J. ŁUKASZEWICZ i H. STEINHAUS (Wrocław)

O MIERZENIU PRZEZ KALIBROWANIE

Mierzenie przez kalibrowanie narzuca się tam, gdzie nie ma określonego parametru porządkującego. Najlepszym przykładem są turnieje tenisowe lub szachowe; nie tylko nie ma tu skali, ale nawet jest wątpliwe, czy można ją określić. Dlatego przyjmuje się, na przykład w rozgrywkach tenisowych o tytuł mistrza, że mistrzem zostaje ten, kto pobił wszystkich innych bezpośrednio lub pośrednio. Gdy A pobił B, a B pobił C, to A jest lepszy od B i lepszy od C i nie dopuszcza się do partii $A \longleftrightarrow C$ (której wynik mógłby uniemożliwić wyznaczenie mistrza).

Zasięg mierzenia przez kalibrowanie jednak jest szerszy: czasem jest wygodnie porównywać zamiast mierzyć tam, gdzie istnieją jednostki miernicze i skale. Gdy trzeba ustawić kilkanaście osób według wzrostu, robi się to łatwiej bez listwy mierniczej niż z jej pomocą. Nie zapominajmy wreszcie, że typowe mierzenie za pomocą skali składa się z dwóch kroków: porównanie przedmiotu P z innymi ($A<P<B$) i orzeczenie ilościowe o P na tej podstawie. Chcemy tu wyraźnie rozdzielić te dwa kroki.

Łatwo wykazać, że gdy ustawiliśmy 2^m-1 osób według wzrostu, to wystarczy następną osobę porównać z m osobami spośród ustawionych, aby wstawić ją we właściwe miejsce w szyku złożonym z osób już ustawionych. Na przykładzie $m=3$ postępowanie tak wygląda: Jest $2^m-1= =2^3-1=7$ osób już ustawionych. Jedna z nich, S, zajmuje miejsce środkowe i z nią przede wszystkim porównujemy nową, ósmą osobę. Jeżeli nowa ją przewyższa, to zadanie sprowadzi się do znalezienia dla nowej osoby właściwego miejsca wśród trzech osób tworzących skrzydło wyższych w szyku siedmiu osób, a jeżeli okaże się niższa od S, to trzeba będzie dla niej znaleźć miejsce wśród trzech osób skrzydła niższych. W każdym razie jedno porównanie redukuje problemat wstawienia nowej osoby w szyk z 2^m-1 (tutaj 7) osób do problematu wstawienia jej w szyk z $2^{m-1}-1$ (tutaj 3) osób. Jeżeli $m=1$, to $2^{m-1}-1=0$ i cel jest już osiągnięty. Jeżeli $m>1$, to liczba $2^{m-1}-1$ jest nieparzysta i znowu istnieje osoba środkowa w skrzydle, tak że drugi krok jest analogiczny do pierwszego. Po $m-1$ (tutaj po 2) porównaniach mamy porównać nową osobę już tylko z $2^{m-(m-1)}- -1=1$ osobą, a do tego trzeba jednego porównania, razem więc m (tutaj 3) porównań. Gdy ilość ustawionych już osób n nie jest liczbą kształtu

2^k-1, wtedy do wstawienia nowej osoby wystarczy m porównań, gdzie 2^m-1 jest najmniejszą liczbą kształtu 2^k-1 większą niż n.

Do wstawienia nowej osoby w szyk złożony z

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots$$

już ustawionych osób, wystarczy więc odpowiednio

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

porównań.

Z tego wynika, że do ustawienia

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots$$

osób wystarczy odpowiednio

$$0, 1, 3, 5, 8, 11, 14, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \ldots$$

porównań.

Wzór $N=1+kn-2^k$, gdzie $k=1+[\log_2 n]$, podaje liczbę N porównań wystarczającą zawsze do ustawienia n osób; tutaj $[r]$ oznacza część całkowitą liczby r ($[7]=7$, $[7{,}1]=7$).

J. Słupecki udowodnił (ale nie ogłosił dowodu), że liczba N nie da się zastąpić przez mniejszą. Należy to tak rozumieć, że nie ma żadnej metody porównywania n osób, która by zawsze (to znaczy niezależnie od konkretnego zbioru osób) doprowadzała co najwyżej po $N-1$ krokach do ich ustawienia. Pamiętajmy, że nie wolno tu korzystać z innych informacji, jak te, które daje porównywanie, i jeżeli „na oko" widzimy, że karzeł jest niższy od olbrzyma i opieramy się na tym, to już się to liczy za jedno porównanie.

Wszystko, co powiedzieliśmy dotąd, jest tylko wstępem do innych rzeczy, mających znaczenie praktyczne. Najlepszym przykładem będzie pomiar grubości wałków stalowych (np. osi rowerowych).

Wyobraźmy sobie układ 15 okrągłych otworów wywierconych precyzyjnie w stalowej płycie i tworzących szereg o średnicach rosnących od lewego otworu nr 1 do prawego nr 15. Ten układ otworów ma służyć do klasyfikacji wałków. Obrabiarka, która je produkuje, nie daje idealnie jednolitego fabrykatu i chcąc puścić wałki w dalszy tok obróbki, montażu lub sprzedaży, musimy całą partię rozsegregować według grubości sztuk. Przy tym uważa się, że średnica s wałka, nie mieszczącego się w otworze r-tym, ale mieszczącego się w otworze $(r+1)$-ym, spełnia nierówności

$$(1) \qquad d_r < s < d_{r+1} \qquad (r=0,1,2,\ldots,15; \quad d_0=0, \quad d_{16}=\infty).$$

Jeżeli wyznaczymy liczbę r spełniającą (1), to wyczerpiemy całą informację, którą układ może dać o wałku. Do tego — jak widzieliśmy poprzednio — wystarczy m prób, gdy liczba n otworów jest równa 2^m-1. Przy 15 otworach wystarczą zatem 4 próby ($2^4-1=15$). Postępowanie opisaliśmy już na przykładzie ustawiania osób według wzrostu.

Gdy liczba n nie jest kształtu 2^m-1, należy uzupełnić otwory przez symboliczne zaznaczenie „ślepych", tak żeby łączna liczba prawdziwych i ślepych miała kształt 2^m-1. Na przykładzie $n=8$ wygląda to tak: Najbliższą liczbą kształtu 2^m-1 przewyższającą 8 jest 15, więc trzeba dodać 7 otworów ślepych ($8+7=15$). Zaznaczamy je kółkami, z których cztery umieszczamy w przedłużeniu lewym a 3 w przedłużeniu prawym układu otworów. Postępujemy teraz jak przy umieszczeniu nowej osoby w szyku z 15 osób i może się zdarzyć, że trzeba będzie wałek wypróbować na jednym lub kilku ślepych otworach; wtedy porównanie będzie symboliczne: przyjmujemy z góry, że wałek mieści się w każdym ślepym otworze prawym, a nie mieści się w żadnym ślepym lewym. Tym sposobem liczba prawdziwych prób nie przekroczy nigdy 4, ale może czasem okazać się równa 3 lub 2. W przykładzie $n=9$ należy dodać po trzy ślepe otwory z lewej i prawej strony — postępowanie analogiczne znajdzie czytelnik łatwo dla każdego określonego n.

Poprzednio opisana metoda prowadzi przy n otworach (np. $n=15$) do informacji (1) o każdym wałku z osobna, więc pozwala rozbić partię na $n+1$ klas (w przykładzie na 16 klas).

Można ją udoskonalić przez wprowadzenie orzeczeń, to jest liczb o_j ($j=1,2,\ldots,n,n+1$) położonych między liczbami d_r:

$$0<o_1<d_1<o_2<d_2<o_3<\ldots<d_{n-1}<o_n<d_n<o_{n+1}<\infty. \tag{2}$$

Udoskonalenie polega na orzeczeniu $s=o_{r+1}$, gdy stwierdzono, że jest $d_r<s<d_{r+1}$.

Powstaje zadanie określenia liczb o_j. Przypuśćmy, że wszystkie s leżą w przedziale (a,b) i że $f(s)$ jest ich gęstością rozkładu, to znaczy, że frakcja wałków o średnicach zawartych między u a v jest dla wszelkich przedziałów (u,v)

$$\int_u^v f(s)\,ds. \tag{3}$$

Rozwiążemy takie zadanie: Jakie orzeczenie o zmniejsza do minimum oczekiwany błąd bezwzględny

$$I(o)=\int_a^b |s-o|f(s)\,ds\,? \tag{4}$$

Odpowiedź jest następująca: Liczba o ma spełniać warunek

$$\int_a^o f(s)\,ds=\int_o^b f(s)\,ds, \tag{5}$$

czyli ma być medianą kolektywu średnic s.

Oto dowód: Wyrażenie (4) doprowadzamy do postaci

$$I(o)=\int_a^b|s-o|f(s)ds=\int_a^o(o-s)f(s)ds+\int_b^o(o-s)f(s)ds=$$

$$=o\left[\int_a^o f(s)ds+\int_b^o f(s)ds\right]-\int_a^o sf(s)ds-\int_b^o sf(s)ds.$$

Różniczkując funkcję $I(o)$ otrzymujemy

$$I'(o)=\int_a^o f(s)ds+\int_b^o f(s)ds+o[f(o)+f(o)]-of(o)-of(o)=$$

$$=\int_a^o f(s)ds+\int_b^o f(s)ds=\int_a^o f(s)ds-\int_o^b f(s)ds.$$

Warunek (5) jest więc warunkiem na to, by znikała pochodna $I'(o)$. Warunek ten jest spełniony w jednym punkcie lub w całym odcinku, bo lewa strona równości (5) jest funkcją niemalejącą, a prawa funkcją nierosnącą zmiennej o. Ponieważ zaś błąd bezwzględny $I(o)$ dąży do $+\infty$ przy o dążącym do $\pm\infty$, więc warunek (5) wyznacza minima błędu bezwzględnego.

Udowodniliśmy więc, że mediana daje niewiększy błąd bezwzględny niż jakiekolwiek inne orzeczenie.

Przyjmując w warunku (5) $a=d_r$, $b=d_{r+1}$ otrzymujemy układ $n+1$ warunków na orzeczenia optymalne o_j:

$$\int_{d_j}^{o_{j+1}} f(s)ds=\int_{o_{j+1}}^{d_{j+1}} f(s)ds \qquad (j=0,1,2,\ldots,n). \tag{6}$$

Teraz wyobraźmy sobie, że orzeczenia są narzucone z góry, a szukamy średnic otworów d_j; otrzymamy wtedy warunki

$$d_j=q_j, \quad \text{gdzie} \quad q_j=(o_j+o_{j+1})/2 \qquad (j=1,2,\ldots,n). \tag{7}$$

Konieczność warunku (7) wynika z tego, że przez przesunięcie wymiaru d_j z q_j do $q_j+\varepsilon$ przypisujemy wałkom o średnicach s spełniających nierówność

$$q_j<s<q_j+\varepsilon$$

średnicę o_j zamiast o_{j+1}, więc zwiększamy błędy orzeczeń na tych wałkach nie zmieniając błędów na innych; łącznie więc oczekiwany błąd bezwzględny rośnie (nie maleje).

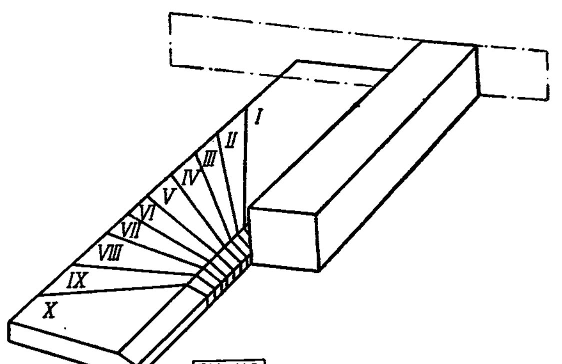
Gdy znamy gęstość $f(s)$ rozkładu, wtedy możemy postawić zagadnienie wyznaczenia układu otworów i orzeczeń — przy danym n. Trudność zadania będzie zależała od tego, czy dysponujemy tablicami całki nieoznaczonej funkcji $f(s)$.

Gdy dane są średnice otworów, a szuka się orzeczeń, wówczas wystarczy rozwiązać równania (6) ze względu na niewiadome o_{j+1} $(j=0,1,2,\ldots,n)$. Gdy dane są orzeczenia, a szuka się średnic, wtedy (7) jest bezpośrednią odpowiedzią. Gdy trzeba wyznaczyć optymalnie i średnice otworów i orzeczenia, wtedy trzeba rozwiązać układ $2n+1$ równań o tyluż niewiadomych, złożony z równań (6) i (7) — jest to dostępne, gdy mamy tablice funkcji $F(s)=\int\limits_0^s f(t)\,dt$.

Toteż gdy, na przykład, rozkład średnic jest normalny, można to zadanie wykonać efektywnie. Dla $n=15$ obliczyła L. Zubrzycka z Grupy Zastosowań przyrodniczych i gospodarczych Instytutu Matematycznego PAN następującą listę liczb d'_j i o'_j, z której otrzymuje się szukane d_j i o_j mnożąc wszystkie liczby listy przez odchylenie średnie, a potem dodając do tak otrzymanych iloczynów średnią partii:

$o'_1=-3{,}508$	$o'_5=-0{,}878$	$o'_9=0{,}118$	$o'_{13}=1{,}184$
$d'_1=-2{,}800$	$d'_5=-0{,}743$	$d'_9=0{,}238$	$d'_{13}=1{,}371$
$o'_2=-2{,}092$	$o'_6=-0{,}608$	$o'_{10}=0{,}358$	$o'_{14}=1{,}558$
$d'_2=-1{,}825$	$d'_6=-0{,}483$	$d'_{10}=0{,}483$	$d'_{14}=1{,}825$
$o'_3=-1{,}558$	$o'_7=-0{,}358$	$o'_{11}=0{,}608$	$o'_{15}=2{,}092$
$d'_3=-1{,}371$	$d'_7=-0{,}238$	$d'_{11}=0{,}743$	$d'_{15}=2{,}800$
$o'_4=-1{,}184$	$o'_8=-0{,}118$	$o'_{12}=0{,}878$	$o'_{16}=3{,}508$
$d'_4=-1{,}031$	$d'_8=\ \ 0{,}000$	$d'_{12}=1{,}031$	

Gdy nie znamy rozkładu, musimy go wyznaczyć empirycznie. Można na przykład przyjąć układ otworów według norm zwyczajowych, a następnie rozsegregować za pomocą tego prowizorycznego układu reprezentacyjną i dosyć liczną partię próbną. To już da nam zarys funkcji $f(s)$ i pomoże znaleźć jej wyraz matematyczny, a wtedy wybierzemy n, orzeczenia i średnice otworów zgodnie z teorią poprzednio naszkicowaną.



Mierzenie przez kalibrowanie obejmuje także niektóre pomiary podziałką. Przypuśćmy, że mamy rozsegregować partię prętów niejednolitą co do długości sztuk. Praktyczne względy ograniczają liczbę klas n; niech będzie na przykład $n=10$. Na listwie mierniczej umieścimy kreski poprzeczne odpowiadające układowi długości, a między kreskami napiszemy orzeczenia — nowość polega na tym, że cechujemy nie kreski, jak zwykle, lecz przedziały między kreskami. Przez to rezygnujemy z szacowania decymalnego, lecz od razu otrzymujemy najlepszą klasyfikację o tej dokładności, jaka jest pożądana, zamiast wahać się przy każdym pomiarze nad zbędną decymalą, którą później zatrze zaokrąglenie narzucone przez liczbę klas. Pisanie cech w wąskich przedziałach ułatwia znany chwyt graficzny (którego skuteczność zwiększyć można przez wyzyskanie drugiego brzegu listwy).

Zauważmy, że orzeczenia mogą być tu dokładniejsze niż przy pomiarze zwykłym.

W całym artykule posługiwaliśmy się błędem bezwzględnym. Nie jest to konieczne — przeniesienie na średni błąd kwadratowy nie nastręcza trudności: warunek (7) nie ulegnie zmianie, a zamiast (6) wystąpi warunek określający o_{j+1} jako odciętą środka pola ograniczonego przez $s=d_{j+1}$, oś zmiennej s i krzywą $y=f(s)$.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wlynęła dnia 2. 4. 1954 r.

И. ЛУКАШЕВИЧ и Г. ШТАЙНХАУЗ (Вроцлав)

ОБ ИЗМЕРЕНИИ МЕТОДОМ КАЛИБРОВКИ

РЕЗЮМЕ

Измерение методом калибровки заключается в сортировке предметов сравниванием их с соответствующим комплектом калибров. Если имеется 2^m-1 калибров, то для зачисления каждого предмета к одному из 2^m классов определенных этими калибрами, достаточно произвести m сравнений.

Предположим, что классифицируем предметы относительно некоторой величины, например валики относительно диаметра s, и что установлены калибры $d_1<d_2<\ldots<d_n$. Валик, которого диаметр удовлетворяет неравенством

$$d_j<s<d_{j+1} \qquad (j=0,1,\ldots,n;\quad d_0=0,\ d_{n+1}=\infty),$$

причисляем к классу $s=o_j$. Ожидаемая абсолютная погрешность в классификации будет минимальная, если примем за основу классификации числа o_j удовлетворяющие условию (6), где $f(s)$ — плотность распределения диаметров s в измеряемой партии.

Если даны числа o_j, то минимума ожидаемой абсолютной погрешности в классификации достигнем, принимая в качестве калибров d_j арифметические средние двух соседних чисел o_j

$$d_j=(o_j+o_{j+1})/2 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Зная плотность распределения $f(s)$ можем для произвольного n определить $n-1$ калибров и n чисел o_j удовлетворяющих этим двум условиям.

В работе приведены в качестве примера числа o_j для $n=16$ и для нормального распределения диаметров.

J. ŁUKASZEWICZ and H. STEINHAUS (Wrocław)

ON MEASURING BY COMPARISON

SUMMARY

Measuring by comparison consists in classifying objects by comparing them with a suitable set of gauges. If there are 2^m-1 gauges, then m comparisons suffice for the assignment of every object to a suitable class within the 2^m classes determined by those gauges.

Suppose that objects are classified with regard to a certain quantity, *e. g.* rods with regard to their diameter s, and the gauges $d_1<d_2<\ldots<d_n$ are determined. A rod whose diameter satisfies the inequality

$$d_j<s<d_{j+1} \qquad (j=0,1,\ldots,n;\quad d_0=0,\ d_{n+1}=\infty)$$

is said to have its $s=o_j$. The expected absolute error of the label will be smallest if we take as the labels o_j the numbers satisfying equations (6) where $f(s)$ is the density of distribution of the diameters s in the measured lot.

Given the labels o_j, we shall obtain the smallest expected absolute error of the labels taking as the gauges d_j the arithmetic means of adjoining labels

$$d_j=(o_j+o_{j+1})/2 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Knowing $f(s)$, we can — for an arbitrary n — choose $n-1$ gauges and n labels satisfying simultaneously the two conditions.

The paper gives, by way of example, the values of these numbers for $n=16$ and for the normal distribution of the diameters.
