ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1961)

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

O SPROWADZANIU RÓWNAŃ Z CZTEREMA ZMIENNYMI DO POSTACI KANONICZNEJ CAUCHY'EGO Z CZTEREMA ZMIENNYMI

Niniejsza praca jest kontynuacją prac poprzednich ([1], [2], [3]), w których sformułowano pojęcia funkcji anamorfozującej i podano kryteria istnienia funkcji anamorfozującej sprowadzającej równanie $F(x,y,z)=0$ do pierwszej i drugiej postaci kanonicznych równania trzeciego rzędu nomograficznego, formy kanonicznej Cauchy'ego, pierwszej formy Soreau oraz równanie $F(x,y,z,t)=0$ do obu form kanonicznych rzędu czwartego.

I. Dane jest równanie

$$F \equiv F(x,y,z,w) \equiv f(z)+g(x)h(y,w)+k(y,w) = 0. \tag{1}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli*

1. *funkcja F jest określona i ciągła w kostce K, określonej nierównościami*

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad w_0 \leqslant w \leqslant w_1,$$

2. *funkcja F ma w kostce K ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu trzeciego włącznie,*

3. *w kostce K jest $F_x \neq 0$,*

to na to, by funkcja F miała postać (1) *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki:*

$$F_{xz} \equiv 0, \tag{2a}$$

$$F_{yz} \equiv 0, \tag{2b}$$

$$F_{wz} \equiv 0, \tag{2c}$$

$$\frac{\partial^2 \ln|F_x|}{\partial x\,\partial y} \equiv 0, \tag{2d}$$

$$\frac{\partial^2 \ln|F_x|}{\partial x\,\partial w} \equiv 0. \tag{2e}$$

Dowód konieczności. Jeżeli funkcje $h(y, w)$ i $k(y, w)$ są liniowo niezależne w szerszym sensie ([4]), to z twierdzenia o różniczkowalności uogólnionych wielomianów nomograficznych ([4]) oraz z założeń wynika, że funkcje $f(z)$, $g(x)$, $h(y, w)$ i $k(y, w)$ mają ciągłe pochodne występujące w tożsamościach (2). Łatwo więc już sprawdzić, że w takim przypadku tożsamości (2) są spełnione. Jeżeli funkcje $h(y, w)$ i $k(y, w)$ są liniowo zależne w szerszym sensie, to funkcja F przyjmuje postać $F \equiv f(z) + [g(x) + a]h(y, w) + b$, gdzie a i b są liczbami. W tym przypadku funkcje $f(z)$, $g(x)$ i $h(y, w)$ mają odpowiednie pochodne cząstkowe, a funkcja F spełnia tożsamości (2).

Dowód dostateczności. Z tożsamości (2a)-(2c) otrzymujemy

$$F_z \equiv A(z, y, w), \qquad F_z \equiv B(z, x, w), \qquad F_z \equiv C(z, x, y).$$

Tożsamości te są spełnione w całej kostce K, a zatem

$$A(z, y, w) \equiv B(z, x, w) \equiv C(z, x, y) \equiv D(z).$$

Mamy więc

$$F_z \equiv D(z). \tag{3}$$

Z tożsamości (3) wynika, że

$$F \equiv \int D(z)dz + E(x, y, w). \tag{4}$$

Wstawiając F z tożsamości (4) w tożsamości (2d) i (2e) oraz oznaczając $E \equiv E(x, y, w)$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \ln|E_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 \ln|E_x|}{\partial x \partial w} \equiv 0.$$

Stąd wynikają tożsamości

$$\frac{\partial \ln|E_x|}{\partial x} \equiv G(x, w), \qquad \frac{\partial \ln|E_x|}{\partial x} \equiv H(x, y).$$

Tożsamości te są spełnione w całej kostce K, a zatem

$$G(x, w) \equiv H(x, y) \equiv L(x).$$

Mamy więc

$$\frac{\partial \ln|E_x|}{\partial x} \equiv L(x). \tag{5}$$

Z tożsamości (5) wynika, że

$$E \equiv M(y, w)\int\left\{\exp\left[\int L(x)dx\right]\right\}dx + N(y, w). \tag{6}$$

Z tożsamości (4) i (6) wynika, że funkcja F ma postać

$$F \equiv \int D(z)dz + M(y, w)\int\left\{\exp\left[\int L(x)dx\right]\right\}dx + N(y, w).$$

Oznaczając

$$\int D(z)\,dz \equiv f(z), \qquad \int \left\{\exp\left[\int L(x)\,dx\right]\right\} dx \equiv g(x),$$

$$M(y, w) \equiv h(y, w), \qquad N(y, w) \equiv k(y, w),$$

otrzymujemy funkcję F w postaci (1).

II. Funkcja anamorfozująca.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja* $F \equiv F(x, y, z, w)$ *jest określona i ciągła w kostce* K, *określonej nierównościami*

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad w_0 \leqslant w \leqslant w_1,$$

ma w kostce K *ciągłe trzecie pochodne cząstkowe a w kostce* K *spełniony jest warunek* $F_x F_y F_z F_w \neq 0$, *to na to, by istniała trzykrotnie różniczkowalna funkcja anomorfozująca* $\Phi(u)$, *sprowadzająca funkcję* F *do postaci* (1) *i taka, że* $\Phi'(u) \neq 0$, *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki:*

(7a) $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_x}{F_y}\right] \equiv 0,$$

(7b) $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_x}{F_w}\right] \equiv 0,$$

(7c) $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0,$$

(7d) $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0,$$

(7e) $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial w} \ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0.$$

D o w ó d k o n i e c z n o ś c i. Łatwo sprawdzić, że jeżeli istnieje trzykrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$ i $\Phi'(u) \neq 0$ oraz funkcja F spełnia założenia twierdzenia, to warunki (7) są spełnione.

D o w ó d d o s t a t e c z n o ś c i. Z warunku (7a) wynika

(8) $$\frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right] \equiv \frac{1}{F_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right].$$

Z (7b)

(9) $$\frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right] \equiv \frac{1}{F_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right].$$

Z (7c)

(10) $$\frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right] \equiv \frac{1}{F_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right].$$

Z tożsamości (7a) i (7b) otrzymujemy

$$\text{(11)} \qquad \frac{F_{xz}}{F_x F_z} = \frac{F_{yz}}{F_y F_z} = \frac{F_{wz}}{F_w F_z}.$$

Z warunków (7a) i (7d) wynika tożsamość

$$\text{(12)} \qquad -\frac{F_{xxz}F_xF_z - F_{xz}F_{xx}F_z - F_{xz}^2F_x}{F_x^3F_z^2} - \frac{F_{xz}}{F_xF_z}\cdot\frac{F_{xy}}{F_xF_y} + \frac{1}{F_xF_y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xy}}{F_x}\right] \equiv 0,$$

a z warunków (7b) i (7e) tożsamość

$$\text{(13)} \qquad -\frac{F_{xxz}F_xF_z - F_{xz}F_{xx}F_z - F_{xz}^2F_x}{F_x^3F_z^2} - \frac{F_{xz}}{F_xF_z}\cdot\frac{F_{xw}}{F_xF_w} + \frac{1}{F_xF_w}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xw}}{F_x}\right] \equiv 0.$$

Z warunków (8), (9), (10), na podstawie twierdzenia o zależności funkcyjnej ([5]), wynika, że istnieje funkcja $\Psi(u)$ taka, że $\Psi(F) \equiv \dfrac{F_{xz}}{F_xF_z}$. Z własności funkcji F wynika, że funkcja $\Psi(u)$ jest ciągła i różniczkowalna w przedziale I, który wypełniają wartości funkcji F w kostce K. Stąd wynika, że istnieje funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość

$$\text{(14a)} \qquad \frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} \equiv -\Psi(u),$$

z warunkiem $\Phi'(u) \neq 0$.

Z różniczkowalności funkcji $\Psi(u)$ wynika trzykrotna różniczkowalność funkcji $\Phi(u)$, więc spełniona jest także tożsamość

$$\text{(14b)} \qquad \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{xz}}{F_xF_z}.$$

Z tożsamości (14b) oraz tożsamości (11) wynikają warunki

$$\text{(15)} \qquad \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{yz}}{F_yF_z},$$

$$\text{(16)} \qquad \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{wz}}{F_wF_z}.$$

Te trzy warunki można napisać w postaci

$$(17a)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}[\Phi(F)] \equiv 0,$$

$$(17b)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}[\Phi(F)] \equiv 0,$$

$$(17c)\qquad \frac{\partial^2}{\partial w \partial z}[\Phi(F)] \equiv 0.$$

Z tożsamości (12), (14b) i (7a) wynika po przekształceniach tożsamość

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 \ln\left|\dfrac{\partial}{\partial x}[\Phi(F)]\right|}{\partial x \partial y} \equiv 0,$$

a z tożsamości (13), (14b) i (7b) — tożsamość

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \ln\left|\dfrac{\partial}{\partial x}[\Phi(F)]\right|}{\partial x \partial w} \equiv 0.$$

Z twierdzenia 1 wynika więc, że funkcja $\Phi(F)$ ma postać (1).

Funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość (14a) ma postać

$$\Phi(u) \equiv C_1 P(u) + C_2, \quad \text{gdzie} \quad P(u) \equiv \int \exp\left[-\int \Psi(u)du\right]du.$$

Ponieważ z definicji funkcji anamorfozującej równania $\Phi(F) = 0$ i $F = 0$ mają być równoważne, więc $\Phi(0) = 0$, a zatem

$$\Phi(u) \equiv C_1[P(u) - P(0)].$$

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli istnieją funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie* $F(x, y, z, w) = 0$ *do postaci* (1), *to różnią się co najwyżej stałym czynnikiem.*

III. Dane jest równanie

$$(20)\qquad F \equiv F(x, y, z, w) \equiv f(z, w) + g(x)h(y) + k(y) = 0.$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja* $F(x, y, z, w)$ *spełnia założenia twierdzenia 1, to na to, by funkcja* F *miała postać* (20), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$(21a)\qquad F_{xz} \equiv 0,$$

$$(21b)\qquad F_{yz} \equiv 0,$$

$$(21c)\qquad F_{xw} \equiv 0,$$

$$(21d)\qquad F_{yw} \equiv 0,$$

$$(21e)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln|F_x| \equiv 0.$$

Dowód konieczności jest analogiczny jak w twierdzeniu 1.

Dowód dostateczności. Z tożsamości (21a) i (21b) wynika, że

$$F_z \equiv A(z, w) \quad \text{i} \quad F \equiv \int A(z, w)dz + B(x, y, w).$$

Z tożsamości (21c) i (21d) wynika, że

$$B(x, y, w) \equiv C(x, y) + D(w).$$

Funkcja F ma zatem postać

$$F \equiv \int A(z, w)dz + D(w) + C(x, y). \tag{22}$$

Z tożsamości (2e) otrzymujemy

$$C(x, y) \equiv E(x)G(y) + H(y).$$

Oznaczając

$$\int A(z, w)dz + D(w) \equiv f(z, w), \qquad E(x) \equiv g(x),$$

$$G(y) \equiv h(y), \qquad H(y) \equiv k(y),$$

otrzymujemy funkcję F w postaci (20).

IV. Funkcja anamorfozująca.

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli funkcja $F \equiv F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 2, to żeby istniała trzykrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$, sprowadzająca funkcję F do postaci* (20), *potrzeba i wystarcza, by spełnione były warunki:*

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_x}{F_y}\right] \equiv 0, \tag{23a}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{F_x}{F_y}\right] \equiv 0, \tag{23b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_z}{F_w}\right] \equiv 0, \tag{23c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0, \tag{23d}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0. \tag{23e}$$

Dowód konieczności jest analogiczny jak w twierdzeniu 2.

Dowód dostateczności. Z warunków (23a)-(23c) wynikają tożsamości

$$\frac{F_{xz}}{F_x F_z} \equiv \frac{F_{yz}}{F_y F_z} \equiv \frac{F_{xw}}{F_x F_w} \equiv \frac{F_{yw}}{F_y F_w}. \tag{24}$$

Z tożsamości (23a), (23c) i (23e) wynikają tożsamości

$$(25)\qquad \frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right]\equiv\frac{1}{F_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right]\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{F_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right]=\frac{1}{F_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right].$$

Z warunków (23a), (23d) wynika tożsamość (12).

Z warunków (25) oraz twierdzenia o zależności funkcyjnej wynika, że istnieje funkcja $\Psi(u)$ taka, że $\Psi(F)\equiv\frac{F_{xz}}{F_xF_z}$. Analogicznie jak w twierdzeniu 2, funkcja $\Psi(u)$ jest ciągła i różniczkowalna w przedziale I, który wypełniają wartości funkcji F w kostce K. Istnieje zatem funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)}\equiv-\Psi(u),$$

z warunkiem $\Phi'(u)\neq 0$.

Analogicznie jak w twierdzeniu 2, dowodzimy trzykrotnej różniczkowalności funkcji $\Phi(u)$.

Tożsamość tę można napisać w postaci

$$(26)\qquad \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\equiv-\frac{F_{xz}}{F_xF_z},$$

lub

$$(27)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}[\Phi(F)]\equiv 0.$$

Z tożsamości (24) i (26) wynikają po przekształceniach tożsamości

$$(28)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}[\Phi(F)]\equiv 0,$$

$$(29)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial w}[\Phi(F)]\equiv 0,$$

$$(30)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial w}[\Phi(F)]\equiv 0.$$

Z tożsamości (12) i (26) wynika po przekształceniach tożsamość

$$(31)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\left|\frac{\partial}{\partial x}[\Phi(F)]\right|\equiv 0.$$

Z twierdzenia 4 wynika więc, że funkcja $\Phi(F)$ ma postać (20). Zatem funkcja $\Phi(u)$ jest funkcją anamorfozującą.

Analogicznie jak twierdzenie 3 dowodzi się

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli istnieją funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci* (20), *to różnią się co najwyżej stałym czynnikiem.*

V. Dane jest równanie

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv f(z) + g(x, w)h(y) + k(y) = 0. \tag{32}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli funkcja F spełnia założenia twierdzenia* 1, *to żeby funkcja F miała postać* (32), *potrzeba i wystarcza, by spełnione były warunki:*

$$F_{xz} \equiv 0, \tag{33a}$$

$$F_{yz} \equiv 0, \tag{33b}$$

$$F_{zw} \equiv 0, \tag{33c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln |F_x| \equiv 0, \tag{33d}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_w}{F_x}\right] \equiv 0. \tag{33e}$$

Dowód konieczności przeprowadzamy analogicznie jak w twierdzeniu 1.

Dowód dostateczności. Z warunków (33a)-(33c), analogicznie jak w twierdzeniu 1, otrzymujemy

$$F \equiv A(z) + B(x, y, w). \tag{34}$$

Z tożsamości (33d) i (34) wynika

$$F_x \equiv B_x(x, y, w) \equiv C(x, w)D(y, w),$$

przy czym $C(x, w) \neq 0$ i $D(y, w) \neq 0$.

$$B(x, y, w) \equiv D(y, w)\int C(x, w)dx + E(y, w).$$

Wstawiając to wyrażenie w tożsamości (34) i (33e), otrzymamy po uproszczeniach

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D_w(y, w)}{D(y, w)}\right] \cdot \int C(x, w)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_w(y, w)}{D(y, w)}\right] \equiv 0.$$

Tożsamość ta jest spełniona w każdym punkcie kostki K. Zatem

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D_w(y, w)}{D(y, w)}\right] \equiv 0,$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_w(y,w)}{D(y,w)}\right] \equiv 0.$$

Pierwszą z tych tożsamości można napisać w postaci

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial w}\ln|D| \equiv 0.$$

Stąd

$$D(y,w) \equiv G(y)H(w).$$

Z drugiej tożsamości wynika

$$E(y,w) \equiv G(y)L(w)+M(y).$$

Zatem funkcja F ma postać

$$F \equiv A(z)+G(y)H(w)\int C(x,w)dx+G(y)L(w)+M(y).$$

Oznaczając

$$A(z) \equiv f(z), \quad H(w)\int C(x,w)dx+L(w) \equiv g(x,w),$$

$$G(y) \equiv h(y), \quad M(y) \equiv k(y),$$

otrzymamy funkcję F w postaci (32).

VI. Funkcja anamorfozująca.

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli funkcja $F(x,y,z,w)$ spełnia założenia twierdzenia 2, to żeby istniała trzykrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$, sprowadzająca funkcję F do postaci* (32) *i taka, że $\Phi'(u) \neq 0$, potrzeba i wystarcza, by spełnione były warunki* (7a)-(7d) *oraz* (33e).

Dowód konieczności przeprowadza się analogicznie jak w twierdzeniu 2.

Dowód dostateczności. Z tożsamości (7a)-(7d) wynikają tożsamości (8), (9), (10), (11) i (12).

Analogicznie jak w twierdzeniu 2 istnieje trzykrotnie różniczkowalna funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość (14b) i taka, że $\Phi'(u) \neq 0$. Z tożsamości (8), (9), (10), (11), (12) i (14b) wynikają tożsamości (17a)-(17c) i (18), co wraz z tożsamością (33e) i twierdzeniem 7 dowodzi, że funkcja $\Phi(u)$ jest szukaną funkcją anamorfozującą.

Analogicznie jak twierdzenie 3 dowodzi się

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli istnieją funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie $F(x,y,z,w) = 0$ do postaci* (32), *to różnią się co najwyżej stałym czynnikiem.*

Prace cytowane

[1] J. Wojtowicz, *Metody sprowadzania równań do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo 13 (1959).

[2] — *Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznych*, Zastosowania Matematyki 5 (1959), str. 1-20.

[3] — *Sprowadzanie równań do postaci kanonicznych równania czwartego rzędu nomograficznego z czterema zmiennymi*, Zastosowania Matematyki 5 (1960), str. 261-269.

[4] — *Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome*, Annales Polonici Mathematici 8 (1960), str. 177-183.

[5] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I, Москва-Ленинград 1948, str. 547.

Praca wpłynęła 26. 1. 1960

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ КОШИ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

В статье доказаны необходимые и достаточные условия существования анаморфизирующих функций, приводящих уравнение $F(x,y,z,w)=0$ к виду

$$f(z)+g(x)h(y,w)+k(y,w)=0 \quad \text{(тождества 7)},$$

к виду

$$f(z,w)+g(x)h(y)+k(y)=0 \quad \text{(тождества 23)},$$

и к виду

$$f(z)+g(x,w)h(y)+k(y)=0 \quad \text{(тождества 33)}.$$

Приводятся методы вычисления анаморфизирующей функции, как интеграла дифференциального уравнения, разрешимого в квадратурах.

Доказано, что анаморфизирующая функция определена с точностью до постоянного множителя.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

ON THE REDUCTION OF EQUATIONS WITH FOUR VARIABLES TO THE CAUCHY CANONICAL FORM WITH FOUR VARIABLES

SUMMARY

The paper gives an necessary and sufficient conditions for the existence of anamorphosing function, which reduces the equation $F(x, y, z, w) = 0$ to the forms:

$$f(z)+g(x)h(y, w)+k(y, w) = 0 \quad \text{(identities 7)} \quad \text{and}$$

$$f(z, w)+g(x)h(y)+k(y) = 0 \quad \text{(identities 23)} \quad \text{and}$$

$$f(z)+g(x, w)h(y)+k(y) = 0 \quad \text{(identities 33)}.$$

The paper also provides methods for computing the anamorphosing function as an integral of a differential equation solvable by quadratures.

It has been shown that the anamorphosing function is determined uniquely up to a constant factor.