej i przy warunku (11.18) zachodzi łatwa do udowodnienia nierówność

$$D^2(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*) \geq (s^2 + s'^2)/k,$$

może się zdarzyć, że gdy obszar będzie taki duży, że średnia η będzie miała małą wariancję, a obserwacje y_1^*, \dots, y_k^* będą z nią niemal nieskorelowane, wówczas będzie spełniona nierówność

$$(11.19) \quad E(c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^* - \eta)^2 > \omega(\eta, \eta).$$

Zachodzenie nierówności (11.19) oznacza, że ocena V jest wówczas dokładniejsza od oceny III. „Dostateczna wielkość” obszaru D zależy od tego, jak szybko maleje funkcja korelacyjna. Gdy maleje szybko, wtedy już przy małym obszarze może zachodzić nierówność (11.19), gdy maleje wolno, wówczas nawet przy dużych obszarach jeszcze nierówność (11.19) nie będzie zachodziła. Można wyrażenie „trudne złożenie” rozumieć tak: „przy możliwej do wykonania liczbie prób zachodzi nierówność (11.19)”.

W paragrafie poprzednim podaliśmy przykłady numeryczne, w których opisana sytuacja rzeczywiście zachodzi.

§ 12. Kiedy średnia arytmetyczna jest najlepszą średnią ważoną?

W § 9 podaliśmy układy równań, które trzeba rozwiązać przy konstruowaniu ocen. Są to na ogół układy tylu równań liniowych, ile jest próbek.

Ich rozwiązanie stanowi dość poważne trudności rachunkowe. W paragrafie niniejszym chcę omówić uproszczenia w zakresie wyznaczania ocen w przypadku, gdy próbki są od siebie dostatecznie odległe.

Przyjmijmy następujące założenie:

$$(Z) \quad \omega(y_i^*, y_j^*) = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Empiryczne współczynniki korelacji, któreśmy wyrównywali w § 8 dały się najlepiej wyrównać za pomocą funkcji wykładniczej. Przy takiej funkcji korelacyjnej nawet bardzo odległe próbki są skorelowane choćby nieznacznie. Widać też jednak, że współczynnik korelacji maleje szybko wraz z odległością. Gdy jest on mniejszy od $\frac{1}{100}$, można z praktycznego punktu widzenia uważać założenie (Z) za spełnione. Krzywa wyrównująca współczynniki korelacji obliczone ze stumetrówki (rys. 4) wskazuje, że wystarczyłoby w tym celu, żeby próbki były od siebie odległe o więcej niż 21,2 metra. Krzywa wyrównująca współczynniki korelacji obliczone ze wszystkich mappek (rys. 3, linia 3) wymaga do praktycznego spełnienia założenia (Z) więcej, a mianowicie, żeby próbki były od siebie odległe o więcej niż 184 metry.

Otóż przy założeniu (Z) owe układy równań liniowych stanowiące trudność rachunkową rozpadają się na pojedyncze równania o jednej niewiadomej i można ich rozwiązania napisać w postaci jawnej. I tak, rozwiązując odpowiednie układy równań z § 9, otrzymujemy co następuje:

TWIERDZENIE 4. *Przy założeniu (Z) ocena I wyraża się wzorem $c_0 + c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*$, gdzie dla $i = 1, 2, \dots, k$ jest*

$$c_i = \omega(y_i^*, Y) / \omega(y_i^*, y_i^*) = \omega(y_i^*, Y) / s^{*2},$$

$$c_0 = m(|D| - c_1 - \dots - c_k).$$

TWIERDZENIE 5. *Przy założeniu (Z) ocena III wyraża się wzorem $c_1 y_1^* + \dots + c_k y_k^*$, gdzie*

$$c_i = \{\omega(y_i^*, Y) - [\omega(y_1^*, Y) + \dots + \omega(y_k^*, Y)]/k\} / s^{*2} + |D|/k.$$

Jak już wiemy, współczynnik kowariancji między całą Y a próbką w punkcie p wyraża się całą

$$\omega(y^*(p), Y) = s^2 \iint_D f(d(p, q)) dq.$$

Przyjmijmy teraz, że spełnione jest założenie (11.4) twierdzenia 1. Wtedy, gdy wraz z punktem p obszar D zawiera koło o środku p i o dostatecznie dużym promieniu, współczynnik $\omega(y^*(p), Y)$ będzie niemal

równy swojej wartości granicznej, to jest takiej, jak gdyby obszar D był całą płaszczyzną. Z praktycznego punktu widzenia wartość graniczną można uznać za osiągniętą, gdy aktualna wartość współczynnika różni się od granicznej, powiedzmy, o mniej niż setną część wartości granicznej. Otóż, gdy funkcją korelacyjną złoża jest funkcja $10^{-d/4}$, wystarczy w tym celu, żeby promień tego koła był trochę większy niż $2A$. Pokazuje to następująca tablica 9, w której

$$K(r) = \iint_{x^2+y^2 < r^2} 10^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

TABLICA 9

r	2	3	∞
$K(r)$	1,17255	1,18331	1,18508
$K(r)/K(\infty)$	0,9894	0,9985	1

Gdy tak jest, to znaczy, gdy wszystkie próbki są oddalone od brzegu obszaru D o więcej niż $2A$, wtedy wszystkie współczynniki $\omega(y_i^*, Y)$ są praktycznie równe i z twierdzenia 2 otrzymujemy, że ocena III (najlepsza średnia ważona) jest taka sama, jak ocena IV (średnia arytmetyczna).

Płynie stąd bardzo ważny wniosek praktyczny:

Jeśli próbki odległe są od brzegu szacowanego obszaru D oraz wzajemnie między sobą o więcej niż 184 metry (sądząc na podstawie krzywej wyrównującej współczynniki korelacji obliczone ze wszystkich mapek), to szacując za pomocą funkcji liniowych jednorodnych spełniających warunek (9.5), otrzymujemy jako najlepszą ocenę — średnią arytmetyczną, a w ocenie I wszystkie próbki będą miały jednakowe współczynniki.

§ 13. O różnicy między stumetrówką a mapkami. Czym wytłumaczyć zaobserwowaną dużą różnicę między funkcją korelacyjną obliczoną ze wszystkich mapek a funkcją korelacyjną obliczoną ze stumetrówki? Niewątpliwie tym, że stumetrówka przedstawia mały fragment złoża, a mapki są wzięte z rozmaitych miejsc, bardzo zasobnych i bardzo ubogich. Świadczy o tym tablica 10, w której podajemy średnie względnej zawartości cynku obliczone z każdej mapki z osobna.

Widzimy tu ogromną rozpiętość zawartości cynku: od 3,47‰ na mapce F/1 aż do 26,62‰ na mapce A/10 (na mapce A/10 w 36 próbach względna zawartość cynku przekracza 37‰, a największa zaobserwowana zawartość wynosi 85‰).

Także wariancje względnej zawartości cynku obliczone z różnych mapek różnią się znacznie. Dla orientacji kilka z nich podajemy w tablicy 11.

TABLICA 10

Średnie względnej zawartości cynku

Mapka	Liczba próbek	Średnia %
A/1	161	10,58
A/2	86	6,36
A/3	153	11,66
A/4	114	9,30
A/5	84	9,15
A/6	115	10,89
A/7	122	10,26
A/8	125	13,21
A/9	109	12,87
A/10	158	26,62
C/1	113	6,76
C/2	112	10,05
C/3	105	9,41
C/4	120	9,40
D/1	104	5,34
E/1	179	9,62
E/2	117	12,68
F/1	99	3,47
F/2	101	5,22
F/3	98	8,30
F/4	96	3,55
Wszystkie mapki	2483	10,23
Stu-metrówka	84	11,81

TABLICA 11

Wariancje względnej zawartości cynku

Mapka	Wariancja	Średnia %
A/10	229,6	26,62
A/7	88,3	10,26
F/4	18,3	3,55
Wszystkie mapki	98,7	10,23
Stu-metrówka	39,8	11,81
Średnie z mapek	22,0	(9,75)(⁷)

(⁷) Liczba ta różni się od 10,23, jest to bowiem średnia średnich, a nie średnia wszystkich obserwacji.

To, że współczynniki korelacji obliczone ze wszystkich mapek maleją przy wzrastającej odległości próbek dużo wolniej, niż obliczone ze stumetrówki, można wytłumaczyć tym, że średnie zawartości na poszczególnych mapkach są bardzo różne. Można by bowiem przypuścić, że po pierwsze, istnieje pewna strukturalna zmienność złoża, objawiająca się tym, że w różnych miejscach na tej samej mapce wartości rozważanego parametru są różne, po drugie, ta strukturalna zmienność złoża jest taka sama na wszystkich mapkach i po trzecie, mapki różnią się średnią wartością parametru („mapki” oznaczają tu różne złoża, na tyle od siebie odległe, że nie trzeba się liczyć z podobieństwem między nimi, pochodzącym z sąsiedztwa). Oznaczmy przez x zależną od mapki średnią wartość parametru, a przez $y(p)$ — odchylenie od średniej x zależne od punktu mapki. Dochodzimy w ten sposób do opisu złoża, w którym wynik $y^*(p)$ obserwacji traktujemy jako sumę trzech rzeczy: zależnej od mapki średniej x , zależnego od punktu p odchylenia $y(p)$ i błędu ε obserwacji. Jeżeli potraktujemy odchylenia $y(p)$ jako proces stochastyczny stacjonarny i izotropowy, scharakteryzowany przez wariancję s^2 i funkcję korelacyjną $f(d)$ (ponieważ są to odchylenia od średniej, więc przyjmujemy, że wartość oczekiwana $y(p)$ jest równa zeru), jeżeli przyjmiemy, że błędy obserwacji mają wartość oczekiwaną zero i wariancję s'^2 , i wreszcie, jeśli przyjmiemy, że średnie x mają wartość oczekiwaną m i wa-

riancję s''^2 oraz że $x, y(p)$ i ε są wzajemnie niezależne, to dla współczynnika korelacji między obserwacjami w punktach p i q otrzymamy wzór

$$R(y^*(p), y^*(q)) = \frac{s^2 f(d(p, q)) + s''^2}{s^2 + s'^2 + s''^2}.$$

Widać z tego wzoru, że w opisanej sytuacji, gdyby nawet przy wzrastaniu odległości punktów p i q wartość $f(d(p, q))$ zmierzała do zera, współczynnik korelacji między obserwacjami nie zmierzałby do zera, ale do $s''^2/(s^2 + s'^2 + s''^2)$. Podstawiając za s''^2 wariancję średnich z mapek, za $s^2 + s'^2 + s''^2$ wariancję procentowej zawartości cynku obliczoną ze wszystkich mapek, otrzymamy jako tę asymptotyczną wartość współczynnika korelacji między obserwacjami liczbę $22,0/98,7 = 0,223$. Gdy zaś przyjrzymy się rysunkowi 3, zobaczymy, że taka asymptotyczna wartość wcale nie wydaje się wyłączona przez przedstawione tam wyniki obliczeń.

W przedstawionym powyżej opisie przyjmuje się, że odchylenia od średniej, $y(p)$, mają taką samą wariancję i taką samą funkcję korelacyjną, niezależnie od średniej x . Zdają się temu przeczyć liczby przedstawione w tabelicy 11. Wskazują one na to, że odchylenia od średniej x mają wariancję tym większą, im większa jest ta średnia. Ponadto według tego przedstawionego wyżej opisu wariancja próbek ze stumetrówki przybliża $s^2 + s'^2$, wariancja średnich z mapek przybliża s''^2 , a wariancja próbek obliczona ze wszystkich mapek przybliża $s^2 + s'^2 + s''^2$.

Tymczasem z tabelicy 11 odczytujemy $s^2 + s'^2 \approx 39,8$, $s''^2 \approx 22,0$, $s^2 + s'^2 + s''^2 \approx 98,7$, a $39,8 + 22,0 = 61,8$, co jest znacznie mniejsze niż 98,7.

W tym stanie rzeczy trzeba: 1° zbadać bliżej zależność struktury odchyleń $y(p)$ od wielkości średniej x , 2° rozważyć, jak należałoby przy szacowaniu taką zależność uwzględnić.

Do zagadnienia 1° potrzebne są nowe obserwacje. Należałoby mianowicie wybrać ilość złóż, reprezentujących różnorodność zasobności spotykanych w eksploatacji, i w tych złożach zrobić serie po 100 obserwacji co metr (czyli „stumetrówki”). Zagadnienie 2° jest przedmiotem naszych dalszych dociekań.

Prace cytowane

- [1] А. К. Болдырев, *Теория подсчёта запасов металла в разжурфованной россыпи*, Горный Журнал 7-8 (1914) (cytuje za [10]).
- [2] Н. Стаммер, *Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, przekład rosyjski: *Математические методы статистики*, Москва 1948.
- [3] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. III, Москва - Ленинград 1949.

- [4] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Москва - Ленинград 1950.
- [5] А. М. Яглом, *Введение в теорию стационарных случайных функций*, Успехи матем. наук 7(1952), стр. 2-168.
- [6] R. Krajewski, *Określenie zmienności złoża i jego geologicznego rozpoznania za pomocą wskaźników liczbowych*, Przegląd Geologiczny 4 (1953), str. 156-160.
- [7] — *Ustalenie gęstości sieci rozpoznawczej złóż na podstawie stopnia wiarygodności zasobów*, Przegląd Geologiczny 1 (1956), str. 1-5.
- [8] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, Warszawa, 1954.
- [9] H. Sichel, *New methods in the statistical evaluation of mine sampling data*, Trans. Inst. Min. Metall. 1952, str. 261-288.
- [10] В. И. Смирнов, *Подсчёт запасов минерального сырья*, Москва 1950, przekład polski: *Ustalenie zasobów surowców mineralnych*, Warszawa 1954.
- [11] H. Steinhaus, *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfsmittel zu Untersuchungen in Naturwissenschaften und Produktion*, Die Hauptreferate des 8. Polnischen Mathematikerkongresses von 6. bis 12. September 1953 in Warschau, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, str. 69-94.
- [12] A. Trembecki, *Metodyka ustalania zasobów w świetle analizy klasycznej oraz w świetle analizy statystycznej*, Zeszyty Naukowe AGH, Górnictwo 1 (1954), str. 75-95.
- [13] H. Wold, *Demand analysis*, Uppsala 1952.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 7. 2. 1956

С. ЗУБРЖИЦКИЙ (Вроцлав)

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАЛЕЖЕЙ

РЕЗЮМЕ

В статье решён следующий вопрос: зная результаты y_1^*, \dots, y_n^* измерений параметра y месторождения в точках p_1, \dots, p_n области D , на которой оно залегаёт, оценить с наименьшей квадратной ошибкой среднее значение параметра на этой области.

Вопрос решается при следующих предположениях: 1° значения $y(p)$ рассматриваемого параметра в отдельных точках области D составляют плоский стационарный стохастический процесс, непрерывный и изотропный, т. е. ожидаемое значение параметра y равно m во всех точках, его дисперсия — s^2 , а коэффициент корреляции R между значениями параметра в двух разных точках зависит только от расстояния d этих точек: $R = f(d)$; 2° измерения параметра обременены случайными ошибками, которые не зависят ни от измеряемого параметра, ни друг от друга и ожидаемое значение которых 0 и одна и та же дисперсия s'^2 .

В статье решено, как оценивать, на основании измерений, произвольные постоянные m, s^2, s'^2 и функцию $f(d)$, называемую *функцией корреляции*. Величины эти определены на основании измерений содержания цинка в месторождениях Верхней Силезии. Кроме того приведены числительные примеры содержания цинка, которые показывают точность наилучшей оценки в сравнении с другими оценками. Определено расстояние выборок, при котором выборки эти можно рассматривать как величины некоррелированы.

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

ON ESTIMATING GANGUE PARAMETERS

SUMMARY

The author solves the following problem: given the results of y_1^*, \dots, y_k^* measurements of the parameter y of a gangue at the points p_1, \dots, p_k of the region D on which it lies, estimate with the least square error the mean value of the parameter over this region. This problem is solved under the following assumptions. Firstly, it is assumed that the values $y(p)$ of the parameter in question at the individual points p of the region D form a plane stochastic process which is stationary, continuous and isotropic, *i. e.* that the expected value of the parameter y is equal to m at every point, its variance is s^2 and the coefficient of the correlation R between the values of the parameter at two different points depends only on the distance d between those points, $R = f(d)$; secondly, it is assumed that the measurements of the parameter are subject to random errors, independent of the measured parameter and independent of one another, with the expected value 0 and uniform variation s'^2 . It is shown how the constants m , s^2 and s'^2 appearing in this problem and the function $f(d)$, termed the correlation function, should be estimated on the grounds of the measurement results. The author determines these quantities on the ground of the measurements of zinc content in the Upper Silesia gangues. For the zinc content, numerical examples are given, showing the accuracy of the optimal estimate as compared with other estimates. The author determines the distance of samples for which they can be regarded as uncorrelated.
