ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVIII, 3 (1984), p. 427-431

F. KÖRNER (Dresden)

ZUR STRUKTUR DER ERSATZNEBENBEDINGUNG BEI DER FILTERMETHODE

Für das allgemeine lineare Optimierungsproblem wird die Struktur der Geoffrionschen Ersatznebenbedingung angegeben. Es zeigt sich, daß das entstehende Rucksackproblem zu den schwer lösbaren Rucksackproblemen gehört. Wendet man dieses Ergebnis auf das 0-1 Rucksackproblem an, so erhält man in einfacher Weise die Reduktionsmethoden von Fayard und Plateau [3] bzw. von Ingargiola und Korsh [5].

1. Einleitung. Betrachtet wird das lineare Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad c^{T}x = \max \quad \text{bei } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0,$$

wobei A eine (m, n)-Matrix ist und das Problem (P) lösbar sei.

Mit (P′) wird das entsprechende Problem bezeichnet, wenn man zusätzlich noch x_i $(i = 1, \ldots, n)$ ganzzahlig fordert. Der Rechenaufwand zur Lösung von (P′) hängt in einem starken Maße von der Anzahl der Nebenbedingungen ab. Bei enumerativen Verfahren erweist es sich als günstig, zur Schrankenbestimmung nicht alle Nebenbedingungen zuzulassen, sondern nur eine — ein gewichtetes Mittel aller Nebenbedingungen — zu betrachten. Diese Nebenbedingung heißt *Ersatznebenbedingung* (*surrogate constraint*). Das entsprechende Ersatzproblem (R) wird wie folgt definiert:

$$\text{(R)} \qquad c^{T}x = \max \quad \text{bei } x^{T}d(u) \leqslant f(u),\ x \geqslant 0,$$

mit $A^{T}u =: d(u)$, $b^{T}u =: f(u)$, $u \geqslant 0$ und $u \neq 0$.

Mit (R′) bezeichnet man das entsprechende, ganzzahlige Problem. Es bestehen folgende Beziehungen zwischen den Problemen:

Jede zulässige Lösung von (P) bzw. (P′) ist auch zulässig bezüglich (R) bzw. (R′); es sei x ein optimaler Lösungsvektor von (R) (bzw. (R′)) und x sei zulässig bezüglich (P) (bzw. (P′)), dann ist x ein optimaler Lösungsvektor von (P) (bzw. (P′)).

Balas [1] wählte $u = (1, \ldots, 1)^{T}$. Es erweist sich, daß die entsprechende Ersatzaufgabe unscharf ist, d.h., die optimalen Zielfunktionswerte von (P) und (R) weichen im allgemeinen sehr voneinander ab. Es existiert jedoch ein Lagrange-Vektor u^* ($u^* \geqslant 0$, $u^* \neq 0$), so daß die optimalen Zielfunktionswerte der Probleme (P) und (R) übereinstimmen. Geoffrion [4] erkannte, daß der Vektor u^* ein optimaler dualer Lösungsvektor des Problems (P) ist.

Die Geoffrionsche Ersatznebenbedingung soll in der weiteren Arbeit untersucht werden. Der Einfachheit halber sei $d := d(u^*)$ und $f := f(u^*)$. Es wird gezeigt, daß das entsprechende Rucksackproblem (R′) zu den schwer lösbaren Rucksackproblemen gehört [2]. Dieses Resultat ist insofern von Bedeutung, als daß der Aufwand zur Lösung des Problems (P′) mittels der Filtermethode daher wesentlich von dem Lösungsaufwand des Problems (R′) bestimmt wird.

Die ausführliche Darstellung eines enumerativen Algorithmus zur Lösung des Problems (P′) mittels der Ersatzaufgabe (R) (Filtermethode) ist z.B. in [7] vorhanden.

2. Die Struktur der Ersatznebenbedingung. Der Vektor d soll nun bestimmt werden. Es wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, daß bei der Lösung des Problems (P) die ersten k Basisvariablen gegen die ersten k Nichtbasisvariablen ausgetauscht worden sind. Durch eine entsprechende Zeilen- und Spaltenvertauschung kann dieses stets erreicht werden. Entsprechend werde das zum Problem (P) gehörende Tableau eingeteilt:

(1)

	x^1	x^2	1
u^1	P	E	b^1
u^2	F	G	b^2
z	$-c^{1\mathrm{T}}$	$-c^{2\mathrm{T}}$	0

Dabei sei P eine reguläre (k, k)-Matrix; die Formate der anderen Matrizen seien passend gewählt. Dann lautet das zu (1) gehörende, optimale Tableau:

(2)

	u^1	x^2	1
x^1	P^{-1}	$-P^{-1}E$	$-P^{-1}b^1$
u^2	FP^{-1}	$G-FP^{-1}E$	$b^2-FP^{-1}b^1$
z	$-c^{1\mathrm{T}}P^{-1}$	$-c^{2\mathrm{T}}+c^{1\mathrm{T}}P^{-1}E$	$c^{1\mathrm{T}}P^{-1}b^1$

Damit lautet der optimale duale Vektor $u^* = (u^{1\mathrm{T}}, u^{2\mathrm{T}}) = (-c^{1\mathrm{T}}P^{-1}, O^{\mathrm{T}})$. Die Ersatznebenbedingung erhält damit folgendes Aussehen:

$$d^{\mathrm{T}} = u^{*\mathrm{T}}A = (-c^{1\mathrm{T}}P^{-1}, O^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} -P & -E \\ -F & -G \end{pmatrix} = (c^{1\mathrm{T}}, c^{1\mathrm{T}}P^{-1}E)$$

und

$$f = u^{*\mathrm{T}}b = -c^{1\mathrm{T}}P^{-1}b^1.$$

Es folgt somit $c_i = d_i$ für $i = 1, \ldots, k$; d.h., im Falle $c_i \neq 0$ gilt $c_i/d_i = 1$.

Da das Tableau (2) optimal ist, erhält man

$$-c^{2\mathrm{T}} + c^{1\mathrm{T}}P^{-1}E \geqslant O^{\mathrm{T}} \qquad \text{oder} \qquad d^{2\mathrm{T}} = c^{1\mathrm{T}}P^{-1}E \geqslant c^{2\mathrm{T}}.$$

Somit ist $c_i \leqslant d_i$ für $i = k+1, \ldots, n$. Falls $c_i > 0$, folgt $c_i/d_i \leqslant 1$, und im Falle $c_i < 0$ gilt $c_i/d_i \geqslant 1$.

Die letzte Aussage kann man noch verschärfen:

Es gilt $c_i = d_i$ genau dann, wenn ein optimales Tableau existiert, bei dem x_i in der Basis steht oder ein optimaler Lösungsvektor x mit $x_i > 0$ existiert.

Es zeigt sich, daß die Geoffrionsche Ersatznebenbedingung eine sehr einfache Gestalt besitzt. Ein großer Teil der charakteristischen Quotienten des Ersatzproblems (c_i/d_i) sind gleich. Dieses Resultat soll nun auf das boolesche Rucksackproblem übertragen werden.

3. Über das 0-1 Rucksackproblem. Betrachtet wird das Problem

$$(\tilde{\mathrm{R}}') \qquad c^{\mathrm{T}}x = \max \qquad \text{bei } a^{\mathrm{T}}x \leqslant b,\ x_i \in \{0, 1\}.$$

Es wird nur der nichttriviale Fall $a_i, c_i > 0$, für $i = 1, \ldots, n$, betrachtet; und es mögen folgende Bedingungen erfüllt sein: $c_1/a_1 \geqslant \ldots \geqslant c_n/a_n$. Bettet man nun das Problem $(\tilde{\mathrm{R}}')$ in das Problem

$$c^{\mathrm{T}}x = \max \qquad \text{bei } a^{\mathrm{T}}x \leqslant b,\ x \leqslant e := (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},\ x \geqslant 0,$$

stetig ein und berechnet man hierzu die Geoffrionsche Ersatznebenbedingung, so hat sie folgendes Aussehen:

$$d_i = \begin{cases} c_i & \text{für } i = 1, \ldots, k, \\ \dfrac{c_k}{a_k} a_i & \text{für } i = k+1, \ldots, n \end{cases}$$

und

$$f = \sum_{i=1}^{k-1} c_i + \frac{c_k}{a_k}\left(-\sum_{i=1}^{k-1} a_i + b\right).$$

Der Pivotindex k ist dabei wie folgt definiert:

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i \leqslant b < \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Das entsprechende Ersatzproblem (R) lautet nun:

$$c^{\mathrm{T}}x = \max \qquad \text{bei } d^{\mathrm{T}}x \leqslant f,\ x \geqslant 0.$$

Mittels dieser Ersatzaufgabe wird nun versucht, bestimmte Variable x_j festzulegen. Es sei Z_{appr} der Zielfunktionswert einer bereits bekannten Näherungslösung von (R′). Eine Variable x_j $(j = 1, \ldots, k)$ kann mit 1 festgelegt werden, wenn die stetige Lösung von (R) mit $x_j = 0$ einen Wert liefert, welcher kleiner, höchstens gleich Z_{appr} ist. Für eine Variable x_j $(j = k+1, \ldots, n)$ kann getestet werden, ob sie mit 0 festgelegt werden kann. Dazu setzt man $x_j = 1$ und berechnet den optimalen Zielfunktionswert Z^* von (R). Es ist $Z^* = f - d_j + c_j$. Gilt $Z^* \leqslant Z_{\text{appr}}$, so kann $x_j = 0$ gesetzt werden. Bestimmt man Z_{appr} als „greedy"-Lösung [7]; d.h. setzt man

$$Z_{\text{appr}} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i,$$

so erhält man die Formeln von Fayard und Plateau [3] bzw. Ingargiola und Korsh [5].

Man setze $x_j = 0$ $(j = k+1, \ldots, n)$, wenn

$$Z_{\text{appr}} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \geqslant f - d_j + c_j = Z^* \tag{3}$$

gilt. Die Ungleichung (3) ist genau dann erfüllt, wenn

$$a_j\left(\frac{c_k}{a_k} - \frac{c_j}{a_j}\right) \geqslant \frac{c_k}{a_k}\left(-\sum_{i=1}^{k-1} a_i + b\right)$$

ist.

Diese Methode läßt sich analog auf das Problem (P′) übertragen. Der Wert Z_{appr} ist dann als Zielfunktionswert einer bekannten Näherungslösung des Problems (P′) zu wählen.

Rechentechnische Ergebnisse in [8] bestätigen die Effektivität dieser Methode für das 0-1 Rucksackproblem; es ist damit zu erwarten, daß mit dieser Methode gleich gute Ergebnisse beim Problem (P′) erzielt werden können.

4. Bemerkungen zur Effektivität der Filtermethode. Ihrem Wesen nach ist die Filtermethode eine „branch-and-bound" Methode. Als Schranke wird dabei der optimale Zielfunktionswert des Ersatzproblems (R) verwendet. Neben den üblichen „branch-and-bound" Verwerfregeln existieren bei der Filtermethode noch weitere.

Die Effektivität der Filtermethode wird daher wesentlich von jener der Lösung des Problems (R′) beeinflußt. In einer Reihe von Arbeiten (z.B. in [2] und [6]) wurde aber erkannt, daß man im Falle $d_i = c_i$ Rucksackprobleme konstruieren kann, deren Lösungsaufwand $O(2^{n/2})$ Operationen beträgt, wenn mit enumerativen Methoden gearbeitet wird. Es wurde erkannt, daß die Rucksackprobleme, für die $c_i/d_i \approx c_{i+1}/d_{i+1}$ gilt, schwer lösbar sind.

Betrachtet man für das Problem (P′) den Fall $m \gg n$ (d.h. existieren wesentlich mehr Nebenbedingungen als Variablen), so wurde früher argumentiert, daß es günstig sei, sich eine Ersatznebenbedingung zu beschaffen und die Filtermethode anzuwenden. Für diesen Fall ist jedoch zu erwarten, daß bei der optimalen Lösung des Problems (P) sehr viele Variablen x_i in der Basis stehen; es wird daher $c_i = d_i$ für sehr viele Indizes i gelten.

Der Vorteil der Filtermethode – es wird nur eine Nebenbedingung statt m bei der Schrankenbestimmung berücksichtigt – wird in diesem Fall teilweise wieder dadurch kompensiert, daß das entstehende Rucksackproblem (R′) mit enumerativen Methoden sehr schwer lösbar ist.

Besitzt das Problem (P′) sehr viele Nebenbedingungen und steigt der Lösungsaufwand stark an, so braucht der Grund nicht darin liegen, daß man viele Nebenbedingungen schwer durch eine einzige ausdrücken kann, sondern darin, daß das entsprechende Rucksackproblem (R′) schwer lösbar ist.

Diese Arbeit entstand während eines Studienaufenthaltes an der Universität Wrocław. Der Autor möchte sich hiermit herzlich bei Dr. J. Kucharczyk für die dabei erwiesene Unterstützung bedanken.

Literaturnachweis

[1] E. Balas, *An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables*, Operations Res. 13 (1967), S. 517-546.

[2] V. Chvátal, *Hard knapsack problems*, ibidem 28 (1980), S. 1402-1411.

[3] D. Fayard und G. Plateau, *Resolution of the 0-1 knapsack problem: comparison of methods*, Math. Programming 8 (1975), S. 272-307.

[4] A. M. Geoffrion, *An improved implicit enumeration approach for integer programming*, Operations Res. 17 (1968), S. 437-454.

[5] G. P. Ingargiola and J. F. Korsh, *Reduction algorithm for the knapsack problem*, Management Sci. 26 (1973), S. 460-463.

[6] A. A. Korbut, I. H. Sigal und Ju. Ju. Finkelstein (А. А. Корбут, И. Х. Сигал и Ю. Ю. Финкельштейн), *Метод ветвей и границ*, Math. Operationsforsch. Statist., Series Optimization, 8 (1977), S. 253-280.

[7] L. B. Kovács, *Combinatorial methods of discrete proprammning*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1980.

[8] M. Lauriere, *An algorithm for the 0/1 knapsack problem*, Math. Programming 14 (1978), S. 1-10.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
SEKTION MATHEMATIK
DDR-8027 DRESDEN

Eingegangen am 11. 5. 1982