W. SADOWSKI (Warszawa)

O NIEPARAMETRYCZNYM TEŚCIE NA PORÓWNYWANIE ROZSIEWÓW

1. Rozważamy k populacji ciągłych, które różnią się między sobą co najwyżej wariancją; rozkłady tych populacji, w szczególności wariancje σ_i^2 $(i=1,2,\dots,k)$, nie są nam znane.

W niniejszej pracy podano *test istotności*, który pozwala sprawdzić hipotezę, że któraś z tych populacji ma większą wariancję niż pozostałe, to znaczy że istnieje takie j, iż

$$\sigma_j^2 > \max(\sigma_1^2,\dots,\sigma_{j-1}^2,\sigma_{j+1}^2,\dots,\sigma_k^2).$$

W teorii sprawdzania hipotez statystycznych istnienie takiego σ_j^2 traktuje się jako hipotezę alternatywną w stosunku do hipotezy zerowej

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

Proponowany test jest *testem nieparametrycznym*, to znaczy do zbudowania go nie potrzeba znać dystrybuanty rozpatrywanych populacji. Jest to niewątpliwie zaletą testu. Drugą jego zaletą jest prostota, co ma szczególne znaczenie dla zastosowań. Natomiast wadą proponowanego testu jest jego stosunkowo niewielka moc [1]). Jest to cena, jaką się zwykle płaci za prostotę testu i brak założenia o rozkładzie populacji generalnej.

Przykładem zastosowania omawianego testu może być badanie dokładności przyrządów pomiarowych. Test pozwala wskazać przyrząd o najmniejszej dokładności lub może okazać, iż wszystkie przyrządy mają tę samą dokładność. Test można również zastosować do badania dokładności kilku maszyn precyzyjnych lub w innych podobnych przypadkach.

Pomysł powyższego testu powstał pod wpływem pracy Mostellera [1]. Mosteller zbudował mianowicie nieparametryczny test pozwalający rozstrzygnąć, która spośród k populacji ma największą średnią, przy założeniu, że populacje są ciągłe i różnią się co najwyżej średnimi.

---

[1]) Zagadnienie mocy tego testu i testów podobnych jest obecnie przedmiotem badań autora.

Zarówno test Mostellera, jak i test podany w niniejszej pracy, opierają się na metodzie permutowania elementów próbki, zwanej także *metodą randomizacji*. Metody tej bardzo często używa się przy konstrukcji testów nieparametrycznych; ponieważ nie jest ona tak powszechnie znana, jakby na to zasługiwała, omówimy ją pokrótce w punkcie 2 [2]).

2. Niech będzie N zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o łącznej dystrybuancie $F_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Niech W oznacza przestrzeń próbek, to znaczy przestrzeń punktów $E=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Każda hipoteza statystyczna, jaką zazwyczaj sprawdzamy, da się napisać w postaci $F_N \epsilon \omega$, gdzie $\omega \epsilon \Omega$, przy czym Ω jest klasą dopuszczalnych dystrybuant. Hipoteza statystyczna jest więc pewnym przypuszczeniem o kształcie dystrybuanty F_N. Test statystyczny służący do sprawdzania hipotez jest regułą, według której rozstrzygamy na postawie próbki, czy sprawdzaną hipotezę należy odrzucić czy przyjąć. Budowa testu polega na znalezieniu takiego obszaru $w \subset W$, że gdy punkt losowy $E=(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ znajdzie się w obszarze w, hipotezę odrzucamy, w przeciwnym zaś przypadku hipotezę przyjmujemy. Zgodnie z klasyczną już dzisiaj teorią Neymana-Pearsona, wybieramy taki obszar w, żeby dla dobranej z góry liczby α $(0<\alpha<1)$ zachodziła nierówność

$$(1) \qquad P(E \epsilon w \mid F_N) \leqslant \alpha \quad \text{dla każdego} \quad F_N \epsilon \omega.$$

Obszar w spełniający powyższą relację nazywa się *obszarem podobnym* do przestrzeni próbek. Litera α oznacza tu prawdopodobieństwo popełnienia błędu polegającego na odrzuceniu sprawdzanej hipotezy $F_N \epsilon \omega$ wtedy, gdy jest ona prawdziwa. Ponieważ w większości przypadków istnieje nieskończenie wiele obszarów spełniających warunek (1), wybieramy ten obszar spośród nich, dla którego

$$(2) \qquad P(E \epsilon w \mid F_N) = \max \quad \text{dla każdego} \quad F_N \epsilon (\Omega - \omega).$$

W ten sposób obszar w zapewnia nam możliwie największe prawdopodobieństwo odrzucenia sprawdzanej hipotezy, gdy jest ona fałszywa.

W przypadku hipotez parametrycznych, to znaczy gdy dystrybuanty należące do zbioru hipotez dopuszczalnych Ω różnią się jedynie parametrami, można często przy zastosowaniu odpowiednich twierdzeń skonstruować obszar w spełniający warunki (1) i (2). Natomiast dla hipotez nieparametrycznych, to znaczy gdy elementami zbioru Ω mogą być jakiekolwiek dystrybuanty, nie tylko nie umiemy efektywnie konstruować obszarów w spełniających powyższe dwa warunki, ale nawet

---

[2]) **Omówienie to będzie miało jedynie charakter szkicu. Bliższe informacje można znaleźć przede wszystkim w pracach R. A. Fishera, [2], str. 96-99 i [3], str. 43-47, który jest twórcą omawianej metody. Interesujące uogólnienia i sprecyzowanie metody randomizacji podają H. Scheffé [4] i [5] oraz E. Lehman i C. Stein [6].**

na ogół nie wiemy, czy obszary takie istnieją. Są jednak metody pozwalające na konstrukcję obszarów podobnych do przestrzeni próbek, to znaczy obszarów w spełniających warunek (1). Jedną z najważniejszych metod jest wymieniona w punkcie 1 metoda randomizacji.

Oznaczmy przez S zbiór tych permutacji współrzędnych $x_1, x_2, \ldots, x_N$ w przestrzeni próbek W, dla których wartości poszczególnych dystrybuant $F_N \epsilon \omega$ nie ulegają zmianie. Niech s oznacza liczbę permutacji należących do zbioru S. Każdemu punktowi E z przestrzeni W przyporządkujemy zbiór (E'), do którego należy s punktów otrzymanych przez wszystkie permutacje ze zbioru S dokonane na współrzędnych punktu E.

Do obszaru w zbudowanego metodą randomizacji zaliczamy po q punktów $(q<s)$ wybranych ze wszystkich zbiorów (E') odpowiadających wszystkim punktom E. Okazuje się, że obszary zbudowane metodą randomizacji są obszarami podobnymi, to znaczy spełniają warunek (1), przy czym $P(E \epsilon w | F_N) = q/s$. Można wykazać, przy dość słabych założeniach, że metoda randomizacji jest jedyną metodą pozwalającą na konstrukcję obszarów podobnych w przypadku sprawdzania hipotez nieparametrycznych. Można też wykazać, że obszary podobne istnieją tylko wtedy, gdy do klasy Ω należą wyłącznie dystrybuanty ciągłe[3]). Dlatego przy większości testów nieparametrycznych musimy zakładać ciągłość populacji generalnej.

Łatwo zauważyć, że obszarów podobnych zbudowanych metodą randomizacji może być wiele. Powstaje zagadnienie, jak wybrać jeden z nich. Otóż w przypadkach nieparametrycznych bardzo trudno jest korzystać z warunku (2), gdyż należałoby rozpatrywać funkcjonał $P(E \epsilon w | F_N)$ określony dla $F_N \epsilon (\Omega - \omega)$. Jak dotąd, w praktyce wybiera się obszar podobny spośród obszarów spełniających relację (1) za pomocą odpowiednio skonstruowanej statystyki $T(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Podamy tutaj przykład zastosowania metody randomizacji i użycia odpowiedniej statystyki T.

PRZYKŁAD. Z populacji o nieznanym rozkładzie ciągłym $G(x,y)$ pobrano próbkę (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ składającą się z m niezależnych par. Na tej podstawie należy sprawdzić hipotezę o niezależności zmiennych X i Y.

Klasą dopuszczalnych dystrybuant Ω jest tu klasa wszystkich ciągłych dystrybuant (dwuwymiarowych), natomiast podzbiór ω zawiera wszystkie dystrybuanty F_N postaci

$$F_N = \prod_{i=1}^{m} J(x_i) \prod_{j=1}^{m} K(y_j), \tag{3}$$

gdzie J i K są dowolnymi dystrybuantami ciągłymi oraz $N = 2m$.

---

[3]) Wszystkie te twierdzenia w precyzyjnej formie można znaleźć w wymienionych już poprzednio pracach H. Scheffé'go [4] i [5] oraz E. Lehmana i C. Steina [6].

Do zbioru S należą w rozważanym przypadku te permutacje dokonane na współrzędnych $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$, które nie zmieniają wartości żadnej z dystrybuant $F_N \epsilon \omega$, to znaczy żadnej z dystrybuant postaci (3). Otóż F_N nie zmienia wartości wtedy, gdy permutuje się współrzędne x_i między sobą oraz osobno współrzędne y_j; natomiast łączne permutowanie współrzędnych x_i i y_j może wpływać na wartość F_N. A więc zbiór S liczy w naszym przykładzie $(m!)^2$ elementów. Zatem każdemu punktowi E z $2m$-wymiarowej przestrzeni prób W jest przyporządkowany zbiór (E') składający się z $(m!)^2$ punktów o współrzędnych wyznaczonych przez elementy zbioru S. Wybierając po q punktów ze wszystkich zbiorów (E'), otrzymujemy obszar podobny w, dla którego

$$P(E \epsilon w | F_N) = \frac{q}{(m!)^2} \quad \text{dla każdego} \quad F_N \epsilon \omega.$$

O tym, które q punktów spośród każdego zbioru (E') zaliczyć do obszaru w, rozstrzygamy za pomocą odpowiednio dobranej statystyki T. W naszym przypadku taką statystyką może być na przykład

$$T(E) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right|}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i^2}.$$

Zgodnie z intuicją, do obszaru w zaliczymy tych q punktów każdego zbioru (E'), dla których $T(E)$ przyjmuje wartości większe niż dla pozostałych $s-q$ punktów.

Niech na przykład wyniki próby będą następujące: $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=8$. Zbiór S liczy tu $(3!)^2=36$ elementów. Należy teraz obliczyć na podstawie próbki 36 możliwych wartości, jakie może przyjąć $T(E)$. Łatwo się przekonać, że w 6 przypadkach $T(E)=54$, w 6 następnych $T(E)=51$, i dalej, każdorazowo dla 6 przypadków, mamy $T(E)=50$, $T(E)=39$, $T(E)=37$, $T(E)=33$.

Załóżmy, że $\alpha=0{,}2$; wówczas zaliczając do obszaru krytycznego pierwszych 6 punktów mamy

$$P(E \epsilon w | F_N) = \frac{6}{36} = 0{,}166\ldots$$

Zaliczając 12 punktów otrzymamy

$$P(E \epsilon w | F_N) = \frac{12}{36} = 0{,}333\ldots$$

A zatem przy $\alpha=0{,}2$ do obszaru w należy zaliczyć 6 punktów dających największą wartość $T(E)$. Ponieważ w naszym przykładzie $T(E)=54$, więc hipotezę o niezależności należy odrzucić.

3. Podamy obecnie konstrukcję testu, o którym była mowa w punkcie 1. Załóżmy, że próbki ze wszystkich k populacji są jednakowo liczne i mają po n elementów[4]). Spośród k próbek wybieramy tę, która zawiera element największy wśród kn obserwacji i jednocześnie element najmniejszy. W tak wybranej próbce ustalamy łączną liczbę elementów większych i mniejszych niż elementy w pozostałych $k-1$ próbkach. Elementy te nazwijmy *elementami wystającymi*. Ilość ich w wybranej próbce (jeśli taka istnieje), oznaczmy przez r. Ustala się pewną liczbę r_0, tak że jeżeli $r \geqslant r_0$, to odrzucamy hipotezę o równości wariancji i przyjmujemy, że próbka zawierająca najmniejszy i największy element, czyli próbka wybrana, pochodzi z populacji o największej wariancji. W przeciwnym razie, jeśli $r < r_0$ lub nie ma w ogóle próbki wybranej, przyjmujemy, że wariancje wszystkich populacji są równe[5]).

Konstrukcja testu polega na zastosowaniu metody randomizacji, która występuje tu w szczególnie uproszczonej postaci. Wynika to z tego faktu, że statystyka r, którą się tu posługujemy, nie zależy bezpośrednio od wielkości poszczególnych obserwacji, lecz od porządku wskaźników tych obserwacji, gdy zostaną one uporządkowane według wielkości rosnących (lub malejących), na przykład

$$x_{\alpha_1} < x_{\alpha_2} < \ldots < x_{\alpha_{kn}}, \tag{4}$$

gdzie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{kn})$ jest pewną permutacją liczb $1, 2, \ldots, kn$. Oczywiście wszystkie punkty spełniające warunek (4) dają tę samą wartość statystyki r i wobec tego nie potrzeba ich rozróżniać. Prawdopodobieństwo otrzymania jakiegokolwiek punktu należącego do obszaru wyznaczonego przez (4)[6]) jest równe $1/s$ (gdzie s jest liczbą permutacji wskaźników α nie zmieniających wartości F_N), co natychmiast wynika z rozważań ogólnych przeprowadzonych w punkcie 2. Nadto należy zauważyć, że zmiana porządku wskaźników wewnątrz poszczególnych k próbek, a więc w zespołach

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_{2n}), \ldots, (\alpha_{(k-1)n+1}, \alpha_{(k-1)n+2}, \ldots, \alpha_{kn}),$$

również nie wpływa na wielkość statystyki r. W naszym przypadku warto więc jedynie zająć się ilością tych permutacji wskaźników, które

---

[4]) Test przy próbkach niejednakowo licznych byłby rachunkowo nieco bardziej skomplikowany.

[5]) Po złożeniu niniejszej pracy do redakcji ukazała się praca S. Rosenbauma [7], w której autor podaje analogicznie zbudowany test dla przypadku dwóch populacji ($k=2$), natomiast nie zakłada jednakowej ilości elementów w próbkach.

[6]) Jest to więc prawdopodobieństwo punktu dającego określoną wartość statystyki r.

mogą dawać różne wartości r. Jak łatwo obliczyć, ilość tych permutacji wynosi $(kn)!/(n!)^k$.

Zadaniem naszym jest obliczyć prawdopodobieństwo, że w próbce wybranej ilość elementów wystających r jest równa lub większa od określonej liczby i $(i=2,3,\ldots,n)$.

Rachunek należy wykonać przy założeniu, że hipoteza zerowa $(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_k^2)$ jest prawdziwa. Będzie on polegał na obliczeniu, ile jest tych permutacji spośród $(kn)!/(n!)^k$, dla których $r\geqslant i$.

Zacznijmy od przypadku najłatwiejszego, gdy $i=n$. Skład wybranej próbki można przedstawić schematycznie w następujący sposób:

Warianty		1	2	3 ...	$n-3$	$n-2$	$n-1$
Ilość elementów w wybranej próbce	większych od elementów w innych próbkach	1	2	3 ...	$n-3$	$n-2$	$n-1$
	mniejszych od elementów w innych próbkach	$n-1$	$n-2$	$n-3$ ...	3	2	1
Razem elementów wystających		n	n	n ...	n	n	n

Z każdym takim wariantem może się łączyć $\dfrac{[(k-1)n]!}{(n!)^{k-1}0!}$ permutacji powstałych z permutowania pozostałych elementów. Ogólna więc liczba $L(n)$ permutacji, w których wybrana próbka ma n elementów wystających, wynosi

$$L(n)=(n-1)\frac{[(k-1)n]!}{(n!)^{k-1}0!}\,.$$

Z kolei obliczymy liczbę tych permutacji, w których ilość wystających elementów w wybranej próbce wynosi $n-1$ lub więcej. Skład wybranej próbki zawierającej $n-1$ elementów wystających może być jednym z następujących wariantów:

Warianty		1	2	3 ...	$n-3$	$n-2$
Ilość elementów w wybranej próbce	większych od elementów w innych próbkach	1	2	3 ...	$n-3$	$n-2$
	mniejszych od elementów w innych próbkach	$n-2$	$n-3$	$n-4$ ...	2	1
Razem elementów wystających		$n-1$	$n-1$	$n-1$ ...	$n-1$	$n-1$

Z każdym takim wariantem może się łączyć $\frac{[(k-1)n+1]!}{(n!)^{k-1}1!}$ permutacji utworzonych z pozostałych elementów. Należy tu zauważyć, że z próbki o składzie $(1,n-2)$ mogą powstać próbki (przez odpowiednią zmianę jednego elementu) o składzie $(1,n-1)$ lub $(2,n-2)$. Z próbki o składzie $(2,n-3)$ mogą powstać próbki o składzie $(2,n-2)$ lub $(3,n-3)$ itd. W rezultacie otrzymujemy

$$L(n-1)=(n-2)\frac{[(k-1)n+1]!}{(n!)^{k-1}1!}-(n-1-2)\frac{[(k-1)n]!}{(n!)^{k-1}0!}.$$

Analogicznie rozumując można obliczyć ilość permutacji, w których ilość elementów wystających w wybranej próbce wynosi $n-2$ lub więcej:

$$L(n-2)\doteq(n-3)\frac{[(k-1)n+2]!}{(n!)^{k-1}2!}-(n-2-2)\frac{[(k-1)n+1]!}{(n!)^{k-1}1!}.$$

Ogólnie, łatwo już wykazać, że

$$L(n-u)=(n-u-1)\frac{[(k-1)n+u]!}{(n!)^{k-1}u!}-(n-u-2)\frac{[(k-1)n+u-1]!}{(n!)^{k-1}(u-1)!}$$

dla $1\leqslant u\leqslant n-2$. Oznaczając $n-u=i$ otrzymujemy ostatecznie

$$(5)\qquad L(i)=(i-1)\frac{(kn-i)!}{(n!)^{k-1}(n-i)!}-(i-2)\frac{(kn-i-1)!}{(n!)^{k-1}(n-i-1)!}$$

dla $i=2,3,\ldots,n-1$,

$$(5')\qquad L(i)=(i-1)\frac{(kn-i)!}{(n!)^{k-1}(n-i)!}\qquad \text{dla}\quad i=n.$$

Otrzymane wzory pozwalają obliczyć ilość tych permutacji wśród $(kn)!/(n!)^k$, dla których w określonej próbce (to znaczy w próbce pochodzącej z określonej populacji) $r\geqslant i$. Wobec tego prawdopodobieństwo, że w określonej próbce $r\geqslant i$, wynosi

$$P(r\geqslant i)=\frac{L(i)(n!)^k}{(kn)!}.$$

Nas jednak interesuje nie prawdopodobieństwo, że w określonej próbce (lub wziętej losowo) $r\geqslant i$, lecz prawdopodobieństwo, że $r\geqslant i$ w próbce wybranej. Wobec tego szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(r\geqslant i)=k\frac{L(i)(n!)^k}{(kn)!}.$$

Po podstawieniu do ostatniego wyrażenia (5) lub (5′) i po uproszczeniach otrzymujemy

$$P(r \geqslant i) = (i-1)k\frac{\binom{kn-i}{n-i}}{\binom{kn}{n}} - (i-2)k\frac{\binom{kn-i-1}{n-i-1}}{\binom{kn}{n}} \tag{6}$$

dla $i=2,3,\ldots,n-1$,

$$P(r \geqslant i) = (i-1)k\frac{\binom{kn-i}{n-i}}{\binom{kn}{n}} \quad \text{dla} \quad i=n. \tag{6'}$$

Warto zauważyć, że przy stałym i oraz k i gdy $n \to \infty$, wzór powyższy znacznie się upraszcza. Korzystając ze wzoru Stirlinga na $n!$ można wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} P(r \geqslant i) = \frac{1}{k^{i-1}}\left(i-1-\frac{i-2}{k}\right). \tag{7}$$

4. Na podstawie otrzymanych wzorów (6), (6′) i (7) można sporządzić odpowiednie tablice, ułatwiające stosowanie proponowanego testu. Poniżej podaje się kilka tablic dla różnych wartości k, n oraz i. Tablice te podają prawdopodobieństwa, że przy danym k i n próbka wybrana będzie miała i lub więcej elementów wystających.

Przykład. Każdym z trzech mikrometrów zmierzono pięć razy ten sam przedmiot. Należy rozstrzygnąć, czy wszystkie trzy mikrometry są jednakowo dokładne, czy też jakiś (i który?) jest mniej dokładny od pozostałych. Uporządkowane wyniki pomiarów każdego z mikrometrów podano obok.

I mikrometr	II mikrometr	III mikrometr
4,077	4,070	4,069
4,078	4,079	4,071
4,082	4,080	4,075
4,084	4,081	4,083
4,085	4,086	4,087

Stosujemy test na przykład przy poziomie istotności 0,05. Próbką wybraną są wyniki pomiarów uzyskane trzecim mikrometrem. Wartość statystyki r, to znaczy ilość elementów wystających w wybranej próbce, wynosi 2. Korzystamy następnie z tablicy dla $k=3$ i odczytujemy pod $n=5$ i $i=2$ prawdopodobieństwo 0,2857, to znaczy $P(r \geqslant 2) = 0{,}2857$. Wobec tego nie ma powodu twierdzić, że trzeci mikrometr jest mniej dokładny niż pozostałe. Krytyczna wartość r_0 wynosi 4, o czym łatwo przekonać się z tablic.

TABLICE

Wartości prawdopodobieństw $P(r \geqslant i)$ **w zależności od ilości populacji** (k) **i od liczności** (n)

$k=2$

n \ i	2	3	4	5	6
2	0,3333				
3	,4000	0,2000			
4	,4286	,2572	0,0857		
5	,4444	,2857	,1270	0,0317	
6	,4545	,3030	,1515	,0541	0,0108
7	,4615	,3147	,1678	,0699	,0210
8	,4667	,3231	,1795	,0816	,0294
9	,4706	,3294	,1882	,0905	,0362
10	,4737	,3344	,1950	,0975	,0418
11	,4762	,3383	,2005	,1032	,0464
12	,4783	,3416	,2050	,1079	,0504
13	,4800	,3444	,2087	,1118	,0537
14	,4815	,3467	,2119	,1162	,0565
15	,4828	,3487	,2146	,1180	,0590
16	,4839	,3504	,2169	,1205	,0612
17	,4848	,3519	,2190	,1227	,0631
18	,4857	,3532	,2208	,1246	,0648
19	,4865	,3544	,2224	,1264	,0663
20	,4872	,3555	,2238	,1279	,0677
21	,4878	,3565	,2252	,1293	,0690
22	,4884	,3574	,2263	,1306	,0701
23	,4889	,3582	,2274	,1318	,0711
24	,4894	,3589	,2284	,1328	,0721
25	,4898	,3595	,2293	,1337	,0730
26	,4902	,3602	,2301	,1346	,0738
27	,4906	,3607	,2309	,1355	,0745
28	,4909	,3612	,2315	,1362	,0752
29	,4912	,3617	,2322	,1369	,0758
30	,4915	,3622	,2328	,1376	,0764
∞	0,5000	0,3750	0,2500	0,1563	0,0938

$k=3$

n \ i	2	3	4	5	6
2	0,2000				
3	,2500	0,0714			
4	,2727	,1030	0,0182		
5	,2857	,1209	,0310	0,0050	
6	,2941	,1324	,0399	,0079	0,0008
7	,3000	,1404	,0464	,0112	,0018
8	,3044	,1462	,0514	,0139	,0028
9	,3077	,1508	,0553	,0162	,0038
10	,3104	,1544	,0584	,0180	,0046
11	,3125	,1573	,0609	,0196	,0053
12	,3143	,1597	,0630	,0209	,0060
13	,3158	,1617	,0648	,0221	,0066
14	,3171	,1634	,0664	,0231	,0071
15	,3182	,1650	,0677	,0240	,0075
16	,3191	,1662	,0689	,0247	,0079
17	,3200	,1674	,0699	,0254	,0083
18	,3208	,1684	,0708	,0260	,0086
19	,3214	,1693	,0717	,0266	,0089
20	,3220	,1701	,0724	,0271	,0092
∞	0,3333	0,1852	0,0864	0,0370	0,0151

$k=4$

n	2	3	4	5	6
2	0,1429				
3	,1818	0,0364			
4	,2000	,0550	0,0066		
5	,2105	,0661	,0119	0,0010	
6	,2174	,0734	,0158	,0022	0,0001
7	,2222	,0786	,0188	,0032	,0004
8	,2258	,0825	,0211	,0041	,0006
9	,2286	,0856	,0230	,0048	,0008
10	,2308	,0880	,0245	,0055	,0010
11	,2326	,0899	,0258	,0060	,0012
12	,2340	,0916	,0268	,0065	,0013
13	,2353	,0930	,0277	,0069	,0015
14	,2364	,0942	,0285	,0073	,0016
15	,2373	,0952	,0292	,0076	,0017
∞	0,2500	0,1194	0,0391	0,0127	0,0039

Prace cytowane

[1] F. Mosteller, *A k-sample slippage test for an extreme population*, Annals of Mathematical Statistics 19 (1948), str. 58-65.

[2] R. A. Fisher, *Statistical methods for research workers*, 10th ed., London 1948.

[3] — *The design of experiments*, 5th ed. London 1948.

[4] H. Scheffé, *Statistical inference in the non-parametric case*, Annals of Mathematical Statistics 14 (1943), str. 305-332.

[5] — *On a measure problem arising in the theory of non-parametric tests*, Annals of Mathematical Statistics, 14 (1943), str. 227-233.

[6] E. L. Lehman and C. Stein, *On the theory of some non-parametric hypotheses*, Annals of Mathematical Statistics 20 (1949), str. 28-45.

[7] S. Rosenbaum, *Tables for a non-parametric test of dispersion*, Annals of Mathematical Statistics 24 (1953), str. 663-668.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 16. 12. 1953 r.

В. САДОВСКИЙ (Варшава)

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ КРИТЕРИИ ДЛЯ СРАВНИВАНИЯ РАЗБРОСОВ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваем k генеральных совокупностей с неизвестными распределениями. О распределениях предполагаем, что все непрерывны, причем могут отличаться лишь разными дисперсиями.

Приводим критерий значимости, который позволяет на основе выборок из этих k совокупностей (по n элементов в каждой), проверить, имеет ли некоторая из них дисперсию большую чем остальные совокупности. Построение критерия состоит в применении фишерового случайного метода: выбирается ту среди k выборок, которая содержит найбольший элемент среди kn наблюдений и одновременно — наименьший элемент. В так выбранной выборке подсчитываем число элементов больших и меньших, чем элементы в остальных $k-1$ выборках. Число этих элементов обозначим через r. Определяем некоторое число r_0 (зависящее от уровния значимости, от n и от k) таким образом, что если $r \geqslant r_0$, то отвергаем гипотез о равенстве дисперсий в k совокупностях и принимаем, что выборка содержащая найбольший и наименьший элемент, происходит от совокупности с найбольшей дисперсией. В противном случае, если $r < r_0$ или если не существует выборка с найбольшим и наименьшим элементом, принимаем, что дисперсии всех совокупностей одинаковы. В работе приведены соответствующие таблици для $k=2,3,4$.

W. SADOWSKI (Warszawa)

ON A NON-PARAMETRIC TEST OF COMPARING DISPERSIONS

SUMMARY

We consider k populations with unknown distribution functions. As regards those functions we assume merely that they are continuous, the only difference between them consisting in different variances.

The test of significance given in the paper makes it possible to verify on the basis of samples from those k populations (of n elements each) whether any of them has a greater variance than the remaining populations. The construction of the test consists in applying Fisher's randomization method. Namely, we choose from k samples the one that has the largest element among kn observations and at the same time has the smallest element. In the sample selected in this way we establish the joint number of elements larger and smaller than the elements in the remaining $(k-1)$ samples. The number of those elements is denoted by r. We fix a certain number r_0 (dependent on the significance level, on n and on k) in such a way that if $r \geqslant r_0$, we reject the hypothesis of the equality of variances in k populations and assume that the sample containing the smallest and the largest element comes from the population with the greatest variance. Otherwise, if $r < r_0$ or if there is no sample with the largest and the smallest element, we assume that the variances of all populations are equal. The paper contains suitable tables for k equal to 2, 3 and 4.