J. ODERFELD (Warszawa)

NAJWIĘKSZA RÓŻNICA MIĘDZY RZĘDNYMI CHARAKTERYSTYK PLANÓW POJEDYNCZYCH

1. Sformułowanie zagadnienia

Niniejsza praca stanowi analityczne rozwiązanie pewnego zagadnienia występującego w pracy C. Rajskiego „O pewnej metodzie obliczania optymalnej liczności próbki", ogłoszonej w tym samym zeszycie Zastosowań Matematyki, co usprawiedliwia skrócenie ekspozycji.

Są więc dwa plany badania alternatywnego, pojedynczego, oznaczone symbolami $m_1//n_1$ i $m_2//n_2$, gdzie n oznacza zawsze liczność próbki, m zaś liczbę *kwalifikującą*, to znaczy największą liczbę sztuk niedobrych, przy której można jeszcze uznać partię za dobrą.

Ze względu na zastosowania praktyczne wystarczy rozważyć przypadek, gdy zachodzi zespół nierówności

$$
\begin{aligned}
&n_2 > n_1, \\
(1)\qquad &m_2 > m_1, \\
&n_2 - n_1 \geqslant m_2 - m_1.
\end{aligned}
$$

Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo uznania za dobrą partii o wadliwości w. Zależność $p=f(w; m, n)$ jest *charakterystyką* planu badania $m//n$. Na rysunku (str. 228), w górnej jego części, pokazano przykład dwóch charakterystyk, których parametry spełniają zespół nierówności (1).

Zadania są następujące:

a. Znaleźć wartości w, dla których wyrażenie $\Delta = p_2 - p_1$ osiąga ekstremum,

b. Znaleźć wartości ekstremalne Δ.

Wartości znalezione w zadaniu b służą do celów praktycznych.

2. Rozwiązanie ogólne

Jak wiadomo [1])

$$p_1 = 1 - \frac{n_1!}{m_1!(n_1-m_1-1)!} \int_0^w x^{m_1}(1-x)^{n_1-m_1-1}dx. \tag{2}$$

Analogiczny wzór określa p_2.

Aby pewna wartość w była rozwiązaniem zadania a, trzeba i wystarcza, żeby

$$\frac{d\Delta}{dw} = 0 \tag{3}$$

oraz

$$\frac{d^2\Delta}{dw^2} \neq 0. \tag{4}$$

Uwzględniając (2) możemy równanie (3) napisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dw} = -\frac{n_2!}{m_2!(n_2-m_2-1)!} w^{m_2}(1-w)^{n_2-m_2-1} + \\ + \frac{n_1!}{m_1!(n_1-m_1-1)!} w^{m_1}(1-w)^{n_1-m_1-1} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

lub w postaci

$$\begin{aligned} K = \frac{n_2!}{m_2!(n_2-m_2-1)!} w^{m_2}(1-w)^{n_2-m_2-1} = \\ = \frac{n_1!}{m_1!(n_1-m_1-1)!} w^{m_1}(1-w)^{n_1-m_1-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Oznaczmy

$$A = \frac{n_1!m_2!(n_2-m_2-1)!}{n_2!m_1!(n_1-m_1-1)!} = \frac{\binom{n_1}{m_1}}{\binom{n_2}{m_2}} \cdot \frac{n_1-m_1}{n_2-m_2}. \tag{7}$$

---

[1]) Por. np. J. Oderfeld, *Statystyczny odbiór towarów klasyfikowanych według alternatywy*, Studia i Prace Statystyczne 2 (1950).

Z równań (5) i (7) wynika

$$(3') \qquad A = w^{m_2-m_1}(1-w)^{(n_2-n_1)-(m_2-m_1)}.$$

Różniczkując równanie (5) wzgledem w znajdujemy

$$\frac{d^2\Delta}{dw^2} = \frac{n_2!}{m_2!(n_2-m_2-1)!}\, w^{m_2-1}(1-w)^{n_2-m_2-2}[(n_2-1)w-m_2)] -$$

$$- \frac{n_2!}{m_1!(n_1-m_1-1)!}\, w^{m_1-1}(1-w)^{n_1-m_1-2}[(n_1-1)w-m_1].$$

Podzielmy obie strony tego równania przez wyrażenie $K/w(1-w)$, które jest różne od zera dla $0<w<1$. Po prostym przekształceniu otrzymamy

$$(8) \qquad \frac{w(1-w)}{K}\,\frac{d^2\Delta}{dw^2} = w(n_2-n_1)-(m_2-m_1).$$

A więc — zakładając, że spełniona jest zależność (3) — można warunek (4) napisać w postaci

$$(4') \qquad w \neq \frac{m_2-m_1}{n_2-n_1}.$$

Pierwiastki równania (3′), spełniające warunek (4′), są rozwiązaniem zadania a.

Dla zbadania liczby pierwiastków oznaczmy prawą stronę równania (3′) przez $\varphi(w)$. Dla $w=0$ i dla $w=1$ jest $\varphi(w)=0$. Różniczkując $\varphi(w)$, znajdziemy

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{dw} = [m_2-m_1-(n_2-n_1)w]\,w^{m_2-m_1-1}(1-w)^{(n_2-n_1)-(m_2-m_1)}.$$

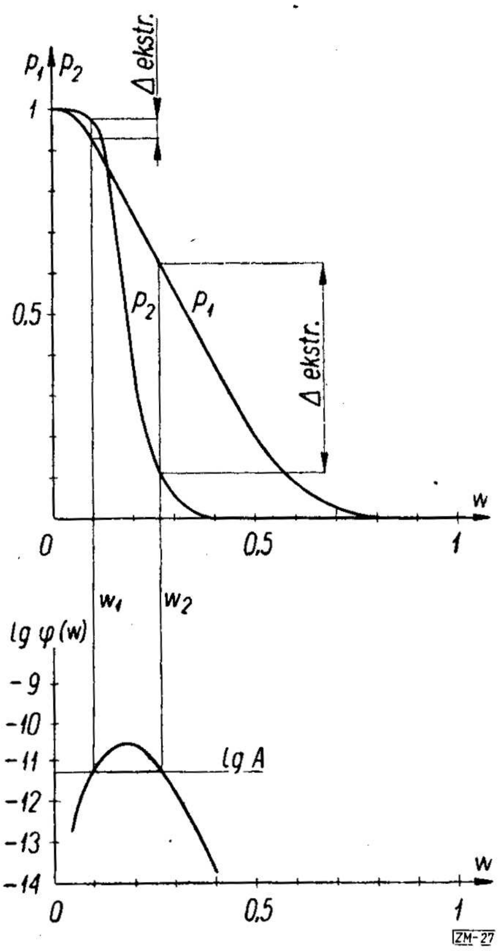
W przedziale $0<w<1$ wyrażenie (9) raz tylko przybiera wartość zero, mianowicie dla

$$(10) \qquad w = \frac{m_2-m_1}{n_2-n_1}.$$

Gdy jest spełnione (10), to

$$(11) \qquad \frac{d^2\varphi}{dw^2} = -(n_2-n_1)\,w^{m_2-m_1-1}(1-w)^{(n_2-n_1)-(m_2-m_1)}.$$

Ponieważ założyliśmy, że $n_2 > n_1$, więc dla $0 < w < 1$ prawa strona wyrażenia (11) jest ujemna. Znaczy to, że $\varphi(w)$ ma w przedziale $0 < w < 1$ jedno tylko ekstremum, mianowicie maksimum, gdy jest spełniony warunek (10), który jest przeciwny do warunku (4′).



Rys. 1

Stąd wynikają dwa wnioski:

1° Równanie (3′) ma co najwyżej dwa pierwiastki.

2° Jeśli są dwa pierwiastki, to spełniony jest warunek (4′), wobec czego te pierwiastki są rozwiązaniami zadania a.

Dla każdego z pierwiastków obliczamy według wzoru (2), lub innego wzoru równoważnego, wartość p_1 oraz analogicznie p_2 i wreszcie $\Delta = p_2 - p_1$. Na rysunku, w dolnej jego części, pokazano zależność między $\lg\varphi(w)$ a w dla pewnego przykładu. Pokazano również konstrukcję prowadzącą do wyznaczenia Δ_{ekstr}. Oczywiście rysunek należy traktować tylko jako ilustrację metody, gdyż rozwiązanie efektywne, podane w następnym rozdziale, jest o wiele szybsze i dokładniejsze od sposobu wykreślnego.

3. Rozwiązanie efektywne

Pomnóżmy obie strony równania (3′) przez $\binom{n_2 - n_1}{m_2 - m_1}$ i wprowadźmy oznaczenie

$$B = A\binom{n_2 - n_1}{m_2 - m_1} = \frac{\binom{n_1}{m_1}}{\binom{n_2}{m_2}} \binom{n_2 - n_1}{m_2 - n_1} \frac{n_1 - m_1}{n_2 - m_2}. \tag{12}$$

Otrzymamy równanie

$$(3'') \qquad B = \binom{n_2-n_1}{m_2-m_1} w^{m_2-m_1}(1-w)^{(n_2-n_1)-(m_2-m_1)},$$

równoważne z równaniem (3').

Postać prawej strony równania (3'') pozwala — wobec założeń (1) — na prostą interpretację probabilistyczną. Mianowicie B jest równe prawdopodobieństwu w rozkładzie dwumianowym, że znajdziemy m_2-m_1 sztuk niedobrych w próbce o liczności n_2-n_1, gdy wadliwość jest w.

Przypomnijmy teraz, że przybliżeniem rozkładu dwumianowego jest rozkład Poissona. Dokładność tego przybliżenia jest tym lepsza, im w jest mniejsze a n_2-n_1 jest większe. Do tych celów, dla których napisano niniejszy artykuł — zwłaszcza wobec niewielkich zmian Δ w okolicy ekstremum — można na tym przybliżeniu poprzestać, gdy $w \leqslant 0{,}2$ oraz $n_2-n_1 \leqslant 20$. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, możemy zastosować łatwą iterację.

Oznaczmy

$$(13) \qquad \begin{aligned} M &= m_2-m_1, \\ N &= n_2-n_1, \\ c &= w(n_2-n_1). \end{aligned}$$

Wtedy

$$(14) \qquad B \sim \frac{c^M}{M!} e^{-c}.$$

Wartości prawej strony (14) są podane w tablicach funkcji Poissona. Wystarczy więc odszukać w nich wartość c, dla której prawdopodobieństwo wylosowania M jest B. Dzieląc c przez n_2-n_1 znajdujemy w. Do wyznaczenia p_1 i p_2 możemy również użyć funkcji Poissona, pamiętając o omówionych warunkach stosowalności.

Dowolnie dokładne wartości w możemy znaleźć stosując regułę przybliżeń Newtona. Niechaj w' oznacza pierwsze przybliżenie. Jako drugie przybliżenie znajdujemy

$$(15) \quad w'' = w' + 2{,}30258[5M \lg w' + (N-M)\lg(1-w') - \lg A]\frac{w'(1-w')}{M-Nw'}.$$

4. Przykład

Dane są $n_1=40$, $m_1=7$, $n_2=60$, $m_2=10$.
Obliczenie orientacyjne przebiega następująco:

$$M=3, \quad N=20.$$

Według wzoru (12), korzystając z tablic logarytmów silni, znajdujemy

$$B=0{,}186.$$

W tablicy gęstości rozkładu Poissona w kolumnie $M=3$ wyszukujemy liczbę 0,186 i znajdujemy dwa orientacyjne rozwiązania na c, mianowicie $c_1'=2{,}07$ i $c_2'=4{,}2$. Odpowiednio do nich obliczamy

$$w_1'=\frac{2{,}07}{20}=0{,}103,$$

$$w_2'=\frac{4{,}2}{20}=0{,}21.$$

Teraz znajdujemy Δ korzystając z kumulacyjnych tablic funkcji Poissona.

$$\begin{array}{lll}
\underline{w_1'=0{,}103} & & \\
w_1'n_2=0{,}103\cdot 60=6{,}24, & m_2=10, & p_{21}'=0{,}947, \\
w_1'n_1=0{,}103\cdot 40=4{,}12, & m_1=7, & \underline{p_{11}'=0{,}942,} \\
 & & \Delta_1'=0{,}005. \\
\underline{w_2'=0{,}21} & & \\
w_2'\cdot n_1=0{,}21\cdot 40=8{,}4, & m_1=7, & p_{12}'=0{,}389, \\
w_2'\cdot n_2=0{,}21\cdot 60=12{,}6, & m_2=10, & \underline{p_{22}'=0{,}288,} \\
 & & \Delta_2'=0{,}101.
\end{array}$$

Iterując według wzoru (15) znajdujemy dokładniejsze wartości $\Delta_1''=0{,}009$ i $\Delta_2''=0{,}112$.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(Praca wpłynęła dnia 23. 10. 1952 r.)

Я. ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

НАИБОЛЬШАЯ РАЗНОСТЬ МЕЖДУ ОРДИНАТАМИ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОКРАТНЫХ ПЛАНОВ

РЕЗЮМЕ

В теории статистического контроля качества нужно определить наибольшую разность между ординатами характеристик двух однократных планов приемного испытания, которые предусматривают объемы проб соответственно n_1 и n_2, и наибольше количества m_1 и m_2 недоброкачественных штук в пробе, при которых партию принимается.

Практической интересен только случай, когда

$$n_2 > n_1,\quad m_2 > m_1,\quad n_2 - n_1 \geqslant m_2 - m_1.$$

Итак ищем максимумы выражения

$$p_2(w; n_2, m_2) - p_1(w; n_1, m_1),$$

чде w означает процент партии.

Решение, достаточно точное для практики, сводится к нахождению по таблицам разложения Пуассона и к простым арифметическим действиям.

Даны также итерационное правило и пример.

J. ODERFELD (Warszawa)

THE GREATEST DIFFERENCE BETWEEN THE ORDINATES OF THE OPERATING CHARACTERISTIC CURVES OF SINGLE SAMPLING PLANS

SUMMARY

In a certain problem of statistical quality control it has been found necessary to determine the greatest difference between the ordinates of the operating characteristic curves of two single sampling acceptance plans by attributes, assuming the sizes n_1 and n_2 of the samples and the acceptance numbers m_1 and m_2 respectively.

With regard to practical applications we are interested only in the case of $n_2 > n_1$, $m_2 > m_1$, $n_2 - n_1 \geqslant m_2 - m_1$.

We seek, therefore, the extremes of the expression

$$p_2(w; n_2, m_2) - p_1(w; n_1, m_1),$$

where w is the percent defective of the lot.

The solution, sufficiently exact for many practical purposes, is found by looking up the tables of the Poisson distribution and by simple arithmetic operations.

A description of iterative procedure has been given, together with an example.
