ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
Юбилейный том посвященный Хуго Штейнхаусу
X (1969)

Б. В. ГНЕДЕНКО (Москва)

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ИНЖЕНЕРНОЙ ПСИХОЛОГИИ

1. Мне доставляет огромное наслаждение возможность направить статью в сборник, посвященный юбилею замечательного учёного, педагога и страстного пропагандиста математических методов в вопросах медицины, биологии, инженерного дела и экономики. Воспоминания моей математической юности тесно связаны с впечатлениями от работ профессора Х. Штейнхауза, посвященных различным вопросам теории тригонометрических рядов, рядов ортогональных функций, рядов со случайными членами, теории независимых функций и др. областям математики.

Я убежден, что тема настоящей статьи может быть близка интересам профессора Х. Штейнхауза. Именно поэтому я решаюсь направить её в настоящий сборник. Вдобавок предлагаемая статья указывает на некоторые аспекты, которые могут установить связи между такими актуальными научными направлениями как теория надежности и инженерная психология.

2. Стремление к рационализации труда оператора, обслуживающего ту или иную техническую систему, которая требует от него постоянного и напряженного внимания, выдвигает перед наукой многие интересные вопросы. На мой взгляд эти вопросы важны как в теоретическом, так и в прикладном аспектах и представляют значительный интерес для представителей различных направлений науки и практической деятельности — организаторов производства, физиологов, психологов, математиков. В последние годы ряд возникших здесь проблем был подвергнут интенсивному изучению. Некоторые представления о характере постановок задач, приёмах исследования и результатах можно получить по статьям, которые опубликованы в сборнике [2].

В настоящей статье я хотел бы затронуть один вопрос, который, насколько мне известно, до сих пор не привлек к себе того внимания, которого он заслуживает.

Предположим, что некоторое лицо, которое мы будем называть оператором, на протяжении своего рабочего дня должно систематически выполнять одну и ту же операцию — управлять автомобилем, печатать на пишущей машинке, обрабатывать детали на токарном станке, передавать телеграммы, управлять посадкой самолетов на крупном аэродроме и т. д. При выполнении каждой элементарной операции оператор способен допустить ошибку. По мере того как накапливается утомление, вероятность ошибки становится все большей и большей. Чтобы предупредить возможность увеличения интенсивности появления ошибочных действий, необходимо устраивать профилактические отдыхи для восстановления работоспособности оператора.

Необходимость таких периодических отдыхов в работе человечество поняло уже давно. Быть может именно в этом следует искать объяснение того, что у всех народов с давних времен введены „воскресные" дни, как дни отдыха. По этому же пути пошло и развитие организма в процессе эволюции, установив ежесуточный отдых — длительный сон. Этой же цели служат и ежегодные отпуска.

Естественно, спросить себя, как следует организовать длительную напряженную работу на протяжении рабочего дня, чтобы добиться максимальной её продуктивности? Точнее, как необходимо чередовать периоды работы с периодами отдыха, чтобы за данный период T общее количество хорошо выполненной работы было максимальным? Как велики при этом должны быть периоды работы и периоды отдыха, чтобы при большом объеме произведенной работы „в среднем" было допущено минимальное число ошибочных решений? Сейчас были поставлены две не вполне равноправные задачи, однако, мы не станем заниматься выявлением их различия.

Нет нужды говорить о том, что поставленные вопросы могут быть интересны и для педагогики при определении рациональной длины урока и перемены. Несомненно, что при этом необходимо принимать во внимание особенности возраста детей разных классов. И может случиться, что как длительность урока, так и длительность перемены должна быть разной в начальных и последних классах школы.

Только что поставленные общие задачи могут принимать различную форму в зависимости от особенностей конкретной работы, выполняемой оператором. Здесь мы лишь бегло рассмотрим две такие задачи, поскольку основная цель настоящей работы состоит не в получении математических результатов, а в привлечении внимания к этой группе вопросов, а также в выяснении тех наблюдений и экспериментальных работ, которые необходимы для построения теории. И при этом построения такой теории, которая была бы полноценна с позиций биологии, а также с позиций практики, которая желает теоретических результатов, доведенных до возможностей непосредственного применения.

Мы рассмотрим здесь тот случай, когда утомление сказывается прежде всего на потере внимательности и приводит к увеличению вероятности ошибочных действий.

3. Понятно, что скорость наступления утомления изменяется не только от человека к человеку, но меняется для одного и того же лица в зависимости от множества причин: физического и психического состояния, незначительного

изменения условий работы, погоды и пр. Учесть все обстоятельства, которые влияют на работоспособность, нет возможности. По видимому, очень близко к действительности предположение, что быстрота накопления утомления представляет собой случайный процесс.

Наблюдения над лицами различных профессий показывают, что общая форма кривой изменения интенсивности внимания оператора к выполняемой работе имеет вид, изображенный на рис. 1. Сначала наблюдается короткий

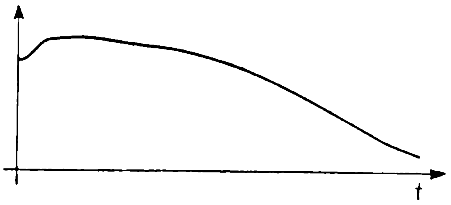

Рис. 1

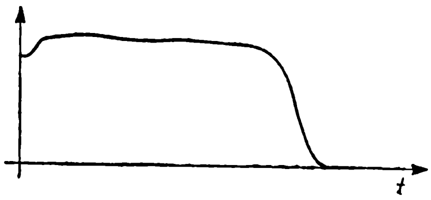

Рис. 2

период недостаточно полной внимательности. Затем очень быстро кривая доходит до максимального состояния, в котором остается почти без изменений длительное время. Затем наступает период монотонного падения внимательности (см. рис. 1).

Некоторые работы и личные наблюдения показывают, что при определенных формах труда, требующих постоянного очень высокого нервного напряжения, переход от почти полной внимательности к почти полной невнимательности происходит резким скачком. Кривая интенсивности внимания имеет вид, изображенный на рис. 2.

Восстановление работоспособности в период отдыха имеет общий вид, изображенный на рис. 3. В зависимости от степени утомления кривая идет более или менее полого. При сильном переутомлении эта кривая, естественно возрастает весьма медленно.

Рис. 3

Конечно, все кривые, о которых только что шла речь, нужно считать реализациями некоторых случайных процессов. Длительность промежутка сохранения почти полной работоспособности и скорость её падения; длительность сохранения усталости и скорость восстановления работоспособности следует рассматривать как случайные величины. Обозначим через $a(t, \alpha)$ интенсивность внимания и через $b(t, \beta)$ — функцию восстановления работоспособности. Здесь α и β обозначают параметры (как правило, векторные), которые зависят от случая и имеют плотности распределения вероятностей $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$. Между параметрами α и β, вообще говоря, существует связь, поскольку β зависит от степени утомленности оператора, а α от степени восстановления его работоспособности.

4. В последние годы появился ряд исследований, посвященных выяснению оптимальных режимов профилактического обслуживания инженерного оборудования. В недавней монографии [1] двух известных американских исследователей в области теории надежности приведены интересные постановки задач и ряд результатов.

Среди этих задач отметим следующую: длительность безотказной работы устройства случайна и имеет распределение $F(x)$; устройство сохраняет до отказа полную работоспособность, а после ремонта восстанавливает свои рабочие свойства полностью. Стоимость ремонта после отказа равна C, а стоимость профилактического ремонта, произведенного до отказа, равна c ($c \ll C$). Спрашивается, как нужно выбирать промежуток времени между профилактиками, чтобы общие затраты на эксплуатацию устройства за длительный промежуток времени T были минимальны? Чтобы не возникало недоразумений, подчеркнем то обстоятельство, что профилактическое обслуживание производится через промежуток времени τ, если за этот срок не было отказа устройства и немедленно после отказа, если отказ наступил до истечении периода τ.

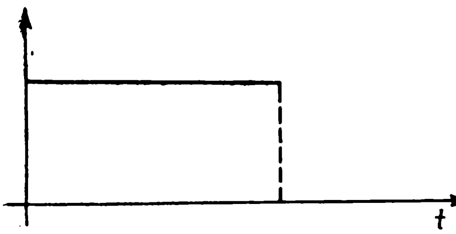

Рис. 4

В книге [1] доказано также, что если профилактику производить не через строго определенные промежутки времени τ, а через случайные промежутки длительности η с функцией распределения $G(x)$, то в предположении, что работа не обновляет устройства, т. е. что интенсивность отказов $\lambda(x) = F'(x)/(1-F(x))$ такова, что $\lambda'(x) \geqslant 0$, то оптимум достигается на классе функций $G(x)$, имеющих единственную точку роста. Иными словами и в этой более широкой постановке вопроса целесообразно профилактические работы производить через строго определенные промежутки времени равной длительности.

Обратим внимание на то, что до сих пор в работах по теории надежности рассматривается только идеальный случай, когда устройство не испытывает „усталости" и работает до момента отказа с одной и той же производительностью, с одной и той же точностью и для него не увеличивается вероятность недоброкачественного выполнения работы со временем. В то же время после отказа устройство полностью теряет способность производить работу. Кривая „утомляемости" в этих исследованиях принимается такой, как это изображено на рис. 4. Для задачи, описанной в прошлом пункте этот случай может служить приближением лишь в условиях кривой рис. 2, т. е. в условиях работы, требующей высокого нервного напряжения.

Заметим одновременно, что реальные технические устройства не только подвержены внезапным отказам, но испытывают и разладку и постепенное ухудшение своих рабочих свойств. В результате качество выполняемой ими работы постепенно ухудшается, со временем появляется повышенная возможность некачественного её исполнения. Таким образом и в работах по профилактике инженерных устройств необходимо учитывать не только возможность внезапных отказов, но и наличие постепенной разладки.

Несомненно, что и для оператора возможны не только постепенные нарастание усталости и падения внимательности, но и внезапные отказы. Мне известны случай, когда оператор полностью выходил из рабочего состояния из-за обморока, внезапного засыпания и т. д. Внезапное засыпание наблюдают у водителей автомобилей на дальние дистанции и не только в ночное, но и в дневное время.

Мы видим очень значительную аналогию между двумя задачами — выбора оптимального периода для проведения профилактических ремонтов машин и задачей оптимального чередования периодов работы и отдыха человека, который выполняет определенную работу в течение длительного времени.

5. Предположим, что каждую единицу времени оператор производит некоторые ценности, стоимость которых равна c, если они выполнены доброкачественно. Если же за единицу времени оператор выполняет некачественную работу, то он приносит убыток, стоимость которого равна C. Согласно тому, что было нами принято в п. 3, за время x оператор производит продукцию стоимостью

$$c(x) = c\int_{a}\int_{0}^{x} a(t,\alpha)dt\varphi(\alpha)d\alpha - C\int_{a}\int_{0}^{x} [1-a(t,\alpha)]\,dt\varphi(\alpha)d\alpha.$$

Обозначим через η минимум тех значений y, при которых $b(y,\beta) = 1$ и положим $\tau = M\eta$. Если после промежутка времени работы длительностью x мы делаем перерыв для отдыха длительности τ, то на единицу времени приходится в среднем следующее количество произведенных ценностей

$$h(x) = \frac{c(x)}{x+\tau}.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать такое x, при котором $h(x)$ достигает максимума. В предположении, что τ является некоторой функцией от x наша задача сводится к элементарной задаче отыскания максимума функции одного независимого переменного.

6. В качестве второй модели рассмотрим случай, когда оператор не производит ценности непрерывно, а обслуживает некоторые требования, появляющиеся в случайные моменты времени. Пусть для простоты длительность обслуживания равна нулю, но это мгновенное обслуживание может быть правильным или ошибочным. Приблизительно с таким положением дел приходится встречаться довольно часто.

Предположим далее, что требования появляются в случайные моменты, образующие простейший поток с параметром λ. Вероятность совершить ошибку, если от начала работы прошло время t, равна $1-e^{-\nu(t)}$, где $\nu(t)$ некоторая монотонная функция от t.

Нам необходимо выбрать такой промежуток x непрерывной работы, чтобы с учётом последующего отдыха в течение времени τ „в среднем" за большое время T было допущено наименьшее число неправильных решений или же вовсе необслуженных требований.

Среднее число необслуженных требований за время отдыха равно $\lambda\tau$. Легко понять, что среднее число ошибочно обслуженных требований за период x равно

$$\int_0^x (1-e^{-\nu(u)})\lambda du.$$

Таким образом общее число необслуженных или ошибочно обслуженных требований за время $\tau+x$ равно

$$c(x) = \tau\lambda + \int_0^x (1-e^{-\nu(u)})\lambda du.$$

Искомым будем то значение x, для которого отношение $c(x)/(x+\tau)$ будет наименьшим.

7. В рассмотренных нами постановках задачи многое еще требует длительных наблюдений, постановки специальных экспериментов, а также обсуждения со специалистами. Несомненно, что корректировки потребуют и наши исходные предпосылки. В первую очередь потребует проверки предположение, что можно найти такой период τ, что в течение этого периода работоспособность восстанавливается полностью. Далее сомнительно, что, независимо от того сколько времени уже продолжалась работа, для восстановления работоспособности достаточен перерыв одной и той же длительности.

Как мне известно, функции $a(t, \alpha)$ и $b(t, \beta)$ изучены совершенно недостаточно. Собственно, общее представление об этих функциях, которое дано рисунками 1-4, передает лишь их среднее поведение. В действительности же это случайные функции, которые могут вести себя и немонотонно. Требует более подробного изучения и вопрос влияния степени утомления оператора на длительность отдыха, необходимого для полного восстановления работоспособности.

Суждение о потере работоспособности и повышенном утомлении по степени внимательности, уменьшению производительности или же по увеличению числа ошибочных операций, совершаемых за единицу времени, вполне естественно. Однако, нужно согласиться с тем, что при этом мы фиксируем лишь некоторые вторичные факторы и не вникаем в природу усталости, в сам психо-физиологический процесс, который её обуславливает.

Цитированная литература

[1] R. E. Barlow & F. Proschan, *Mathematical theory of reliability*, J. Wiley, New York 1965.

[2] Сборник *Инженерная психология*, Изд. Московского университета, Москва 1964.

Поступило в редакцию 30. 8. 1967