

L. ŁUKASZEWICZ (Warszawa)

*ELEKTRONOWY ANALIZATOR RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH „ARR” I NIEKTÓRE JEGO ZASTOSOWANIA**

1. Wstęp

Jednym z najważniejszych zadań techniki jest umożliwienie człowiekowi wykonywania czynności przekraczających znacznie jego własne siły. W dotychczasowym rozwoju techniki czynności te były przede wszystkim natury fizycznej, ostatnio jednak pojawiły się maszyny, które z ogromną sprawnością wspierają człowieka również w czynnościach umysłowych. Do maszyn tych należą przede wszystkim elektronowe aparaty matematyczne, umożliwiające rozwiązywanie nawet bardzo skomplikowanych równań w niewiarogodnie krótkim czasie. Dzięki ogromnej szybkości przebiegów elektrycznych aparaty te pozwalają na osiągnięcie takiej szybkości rachowania, że wiele równań, wymagających nieraz paromiesięcznej pracy licznego i wysoko wykwalifikowanego personelu wyposażonego we wszystkie dotychczas znane przybory rachunkowe, z ich pomocą wykonuje się niemal natychmiastowo. Trudno jest dzisiaj, zaledwie w kilka lat po uruchomieniu pierwszych większych modeli elektronowych aparatów matematycznych, jeszcze bardzo dalekich od doskonałości, sądzić o dalszym ich wpływie na rozwój cywilizacji a zwłaszcza produkcji materialnej. Jedno jest tylko pewne, że zwiększą one wybitnie zasięg poznania przyrody i kierowania nią.

Zastosowanie analizy matematycznej do większości zagadnień praktycznych wymaga tylu rachunków, że przewyciężenie ich było do niedawna prawie niemożliwe. Tak np. wielokrotnie udawało się ułożyć równanie różniczkowe rządzące badanym przebiegiem, lecz dyskusja tego równania lub znalezienie konkretnych rozwiązań było zadaniem tak skomplikowanym i trudnym, że nie tylko praktycy, lecz również teoretycy-specjaliści stawali przed nim bezradni. Powyższy stan rzeczy powo-

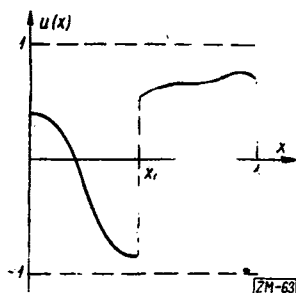
* Niniejszy artykuł stanowi rozszerzenie referatów, które autor wygłosił na zjeździe poświęconym zagadnieniom pomiarów elektrycznych zorganizowanym przez Politechnikę Wrocławską w dniach 12-15. XII. 52 r., w Polskim Towarzystwie Matematycznym w Warszawie oraz na Seminarium Pracowni Elektrotechniki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk w Warszawie.

dował często niechęć praktyków do teorii, bezużytecznej ich zdaniem w przypadkach bardziej konkretnych, jak również oderwanie się wielu teoretyków od zagadnień bardziej praktycznych, od których czuli się oddzieleni nieprzebytym murem rachunków. Dopiero stworzenie nowej gałęzi techniki, jaką jest budowa elektronowych aparatów matematycznych, zmieniło w sposób zasadniczy problemat zastosowań matematyki do praktyki.

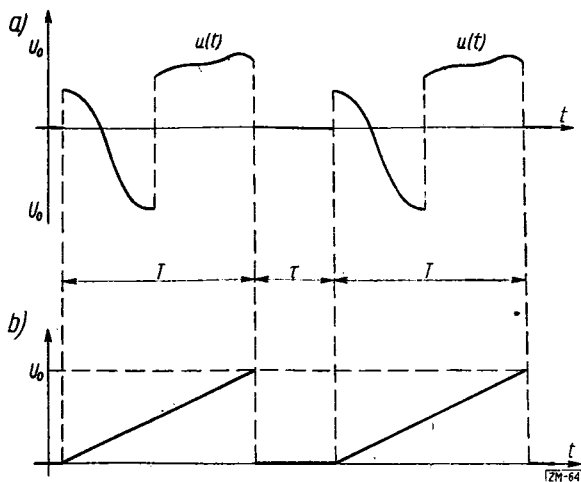
Podajemy opis elektronowego aparatu matematycznego budowanego obecnie przez Instytut Matematyczny PAN w Warszawie ze specjalnej subwencji Polskiej Akademii Nauk. Zaprojektował go autor niniejszego artykułu członek Grupy Aparatów Matematycznych Instytutu. Aparat ten, ze względu na zastosowanie, nazwany został ARR (Analizator Równań Różniczkowych)¹).

2. Realizacja funkcji

Za pomocą analizatora ARR możemy badać funkcje określone w przedziale $0 \leq x \leq 1$, ograniczone warunkiem $|u(x)| \leq 1$ oraz ciągle z wyłączeniem skończonej liczby (w praktyce co najwyżej kilku) punktów w których mogą mieć skok. Przykład jednej z takich funkcji przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Przykład funkcji $u(x)$, którą możemy badać za pomocą ARR. W punkcie x_0 funkcja ma „skok”



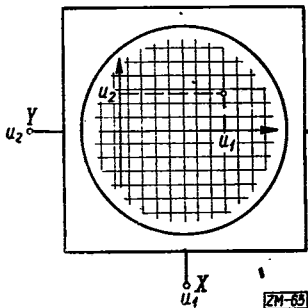
Rys. 2. a) Przebieg napięcia odniesionego do funkcji przedstawionej na rys. 1; b) Przebieg napięcia „podstawy czasu” tj. funkcji $u(t)=t$ (w przedziałach T)

Każdej z określonych powyżej funkcji przyporządkowujemy napięcie elektryczne, którego przebieg w czasie t , mierzony zawsze w stosunku do jednego i tego samego potencjału, przedstawiliśmy na rysunku 2a,

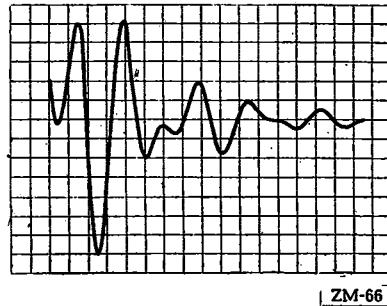
¹) Podczas drukowania niniejszego zeszytu budowę ARR zakończono i aparat funkcjonuje od czerwca 1954 r. *Redakcja.*

Jest to więc napięcie zmieniające się periodycznie co okres $T + \tau$, przy czym w przedziałach T przebiega według funkcji $u(t)$ (zakładając $T=1$ oraz $u_0=1$), natomiast w przedziałach τ przyjmuje wartość równą zero. Przedziały T służą do właściwego rozwiązywania równań, w przedziałach τ sprawdza się do zera wszystkie napięcia w celu przygotowania następnego „przedziału rozwiązującego“.

Napięcia przyporządkowane funkcji możemy w analizatorze ARR obserwować na oscyloskopie. Oscyloskop jest to urządzenie elektronowe, mające ekran o średnicy np. 14 cm, na którym jest widoczna plamka świetlna (rys. 3). Plamkę tę wywołuje wąski strumień elektronów, padający na tylną powierzchnię ekranu, pokrytą masą fluoryzującą. Położenie plamki na ekranie wyznaczają wielkości napięć u_1 i u_2 przyłożonych do zacisków wejściowych X i Y oscyloskopu. Napięcia te powodują powstanie pola elektrostatycznego, przez które przebiega strumień elektronów, wskutek czego współrzędna pozioma plamki, przy odpowiednio ustawionym i wyskalowanym układzie współrzędnych ekranu, przybiera wartość równą u_1 , współrzędna pionowa zaś — wartość u_2 .



Rys. 3. Schematyczny rysunek ekranu oscyloskopu.



Rys. 4. Zdjęcie fotograficzne obrazu oscylograficznego pewnej funkcji $u(t)$

Jeżeli napięcia u_1 i u_2 są zmienne w czasie, plamka na ekranie zakresła krzywą opisaną równaniami $x=u_1(t)$, $y=u_2(t)$. Jeżeli w szczególności do zacisku Y przyłożymy napięcie reprezentujące pewną funkcję $y=u(t)$, do zacisku X zaś napięcie o przebiegu przedstawionym na rysunku 2b, reprezentujące funkcję $x=u_1(t)=t$, wówczas plamka na oscyloskopie w każdym kolejnym przedziale T będzie kreśliła obraz funkcji $y=u(x)$. Ponieważ okres $T + \tau$ wynosi w ARR 40 msek., obraz ten powtarza się 25 razy na sekundę, dzięki czemu, podobnie jak na filmie, otrzymujemy złudzenie nieruchomego i nie migającego rysunku na ekranie. Na rysunku 4 przedstawiono zdjęcie fotograficzne obrazu oscylograficznego pewnej funkcji $u(t)$.

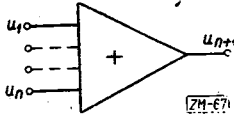
3. Układy rachujące

Napięcia odniesione do funkcji, są wytwarzane i przetwarzane w układach rachujących, które realizują odpowiednie operacje matematyczne²⁾. Najważniejsze z nich opisujemy poniżej. Celem tych opisów jest zapoznanie czytelnika jedynie z uproszczoną zasadą działania układów rachujących i z tego powodu pominieliśmy w nich wszelkie szczegóły techniczne. Ponadto dalsze rozważania ograniczamy jedynie do zależności obowiązujących w przedziałach czasowych T .

3.1. Układy sumujące. Układ sumujący jest to urządzenie o n zaciskach wejściowych i jednym wyjściowym oraz tej własności, że gdy do zacisków wejściowych przyłożymy odpowiednio napięcia $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$, wówczas na zacisku wyjściowym pojawi się napięcie

$$(1) \quad u_{n+1}(t) = a_1 u_1(t) + \dots + a_n u_n(t),$$

gdzie a_1, \dots, a_n są to odpowiednio przez nas dobrane wielkości stałe, niezależne od t .

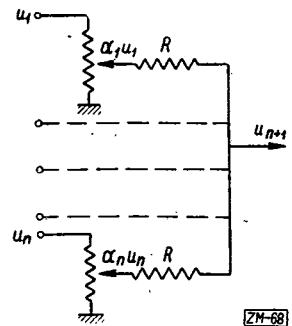


Rys. 5. Symbol graficzny układu sumującego

Symbol graficzny układu sumującego przedstawia rysunek 5. Symbol ten można uważać również za zapis zależności (1) w „języku analizatora”.

Zasadę działania układu sumującego objaśnia schemat na rysunku 6. Napięcia u_1, \dots, u_n wchodzi na potencjometry (tj. regulowane dzielniki napięć), które za pomocą gałek, zaopatrzonych we właściwe skale, ustawiamy w ten sposób, żeby na odczepach potencjometrów, zaznaczonych na rysunku 5 strzałkami, otrzymać napięcia odpowiednio równe $a_1 u_1, \dots, a_n u_n$. Jeżeli oporność R jest dużo większa od oporności potencjometrów, współczynniki a_k są wzajemnie niemal niezależne, tj. zmiana jednego z nich nie wpływa na wielkość pozostałych. Napięcie u_{n+1} jest średnią arytmetyczną napięć $a_k u_k$, a więc

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k u_k, \quad \text{gdzie} \quad a_k = \frac{1}{n} a_k.$$



Rys. 6. Schemat objaśniający zasadę działania układu sumującego

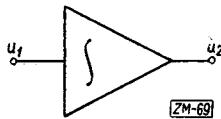
²⁾ Rachowanie przez realizację operacji lub równań matematycznych należy odróżnić od rachowania przez analogię, które polega na tym, że dla zbadania przebiegów w danym układzie fizycznym budujemy inny układ fizyczny, rządony tymi samymi zależnościami matematycznymi co dany, a którego przebiegi dają się stosunkowo łatwo obserwować lub mierzyć.

Gdybyśmy układ sumujący pozostawili w postaci tak uproszczonej, jak to przedstawia rysunek 6, miałby on wiele zasadniczych wad, powodujących jego praktyczną nieużyteczność. Wartości współczynników a_k musiałyby zawierać się w granicach od 0 do $1/n$, a więc w szczególności nie rozporządzalibyśmy współczynnikami ujemnymi. Gdybyśmy ponadto do wyjścia takiego układu przyłączyli wejście innego układu rachującego, np. podobnego układu sumującego, wpłynęłoby to na wielkość wszystkich współczynników. Usunięcie tych wad jest możliwe dopiero przy zastosowaniu lamp elektronowych, dzięki którym współczynniki a_k możemy dobierać w szerokich granicach, np. $-10 \leq a_k \leq 10$, wartości ich zaś są niezależne od tego, co przyłączamy do wyjścia układu sumującego.

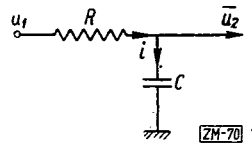
3.2. Układy całkujące. Układ całkujący jest to urządzenie mające dwa zaciski, wejściowy i wyjściowy, oraz tę własność, że gdy do zacisku wejściowego przyłożymy napięcie $u_1(t)$, wówczas na zacisku wyjściowym pojawi się napięcie

$$(2) \quad u_2(t) = K \int_0^t u_1(\tau) d\tau + u_0,$$

gdzie K i u_0 są to odpowiednio przez nas dobrane wielkości stałe niezależne od t . Wielkość u_0 przedstawia oczywiście wartość $u_2(t)$ w chwili $t=0$, tzn. $u_0 = u_2(0)$.



Rys. 7. Symbol graficzny układu całkującego



Rys. 8. Schemat objaśniający zasadę działania układu całkującego

Symbol graficzny układu całkującego przedstawia rysunek 7. Symbol ten można uważać również za wyraz zależności (2) w „języku analizatora”.

Zasadę działania układu całkującego przedstawia schemat na rysunku 8.

Wartości elementów R i C dobieramy w ten sposób, żeby napięcie $|\bar{u}_2(t)|$ było zawsze dużo mniejsze od napięcia $|u_1(t)|$; prąd $i(t)$ równa się wtedy w przybliżeniu u_1/R :

$$i(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R} \approx \frac{u_1(t)}{R}.$$

Uwzględniając równanie kondensatora

$$i(t) = C \frac{d}{dt} \bar{u}_2(t)$$

oraz zakładając, że w chwili $t=0$ kondensator C jest rozładowany, a więc $u_2(0)=0$, otrzymujemy

$$\bar{u}_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \approx \frac{1}{RC} \int_0^t u_1(\tau) d\tau.$$

Dodając do $\bar{u}_2(t)$ wielkość stałą $u_2(0)$ (tj. napięcie przyjmujące wartość zero w okresach τ oraz $u_2(0)$ w okresach T) otrzymujemy na wyjściu układu całkującego napięcie

$$u_2(t) = \bar{u}_2(t) + u_2(0) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t u_1(\tau) d\tau + u_2(0).$$

Wielkość stałą dodajemy za pomocą układu podobnego do układu sumującego. Stałą K w równaniu (2) dobieramy przez odpowiednią regulację R .

Ponieważ napięcie $|\bar{u}_2(t)|$ powinno być bardzo małe w porównaniu z $|\bar{u}_1(t)|$, gdyż w przeciwnym przypadku wyniki nie byłyby dostatecznie dokładne, konieczne więc jest następnie odpowiednie wzmocnienie napięcia $u_2(t)$ za pomocą wzmacniaczy elektronowych.

Przestawiając R z C na rysunku 8 uzyskujemy, jak łatwo sprawdzić, układ różniczkujący. Jednak z powodów, w które bliżej wnikać nie będziemy, w analizatorach równań różniczkowych na ogół nie stosuje się układów różniczkujących i używa się niemal wyłącznie układów całkujących.

3.3. Generatory funkcji. *Generator funkcji* jest to urządzenie mające zacisk wejściowy i zacisk wyjściowy oraz tę własność, że gdy do zacisku wejściowego przyłożymy napięcie $u_1(t)$, wówczas na zacisku wyjściowym uzyskamy napięcie

$$u_2(t) = f[u_1(t)],$$

gdzie $f(x)$ jest dowolnie z góry daną przez nas funkcją, określoną w przedziale $-1 \leq x \leq 1$, ograniczoną w tym przedziale warunkiem $|f(x)| \leq 1$ oraz ciągłą z wyłączeniem skończonej liczby (w praktyce co najwyżej kilku) punktów, w których może mieć skok. Symbol graficzny generatora funkcji przedstawia rysunek 9.

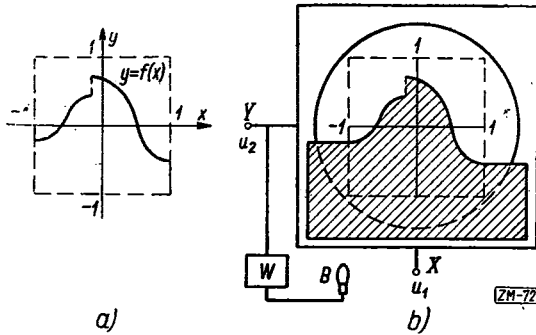
Zasadę działania generatora funkcji przedstawia rysunek 10. Przy-
puszczamy, że chcemy uzyskać za pomocą generatora funkcji relację

$$u_2(t) = f[u_1(t)],$$

gdzie funkcja $y=f(x)$ jest wyrażona wykresem przedstawionym na rysunku 10a. W tym celu sporządzamy ciemną przesłonę o zarysie przebiegającym według funkcji $y=f(x)$ i umieszczamy ją na tle ekranu oscyloskopu w sposób pokazany na rysunku 10b. Na wprost ekranu znajduje się komórka fotoelektryczna B , którą na rysunku 10b, dla przejrzystości narysowano nieco poniżej oscyloskopu. Na komórkę tę pada światło z plamki świetlnej na ekranie, jeśli tylko nie jest ona zasłonięta przez przesłonę.

Światło to wzbudza w komórce napięcie elektryczne, które zostaje wzmożone we wzmacniaczu W i przyłożone do zacisku Y oscyloskopu. Wzmocnienie to jest takie, że gdy światło pada na komórkę, tj. plamka

światlna nie jest zasłonięta przez przesłonę, napięcie na zacisku zmniejsza się i odchyła plamkę świetlną w kierunku przesłony, gdy zaś plamka świetlna jest za przesłoną, napięcie na zacisku Y zwiększa się, odchyłając plamkę do góry w kierunku niezastoniętej części ekranu. W rezultacie punkt świetlny umieszcza się na brzegu przesłony, będąc przez nią częściowo zasłoniętym. Ponieważ współrzędna pozioma plamki jest okreś-

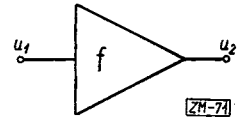


Rys. 10. Zasada działania generatora funkcji: a) Wykres funkcji $y=f(x)$; b) Generator, składający się z oscyloskopu, przesłony o zarysie $y=f(x)$, fotokomórki B oraz wzmacniacza W

lona przez wielkość napięcia u_1 przyłożonego do zacisku X , napięcie u_2 określające współrzędną pionową plamki musi być równe $f(u_1)$, gdyż, jak podaliśmy to poprzednio, plamka utrzymuje się zawsze na brzegu przesłony.

W szczególnym przypadku, gdy $u_1(t)=t$, otrzymujemy $u_2(t)=f(t)$, a więc napięcie wyjściowe generatora przebiega według funkcji danej przez nas z góry przez odpowiednie ukształtowanie brzegu przesłony.

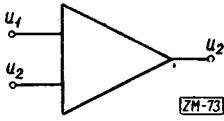
3.4. Układy mnożące i dzielące. Układ mnożący jest to urządzenie o dwóch zaciskach wejściowych i jednym wyjściowym oraz o tej własności, że gdy do zacisków wejściowych przyłożymy napięcia $u_1(t)$ oraz $u_3(t)$, wówczas na zacisku wyjściowym pojawi się napięcie $u_2(t)=u_1(t)u_3(t)$.



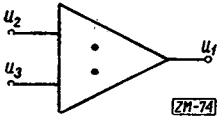
Rys. 9. Symbol graficzny generatora funkcji

Symbol graficzny układu mnożącego przedstawia rysunek 11.

Układ dzielący jest to urządzenie o dwóch zaciskach wejściowych i jednym wyjściowym oraz o tej własności, że gdy do zacisków wejściowych przyłożymy odpowiednio napięcia $u_2(t)$ oraz $u_3(t)$, przy czym $u_3(t)$ jest stale dodatnie lub stale ujemne i $|u_2(t)| \leq |u_3(t)|$, wówczas na zacisku wyjściowym pojawi się napięcie $u_1(t) = u_2(t)/u_3(t)$.



Rys. 11. Symbol graficzny układu mnożącego



Rys. 12. Symbol graficzny układu dzielącego

Symbol graficzny układu dzielącego przedstawia rysunek 12.

Ponieważ zasada działania układu mnożącego jest dość skomplikowana, więc opis jej pomijamy. Zaznaczamy tylko, że posługujemy się tutaj techniką napięć o wysokich częstotliwościach (rzędu 10^6 Hz), które modulujemy napięciami przedstawiającymi czynniki. Takie napięcia modulowane „pomnożyć” jest stosunkowo łatwo; otrzymany w ten sposób „iloczyn” prostujemy za pomocą detektora, podobnie jak w odbiorniku radiowym.

Układ dzielący jest zespołem składającym się z układu mnożącego i specjalnego układu sumującego, połączonych w sposób przedstawiony na rysunku 13. Do zespołu tego przykładamy napięcie u_1 oraz u_2 .

Napięcie na wejściu układu sumującego oznaczamy przez u_3 , na wyjściu zaś układu mnożącego przez u_4 . Układ sumujący dodaje napięcia u_1 oraz u_4 i sumę tę mnoży przez liczbę A , wobec czego

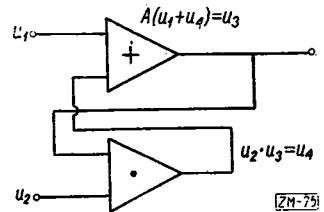
$$u_3 = A(u_1 + u_4).$$

Układ mnożący tworzy z napięć u_2 i u_3 iloczyn

$$u_4 = u_2 u_3.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$u_3 = -\frac{u_1}{u_2 - 1/A}.$$



Rys. 13. Zasada działania układu dzielącego.

Wielkość A dajemy taką dużą, żeby u_3 z dostateczną dokładnością równe było $-u_1/u_2$.

Dla poprawnego działania układu dzielącego muszą być spełnione dwa warunki:

$$A u_3 < 0, \quad \left| \frac{u_1}{u_2 - 1/A} \right| \leq 1.$$

Pierwszy z tych warunków jest niezbędny dla zachowania stateczności układu (jego uzasadnienie wybiega daleko poza ramy niniejszego artykułu). Drugi warunek oznacza po prostu, że napięcie u_3 nie może wyjść poza dopuszczalne granice założone w rozdziale 2.

Układ mnożący można by też uzyskać opierając się na tożsamości

$$u_1 u_2 = \frac{1}{4} [(u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2].$$

Dla uzyskania iloczynu u_1 przez u_2 należy więc najpierw utworzyć ich sumę oraz różnicę za pomocą układów sumujących, oba te wyniki podnieść do kwadratu na generatorach funkcyjnych, a w końcu kwadraty te odjąć od siebie i podzielić przez cztery. Jak widać, powyższy sposób realizacji mnożenia jest, technicznie biorąc, dość złożony i dlatego też nie bywa na ogół stosowany.

Dla uzyskania ilorazu u_1/u_2 można również wykonać najpierw transformację $u_3 = 1/u_2$ na generatorze funkcyjnym, a następnie pomnożyć u_1 przez u_3 na układzie mnożącym.

4. Przykłady zastosowania do rozwiązywania równań różniczkowych

4.1. Równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych.

Podamy teraz kilka przykładów objaśniających sposób rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą opisanych poprzednio układów rachujących analizatora.

Weźmy pod uwagę równanie funkcji niewiadomej $u(t)$

$$(3) \quad u'' + au' + bu = f(t)$$

przy danych jej wartościach początkowych $u'(0)$ i $u(0)$.

Dla rozwiązania tego równania połączmy układ sumujący, układy całkujące i generator funkcji według schematu przedstawionego na rysunku 14.

Niechaj napięcie wejściowe pierwszego z układów całkujących będzie $u''(t)$; wówczas napięcie wyjściowe tego układu jest równe

$$\int_0^t u''(\tau) d\tau + u'(0) = u'(t),$$

gdzie wartość $u'(0)$ ustalamy przez odpowiedni dobór stałej całkowania rozpatrywanego układu całkującego. Napięcie wyjściowe drugiego układu całkującego równa się

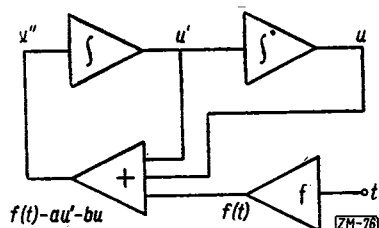
$$\int_0^t u'(\tau) d\tau + u(0) = u(t),$$

gdzie znów $u(0)$ ustalamy przez odpowiedni dobór stałej całkowania.

Generator funkcji dostarcza nam napięcia o danym przebiegu $f(t)$. Układ sumujący tworzy z napięć $u'(t)$, $u(t)$ oraz $f(t)$ napięcie

$$f(t) - au'(t) - bu(t),$$

które przykładamy do wejścia pierwszego układu całkującego. Jak wynika z rysunku 14, napięcie to musi być jednocześnie równe $u''(t)$, a tym samym jest spełnione równanie (3).



Rys. 14. Schemat połączeń układów rachujących analizatora w celu rozwiązania równania (3)

Napięcie $u(t)$, przedstawiające rozwiązanie tego równania dla danych wartości początkowych, możemy zaobserwować na oscyloskopie. Podobnie możemy obserwować $u'(t)$ i $u''(t)$.

W poprzednio przedstawionym układzie rozwiązującym zmiany współczynników równania i wartości początkowych można uzyskać bardzo łatwo przez regulację odpowiednich potencjometrów w ukła-

dzie sumującym i układach całkujących. Ponieważ, jak to wyjaśnialiśmy w rozdziale 2, analizator powtarza całe rozwiązanie około 35 razy na sekundę, wpływ zmian w równaniu na przebieg rozwiązania możemy obserwować, praktycznie biorąc, jednocześnie z wprowadzeniem tych zmian. W ten sposób w ciągu kilku minut możemy zanalizować całe rodziny krzywych całkujących dane równanie i np. sfotografować ciekawsze rozwiązania na wspólnej kliszy. Jak widać, analizator daje możliwość „syntetycznego” rozwiązywania równań.

Rysunek 14 wyraża równanie (3) w języku analizatora. Wyraz ten ma tę cenną cechę, że daje jednocześnie schemat połączeń układów liczących analizatora potrzebny do rozwiązywania tego równania. Tak więc sztuka robienia powyższych połączeń jest równoważna z umiejętnością wyrażenia badanego równania w języku analizatora.

4.2. Równanie różniczkowe nieliniowe. Jako drugi przykład rozpatrzmy następujące równanie różniczkowe nieliniowe, występujące często w zagadnieniach drgań elektrycznych lub mechanicznych:

$$(4) \quad u'' + f(u)u' + g(u) = 0.$$

Schemat połączeń układów rachujących dający rozwiązanie tego równania przedstawiono na rysunku 15. Ponieważ równanie jest drugiego rzędu, potrzebne są dwa układy całkujące, które łączymy szeregowo. Oznaczając funkcję określającą napięcie wejściowe pierwszego z tych układów przez $u''(t)$, otrzymujemy kolejno funkcje $u'(t)$ oraz $u(t)$, których wartości początkowe dobieramy wedle danych warunków.

Za pomocą generatorów funkcji, oznaczonych na rysunku literami f oraz g , otrzymujemy wyrażenia $f[u(t)]$ i $g[u(t)]$. Układ mnożący tworzy z funkcji $f[u(t)]$ i $u'(t)$ iloczyn $f[u(t)]u'(t)$. Wreszcie układ sumujący daje na wyjściu wyrażenie

$$-f[u(t)]u'(t) - g[u(t)],$$

które, na zasadzie schematu rozwiązującego, musi być jednocześnie równe $u''(t)$. W ten sposób funkcja $u(t)$ spełnia równanie (5).

W podobny sposób układamy schematy rozwiązujące dla innych równań zarówno liniowych jak nieliniowych. Jest to możliwe zawsze wtedy, gdy badane równanie jest rozwikłane względem najwyższej pochodnej oraz daje się napisać za pomocą operacji, jakimi rozporządzamy w analizatorze. Za dalsze przykłady mogą służyć np. równania

$$y' + t^2 \sin y = 0, \quad y''' + f(y'')g(t) + y = 0.$$

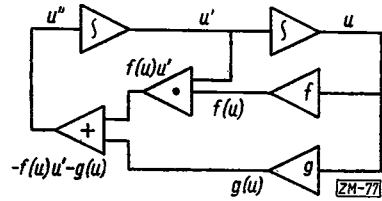
4.3. Przykład analizy sieci elektrycznej. Dla zbadania za pomocą analizatora własności układów fizycznych często jest zbędne nawet wypisywanie równań różniczkowych rządzących tymi układami. Jako przykład bezpośredniego złożenia elementów rachujących bez wypisywania równań różniczkowych podamy analizę sieci elektrycznej przedstawionej na rysunku 16.

Za funkcje niewiadome przyjmujemy przebiegi natężeń prądów w kondensatorach i napięć w cewkach, tj. w naszym przykładzie $i_1(t)$, $i_2(t)$ oraz $u_3(t)$. Napięcia na kondensatorach i natężenia prądów w cewkach otrzymujemy przez całkowanie funkcji niewiadomych z odpowiednimi współczynnikami i stałymi początkowymi; w naszym przypadku

$$(5) \quad u_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(\tau) d\tau + u_1(0), \quad u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_2(0),$$

$$i_3(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_3(\tau) d\tau + i_3(0).$$

Zgodnie z tym wielkości i_1 , i_2 , u_3 powinny znaleźć się na wejściach układów całkujących, natomiast u_1 , u_2 , i_3 na wyjściach, tak jak pokazano na rysunku 17.

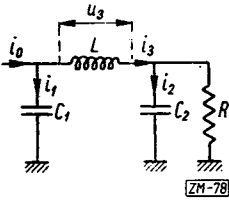


Rys. 15. Schemat połączeń układów rachujących, potrzebny do rozwiązania równania (4)

Nateżenia prądów i napięcia badanej sieci związane są następującymi prostymi zależnościami:

$$i_1 = i_0 = i_3, \quad i_2 = i_3 - \frac{u_2}{R}, \quad u_3 = u_1 - u_2.$$

Równania powyższe wraz z (5) wyznaczają jednocześnie zachowanie się sieci. Realizację tych równań przedstawia rysunek 17. Zasada działania całości układu jest widoczna wprost z tego rysunku.



Rys. 16. Badana sieć elektryczna

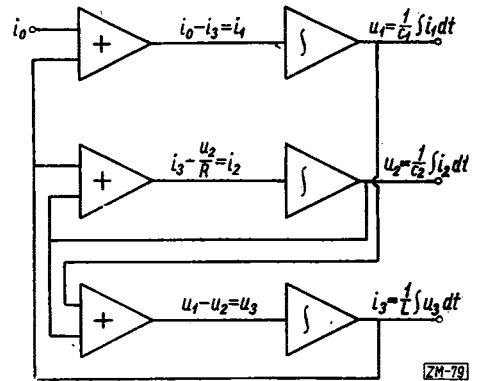
Złożwszy układy rachujące analizatora jak na rysunku 17, można już np. łatwo zbadać, jaki będzie przebieg napięcia $u_2(t)$ po przyłożeniu do sieci określonego prądu $i_0(t)$, bez względu na to, czy będzie to stan ustalony, czy nie. Dość prosto można również odpowiedzieć na trudniejsze pytanie: jakie powinny być wartości C_1 , C_2 oraz L , aby napięcie $u_2(t)$ przebiegało w określony sposób po przyłożeniu $i_0(t)$?

Wystarczy w tym celu zmieniać przy całkowaniu współczynniki $1/C_1$, $1/C_2$ oraz $1/a$ i obserwować na oscyloskopie wywołane tym zmiany napięcia $u_2(t)$. Ponieważ zmiana współczynników jest bardzo łatwa, gdyż polega na regulacji potencjometrów, można w dość krótkim czasie zbadać zachowanie się sieci w szerokich granicach zmiany parametrów.

W podobny sposób możemy badać również bardziej skomplikowane sieci elektryczne, zarówno liniowe jak nieliniowe. Możemy np. przyjąć, że cewka L na rysunku 16 ma rdzeń żelazny i że indukccyjność jej zależy od wielkości natężenia prądu przez nią przepływającego. W tym przypadku schemat rozwiązujący przedstawiony na rysunku 17 należałoby zmodyfikować przez odpowiednie dołączenie do niego układu mnożącego i generatora funkcji.

5. Inne zastosowania analizatora

Prócz równań różniczkowych możemy na analizatorze przeprowadzać i inne obliczenia. Podajemy tutaj kilka takich przykładów.



Rys. 17. Schemat połączeń układów rachujących, służący do zanalizowania sieci elektrycznej, przedstawionej na rys. 16

5.1. Układy algebraicznych równań liniowych. Przypuśćmy, że chcemy rozwiązać układ algebraicznych równań liniowych, o różnym od zera wyznaczniku współczynników przy niewiadomych:

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + b_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

W tym celu utwórzmy układ równań różniczkowych funkcji niewiadomych $X_k(t)$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n a_{jk} X_k(t) + b_j + \mu X_j'(t) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

gdzie μ jest pewną stałą większą od zera. Jak widać z tych równań, jeżeli dla wszystkich j jednocześnie

$$(8) \quad X_j'(t) \rightarrow 0 \quad \text{dla } t \rightarrow \infty,$$

to tym samym

$$X_j(t) \rightarrow x_j \quad \text{dla } t \rightarrow \infty,$$

gdzie x_j są pierwiastkami równań (6).

Dla spełnienia warunków (8) potrzeba i wystarcza, jak wiadomo, żeby macierz współczynników a_{jk} była definitywnie dodatnia, tj. żeby wszystkie pierwiastki λ równania charakterystycznego tej macierzy

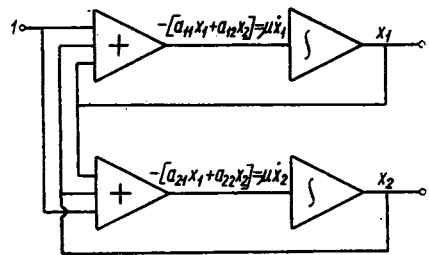
$$|a_{jk} - \lambda \delta_{jk}| = 0 \quad (\delta_{jk} = 0 \text{ dla } j \neq k \text{ oraz } \delta_{jk} = 1 \text{ dla } j = k)$$

miały część rzeczywistą większą od zera.

Mając więc do rozwiązania układ równań algebraicznych liniowych, najpierw przez odpowiednie ustawienie równań, numerację niewiadomych i ewentualnie inne operacje przekształcamy macierz współczynników przy niewiadomych na macierz definitywnie dodatnią. Następnie wykonujemy połączenia układów rachujących analizatora potrzebne do rozwiązania odpowiadającego równania różniczkowego (7).

Połączenia takie w przypadku $n=2$ przedstawia rysunek 18.

Jeżeli wartość μ jest dostatecznie mała, to funkcje $X_k(t)$ po czasie $t=T$ osiągną wartości zbliżone do pierwiastków układu równań. Jeśli w następnym kroku za wartości początkowe funkcji $X_k(t)$ weźmiemy wartości znalezione na pierwiastki, to funkcje te nie powinny prawie różnić się od stałych.



Rys. 18. Schemat połączeń dla rozwiązania układu równań (7) w przypadku $n=2$

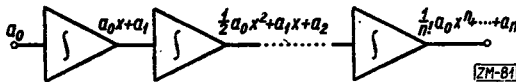
Przedstawione tutaj zastosowanie analizatora ma tę zasadniczą niedogodność, że przekształcenie macierzy współczynników na macierz definitywnie dodatnią bywa często zadaniem bardzo skomplikowanym i wtedy metoda się nie opłaca.

5.2. Analiza wielomianów algebraicznych. Aby zbadać przebieg wielomianu

$$(9) \quad \frac{1}{n!} a_0 x^n + \frac{1}{(n-1)!} a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

łączymy w szereg układy całkujące w sposób przedstawiony na rysunku 19. Do wejścia pierwszego układu przykładamy wielkość stałą równą a_0 . Stałą całkowania tego układu dobieramy równą a_1 , przez co jego napięcie wyjściowe wynosi $a_0 x + a_1$. Stałą całkowania drugiego układu dajemy równą a_2 , wobec czego jego napięcie wyjściowe wynosi $a_0 x^2/2 + a_1 x + a_2$. Postępując dalej podobnie, na wyjściu ostatniego układu całkującego otrzymujemy wielomian (9).

Współczynniki wielomianu dobieramy przez odpowiednią regulację potencjometrów określających stałe całkowania. Możemy rozszerzyć zakres



Rys. 19. Połączenie układów całkujących w celu uzyskania wielomianu (9)

współczynników wielomianu dając przy całkowaniu współczynniki różne od jedności.

Przez załączenie wyjścia ostatniego z układów całkujących do oscyloskopu otrzymujemy na nim obraz wielomianu (9), co umożliwi np. ustalenie przybliżonego położenia jego pierwiastków.

5.3. Analiza harmoniczna. Dla znalezienia funkcji harmonicznej okresowej $f(t)$ o okresie podstawowym $T=1$ posługujemy się wzorami Eulera-Fourier'a:

$$a_n = 2 \int_0^1 f(t) \cos 2\pi n t dt, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin 2\pi n t dt.$$

Napięcie o przebiegu $f(t)$ wytwarzamy za pomocą generatora funkcyjnego, napięcia o przebiegu $\cos 2\pi n t$ lub $\sin 2\pi n t$ możemy otrzymać np. jako rozwiązanie równania różniczkowego

$$u'' + 4\pi^2 n^2 u = 0$$

z odpowiednimi warunkami początkowymi.

Przez elektronowe pomnożenie $f(t)$ przez $2 \cos 2\pi n t$ lub $2 \sin 2\pi n t$ oraz scałkowanie tego iloczynu w granicach od 0 do T , otrzymujemy szukane współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f(t)$.

6. Dokładność wyników i zakres działania

Dokładność uzyskiwanych wyników zależy przede wszystkim od precyzji działania układów rachujących. W analizatorze ARR niedokładności działania układów sumujących i całkujących nie są większe niż 0,5% największego napięcia wyjściowego, natomiast w generatorach funkcji i układach mnożących niedokładności w przypadkach niekorzystnych mogą dochodzić do 2%. Dokładność uzyskiwanych rozwiązań zależy od ilości i rodzaju układów rachujących wchodzących w schemat rozwiązujący danego równania, jak również od tego, w jakim stopniu równanie to jest czułe na wszelkiego rodzaju nieścisłości. Ogólnie biorąc, dokładność ARR'a wystarcza dla celów technicznych, gdy obiektem badanym jest układ fizyczny, który nie jest zbyt wrażliwy na zmiany parametrów.

W analizatorze ARR przewiduje się 8 układów sumujących po 10 składników, 8 całkujących, 6 układów mnożących, 6 generatorów funkcji i 4 generatory funkcji specjalnych (liniowych i sinusoidalnych). Cały analizator będzie miał około $600 \times 200 \times 70$ cm i będzie zawierał około 400 lamp elektronowych. Jest to stosunkowo niewiele, jeżeli zważy się duże możliwości analizatora. Wydaje się, że przyjęta ilość układów rachujących wystarczy do zastosowań praktycznych, w przeciwnym zaś przypadku analizator może wymagać powiększenia.

7. Zakończenie

W poprzednich rozdziałach wykazano, że działanie analizatora ARR opiera się na stosunkowo prostych zasadach. Obsługa ARR'a jest nieskomplikowana, szybkość zaś uzyskiwania rozwiązań bardzo duża, dzięki czemu aparat ten może oddać duże usługi np. przy analizie zjawisk fizycznych lub projektowaniu urządzeń technicznych. Ponieważ ARR jest wykonany niemal wyłącznie z elementów znormalizowanych, koszt jego budowy jest stosunkowo niewielki. Dzięki temu aparat tego typu może być dostępny dla szerszego kręgu interesantów.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 16. 3. 1953 r.

Л. ЛУКАШЕВИЧ (Варшава)

*ЭЛЕКТРОННЫЙ АНАЛИЗАТОР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
„ARR” И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ*

РЕЗЮМЕ

Статья приводит в сокращенной форме важнейшие принципы действия и сферу применений анализатора дифференциальных уравнений „ARR”, сооруженного Группой Математических Аппаратов Мат. Института Польской Академии Наук в Варшаве. Анализатор построен на принципе т. н. „электрической реализации” заключающейся в том, что для данного уравнения составляем электрическую систему, поведение которой подчиняется этому уравнению, а затем поведение это измеряем. Благодаря описанному анализатору можно очень быстро решать обыкновенные линейные дифференциальные уравнения и некоторые нелинейные с погрешностью в общем случае не превышающей нескольких процентов.

L. ŁUKASZEWICZ (Warszawa)

*ELECTRONIC ANALYSER OF DIFFERENTIAL EQUATIONS “ARR” AND
SOME OF ITS APPLICATIONS*

SUMMARY

The author gives a brief account of the operating principles and range of applications of the differential equations analyser “ARR”, which is now being constructed by the Division of Mathematical Instruments of the Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences in Warsaw. The analyser is built on the principle of the so-called „electrical realisation”, which consists in forming for a given equation an electric system whose behaviour is governed by that equation, and then measuring characteristics of that system. The analyser described here makes possible a quick solution of ordinary linear differential equations and some non-linear ones with an error not exceeding, on the whole, a few hundredths.
