ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVIII, 2 (1984), p. 177-186

А. А. ШАХБАЗОВ (Москва)

ОБСЛУЖИВАНИЕ С ПОТЕРЯМИ В СЛУЧАЕ ПРИБОРОВ РАЗНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

0. Введение. Известная в теории массового обслуживания формула Эрланга-Севастьянова

(1) $$p_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

для стационарной вероятности занятости ровно k приборов в системе с потерями $M/G/n/0$, при интенсивности пуассоновского процесса поступления λ и среднем времени обслуживания T, получила развитие в работах многих авторов. Ее справедливость для абсолютно-непрерывной функции распределения (ф.р.) времени обслуживания G доказана в [1], а для произвольной ф.р. G с конечным математическим ожиданием — в [7]. Этот результат в [6] и [12] перенесен на двойственную систему обслуживания $G/M/n/0$. Ряд других обобщений развит в работах [4], [5], [10]. В данной работе формула (1) обобщается в двух направлениях: интенсивность процесса поступления зависит от состояния системы и обслуживающие приборы имеют разные производительности. Кроме того, метод решения задачи, развитый в п. 1 для равновероятного занятия свободных приборов, применен для решения задачи минимизации вероятности потери в системе $M/\vec{G}/2/0$ с двумя разнотипными приборами и π-дисциплиной обслуживания.

Теперь опишем исследуемую модель обслуживания: имеется система обслуживания, состоящая из n приборов разной производительности. Время обслуживания любого требования i-ым прибором — случайная величина с ф.р. $G_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Если $x(t) = k$, где $x(t)$ — число занятых приборов в момент t, то вероятность того, что в интервале $(t, t+h)$ поступит одно требование, равна $\lambda_k h + o(h)$ и не зависит от траектории процесса $x(t)$ на $(0, t)$, а вероятность поступления на $(t, t+h)$ более одного требования есть $o(h)$, $h \to 0$. Если в момент поступления имеется несколько свободных приборов, наудачу выбирается любой из них. Требование, поступившее в систему в момент, когда все приборы заняты, теряется. Описанную систему обозначим символом $M/\vec{G}/n/0$, где стрелка $\to$ означает, что приборы имеют разные производительности.

1. Предельная теорема. Рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\xi(t) = \{x(t);\ \xi_{i_1}(t), \ldots, \xi_{i_{x(t)}}(t)\}$, где $x(t)$ — число занятых приборов в момент t, $\xi_j(t)$ — время дообслуживания требования, обслуживаемого в момент t на приборе с номером j. Введем обозначения:

$$F_{k;i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k) = \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = k;\ \xi_{i_1}(t) < x_1, \ldots, \xi_{i_k}(t) < x_k\}, \tag{2}$$
$$p_k(i_1, \ldots, i_k) = F_{k;i_1,\ldots,i_k}(\infty, \ldots, \infty), \quad p_k = \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = k\},$$
$$k = 0, \ldots, n.$$

$p_k(i_1, \ldots, i_k)$ обозначает стационарную вероятность занятости ровно k приборов с номерами $i_1, \ldots, i_k$. Ясно, что

$$p_k = \sum_{i_1,\ldots,i_k} p_k(i_1, \ldots, i_k),$$

где сумма берется по всем C_n^k сочетаниям $(i_1, \ldots, i_k)$ из чисел $1, \ldots, n$. Далее положим

$$m_G = \int_0^\infty \bar{G}(t)\,dt, \quad \bar{G} = 1-G, \quad G = \min(G_1, \ldots, G_n).$$

Теорема 1. *Если $m_G < \infty$, то пределы* (2) *существуют и не зависят от распределения $\{x(0), \xi_{i_1}(0), \ldots, \xi_{i_{x(0)}}(0)\}$. Предельные вероятности $p_0, \ldots, p_n$ вычисляются по формулам*

$$\begin{gathered} p_k = (n-k)!\,\Lambda_k \Big/ \sum_{k=0}^{n} (n-k)!\,\Lambda_k \quad (k = 0, \ldots, n), \\ \Lambda_0 = 1, \quad \Lambda_k = \lambda_0 \ldots \lambda_{k-1} \sum_{i_1,\ldots,i_k} T_{i_1} \ldots T_{i_k}, \end{gathered} \tag{3}$$

где сумма берется по всем C_n^k сочетаниям $(i_1, \ldots, i_k)$ из чисел $1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть I_x и B_x — время пребывания процесса $x(t)$ в состоянии 0 и >0 соответственно. Назовем величину I_x (B_x) *периодом простоя* (*периодом занятости*) процесса $x(t)$. Случайные величины I_x и B_x независимы, причем $P\{I_x > t\} = \exp\{-\lambda_0 t\}$. Процесс $x(t)$ является регенерирующим, период регенерации ζ_x которого равен интервалу времени между соседними моментами начала периода занятости, т.е. $\zeta_x = I_x + B_x$. Согласно теореме Смита [9], процесс $x(t)$ эргодичен, если его период регенерации ζ_x будет иметь нерешетчатое распределение и конечное математическое ожидание. Так как величина I_x имеет показательное распределение, то первое условие этой теоремы выполняется. Для проверки второго условия сравним $x(t)$ с процессом $y(t)$, где $y(t)$ — число занятых приборов в момент t в бесконечнолинейной системе $M/G/\infty$ с интенсивностью входящего пуассоновского потока $\lambda = \max(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ и ф.р. времени обслуживания $G = \min(G_1, \ldots, G_n)$. Процесс $y(t)$ является регенерирующим с периодом регенерации $\zeta_y = I_y + B_y$, где I_y (B_y) — период простоя (период занятости), на котором $y(t) = 0$ (>0), причем $P\{I_y > t\} = \exp(-\lambda t)$. Так как

$$P\{y(t) = 0\} \to \exp\{-\lambda m_G\} \quad \text{при } t \to \infty,$$

то по эргодической теореме для регенерирующих процессов имеем $M\zeta_y = \lambda \exp(\lambda m_G)$. Процессы $x(t)$ и $y(t)$ связаны между собой соотношением $x(t) \leqslant y(t)$ в том смысле, что любое конечномерное распределение $x(t)$ больше соответствующего конечномерного распределения $y(t)$, т.е. для любых $t_1, \ldots, t_n$ и $x_1, \ldots, x_n$

$$P\{x(t_1) < x_1, \ldots, x(t_n) < x_n\} \geqslant P\{y(t_1) < x_1, \ldots, y(t_n) < x_n\}.$$

В частности, $P\{x(t) > 0\} \leqslant P\{y(t) > 0\}$. Интегрируя это неравенство по $t \in (0, \infty)$, находим $MB_x \leqslant MB_y$, откуда

$$M\zeta_x = \frac{1}{\lambda_0} + MB_x \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda} + MB_y\right) = \frac{\lambda}{\lambda_0} M\zeta_y = \frac{1}{\lambda_0}\exp\{\lambda m_G\} < \infty.$$

Перейдем теперь к выводу формул (3). Для любого вектора $c = (c_1, \ldots, c_k)$ и вещественного числа a положим

$$c^r = (c_1, \ldots, c_{r-1}, c_{r+1}, \ldots, c_k), \qquad (c, a) = (c_1, \ldots, c_k, a).$$

Применив рассуждения монографии [3], получаем для $F_{k;i}(x) = F_{k;i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k)$ следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$-\lambda_0 p_0 + \sum_{r=1}^{n} F'_{1;r}(0) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial F_{k;i}}{\partial x_r} - \sum_{r=1}^{k} \left[\frac{\partial F_{k;i}}{\partial x_r}\right]_{x_r=0} - \lambda_k F_{k;i} +$$

$$+ \sum_{s=k+1}^{n} \left[\frac{\partial F_{k+1;(i,i_s)}(x, x_s)}{\partial x_s}\right]_{x_s=0} + \frac{\lambda_{k-1}}{n-k+1} \sum_{r=1}^{k} F_{k-1;i_r}(x^r) G_{i_r}(x_r) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_r} - \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_r}\right]_{x_r=0} + \lambda_{n-1} \sum_{r=1}^{n} F_{n-1}(x^r) G_r(x_r) = 0,$$

где $F_n(x) = F_{n;1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n)$, $i = (i_1, \ldots, i_k)$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$.

Будем искать решение этой системы уравнений в виде

$$F_{k;i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)=\frac{c_k(i_1,\ldots,i_k)}{T_{i_1}\ldots T_{i_k}}\prod_{s=1}^{k}\int_0^{x_s}\bar G_{i_s}(t)\,dt, \tag{4}$$

где $c_k(i_1,\ldots,i_k)$ подлежат определению. Положив $x_1\to\infty,\ldots,x_k\to\infty$ и учитывая, что

$$\int_0^{x_s}\bar G_j(t)\,dt\to T_j<m_G<\infty,$$

находим $c_k(i_1,\ldots,i_k)=p_k(i_1,\ldots,i_k)$. Из (4) следует, что при $x_1\to\infty,\ldots$ $\ldots,x_k\to\infty$

$$\frac{\partial F_{k;i}}{\partial x_r}\to 0,\qquad \left[\frac{\partial F_{k;i}}{\partial x_r}\right]_{x_r=0}\to\mu_{i_r}p_k(i_1,\ldots,i_k).$$

В таком случае, положив $x_1\to\infty,\ldots,x_k\to\infty$ в (4), находим

$$-\lambda_0p_0+\sum_{r=1}^{n}\mu_rp_1(r)=0,$$

$$-\left(\lambda_k+\sum_{r=1}^{k}\mu_{i_r}\right)p_k(i)+\sum_{r=k+1}^{n}\mu_{i_r}p_{k+1}(i,i_r)+\frac{\lambda_{k-1}}{n-k+1}\sum_{r=1}^{k}p_{k-1}(i^r)=0,$$

$$-\left(\sum_{r=1}^{n}\mu_r\right)p_n+\lambda_{n-1}\sum_{r=1}^{n}p_{n-1}(1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,n)=0.$$

Решением этой системы уравнений является

$$p_k(i_1,\ldots,i_k)=\frac{(n-k)!\,\lambda_0\ldots\lambda_{k-1}}{n!\,\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_k}}\,p_0\qquad(k=1,\ldots,n). \tag{5}$$

Проверку этого факта можно значительно упростить, заметив, что

$$p_{k-1}(i_r)=\frac{(n-k+1)\mu_{i_r}}{\lambda_{k-1}}\,p_k(i)\qquad(r=1,\ldots,k),$$

$$p_{k+1}(i,i_s)=\frac{\lambda_k}{(n-k)!\,\mu_{i_s}}\,p_k(i)\qquad(s=k+1,\ldots,n).$$

Просуммировав (5) по всем сочетаниям $(i_1,\ldots,i_k)$ из чисел $1,\ldots,n$, получим

$$p_k=\frac{(n-k)!\,\Lambda_k}{n!}\,p_0\qquad(k=0,\ldots,n). \tag{6}$$

Найдя неизвестное p_0 из условия $p_0+\ldots+p_n = 1$, приходим к формуле (3).

Замечания. Формулу (5) можно написать в другой форме. Положим

$$p(e_1, \ldots, e_n) = \lim_{t\to\infty} P\{e_1(t) = e_1, \ldots, e_n(t) = e_n\} \qquad (e_1, \ldots, e_n = 0, 1),$$

где $e_k(t) = 1$, если в момент t прибор с номером k занят, и $e_k(t) = 0$ в противоположном случае. Тогда

$$p(e_1, \ldots, e_n) = \frac{(n-\|e\|)!\,\lambda_0 \ldots \lambda_{\|e\|-1} p_0}{n!} T_1^{e_1} \ldots T_n^{e_n},$$

где $\|e\| = e_1+\ldots+e_n$. Если $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda$ и $\lambda T_k = \varrho_k$, то

$$p(e_1, \ldots, e_n) = \frac{(n-\|e\|)!\,p_0}{n!} \varrho_1^{e_1} \ldots \varrho_n^{e_n}.$$

Следствие 1. *Предельные вероятности $p_0, \ldots, p_n$ обладают свойством инвариантности: они не зависят от вида ф.р. времен обслуживания $G_1, \ldots, G_n$, а зависят от их математических ожиданий $T_1, \ldots, T_n$ и интенсивностей $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$.*

Следствие 2. *Если $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda$, а $G_1, \ldots, G_n$ имеют одинаковое математическое ожидание*

$$\int_0^\infty \bar{G}_j(t)\,dt = T,$$

то вероятности $p_0, \ldots, p_n$ вычисляются по формулам Эрланга-Севастьянова.

Действительно, согласно (6) имеем

$$p_k = \frac{(n-k)!\,C_n^k(\lambda T)^k}{n!} p_0 = \frac{(\lambda T)^k}{k!} p_0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Следствие 3. *Вероятность потери любого требования p_n вычисляется по формуле*

(7) $$p_n = \lambda_0 \ldots \lambda_{n-1} T_1 \ldots T_n \Big/ \sum_{k=0}^{n} (n-k)!\,A_k.$$

Следствие 4. *Формула (6) при $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda$ дает результат из [10]:*

$$p_k = \frac{(n-k)!\,p_0}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} T_{i_1} \ldots T_{i_k},$$

а при $G_1 = \ldots = G_n = G$ *получаем результат из* [5]:

$$p_k = \lambda_0 \ldots \lambda_{k-1} T^k p_0 \mid k!.$$

2. Минимизации вероятности потери в системе $M/\vec{G}/2/0$ **с** π**-дисциплиной обслуживания.** Здесь метод, развитый в предыдущем пункте, будет применен для решения следующей задачи (см. [2]): на вход двух разнотипных приборов с ф.р. времени обслуживания G_1 и G_2 соответственно поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Каждое требование, заставшее в системе:

оба прибора свободными, выбирает первый из них с вероятностью π_1, а второй — с вероятностью $\pi_2 = 1 - \pi_1$;

только один прибор свободным, выбирает этот прибор;

оба прибора занятыми, теряется.

При заданных λ и

$$\lambda/(\mu_1 + \mu_2) = \varrho, \qquad \text{где } 1/\mu_i = \int_0^\infty \bar{G}_i(t)\,dt,$$

подобрать π_i и μ_i таким образом, чтобы вероятность потери любого требования $p_2 = p_2(\lambda, \pi_1, \mu_2)$ была минимальной. Решение этой задачи в условиях $G_i(t) = 1 - \exp\{-\mu_i t\}$ и $\pi_1 = 1$ можно найти в [8], а для системы $G/\vec{M}/2/0$ — в [11].

Обозначим через $x(t)$ число занятых приборов в момент t и положим

$$p_k = \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = k\} \qquad (k = 0, 1, 2),$$

$$m_G = \int_0^\infty \bar{G}(t)\,dt, \qquad \bar{G} = 1 - G, \qquad G = \min(G_1, G_2).$$

Теорема 2. *Если* $m_G < \infty$, *то предельное распределение* (p_0, p_1, p_2) *существует, не зависит от распределения* $x(0)$ *и вычисляется по формулам*

$$p_0 = \frac{2\varrho + 1}{2\varrho + 1 + (\varrho + 1)\lambda A}, \tag{8}$$

$$p_1 = \frac{\lambda A}{2\varrho + 1} p_0, \qquad p_2 = \frac{\lambda \varrho A}{2\varrho + 1} p_0,$$

где

$$A = \frac{\pi_1(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 + \lambda}{\mu_1 \mu_2}.$$

Доказательство. Состояние приборов определим парой $\{e_1(t), e_2(t)\}$, где

$$e_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } k\text{-ый прибор в момент } t \text{ свободен}, \\ 1, & \text{если } k\text{-ый прибор в момент } t \text{ занят}. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \lim_{t\to\infty} P\{e_1(t) = i, e_2(t) = j\} \quad (i, j = 0, 1), \\ F_{10}(x) &= \lim_{t\to\infty} P\{e_1(t) = 1, e_2(t) = 0,\ \xi_1(t) < x\}, \\ F_{01}(y) &= \lim_{t\to\infty} P\{e_1(t) = 0, e_2(t) = 1,\ \xi_2(t) < y\}, \\ F_2(x, y) &= \lim_{t\to\infty} P\{e_1(t) = 1,\ e_2(t) = 1,\ \xi_1(t) < x,\ \xi_2(t) < y\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\xi_i(t)$ — время дообслуживания требования, обслуживаемого i-ым прибором в момент t. Ясно, что $x(t) = e_1(t) + e_2(t)$, $p_0 = p_{00}$, $p_1 = p_{01} + p_{10}$, $p_2 = p_{11}$.

Повторив рассуждения предыдущего пункта можно показать, что пределы (9) существуют и удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &-\lambda p_0 + F'_{10}(0) + F'_{01}(0) = 0, \\ &F'_{10}(x) - F'_{10}(0) - \lambda F_{10}(x) + \frac{\partial F_2(x, 0)}{\partial y} + \lambda\pi_1 p_0 G_1(x) = 0, \\ &F'_{01}(y) - F'_{01}(0) - \lambda F_{01}(y) + \frac{\partial F_2(0, y)}{\partial x} + \lambda\pi_2 p_0 G(y) = 0, \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2(0, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_2(x, 0)}{\partial y} + \lambda F_{10}(x) G_2(y) + \lambda F_{01}(y) G_1(x) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение этой системы уравнений пишем в виде

$$\begin{aligned} &F_{10}(x) = c_{01}\mu_1 \int_0^x \bar G_1(t)\,dt, \qquad F_{01}(y) = c_{01}\mu_2 \int_0^y \bar G_2(t)\,dt, \\ &F_2(x, y) = c_2\mu_1\mu_2 \int_0^x \bar G_1(t)\,dt \int_0^y \bar G_2(t)\,dt, \end{aligned} \tag{11}$$

где c_{10}, c_{01}, c_2 подлежат определению. Нетрудно проверить, что эти постоянные равны p_{10}, p_{01}, p_2 соответственно. Из (11) следует, что при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ функции $F'_{10}(x)$, $F'_{01}(y)$, $\partial F_2/\partial x$, $\partial F_2/\partial y$ стремятся к нулю, а их значения в нуле — к $\mu_1 p_{10}, \mu_2 p_{01}, \mu_1 p_2, \mu_2 p_2$ соответственно. В таком случае, положив $x \to \infty$ и $y \to \infty$ в (10), находим

$$\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01} &= 0, \\
-(\lambda + \mu_1) p_{10} + \mu_2 p_2 + \lambda \pi_1 p_0 &= 0, \\
-(\lambda + \mu_2) p_{01} + \mu_1 p_2 + \lambda \pi_2 p_0 &= 0, \\
-(\mu_1 + \mu_2) p_2 + \lambda p_{01} + \lambda p_{10} &= 0.
\end{aligned}$$

Детерминант системы, состоящей из первых трех уравнений, равен $\varrho^{-1}\lambda\mu_1\mu_2(2\varrho+1)$. Применив правило Крамера к этой системе уравнений, находим

$$p_{10} = \frac{(\pi_1+\varrho)\lambda}{(2\varrho+1)\mu_1} p_0, \qquad p_{10} = \frac{(\pi_2+\varrho)\lambda}{(2\varrho+1)\mu_2} p_0,$$

откуда $p_1 = p_{10}+p_{01} = \lambda A p_0/(2\varrho+1)$. Из этого и последнего уравнения (11) следует, что $p_2 = \varrho p_1 = \lambda\varrho A p_0/(2\varrho+1)$. Неизвестное p_0 находим из условия $p_0+p_1+p_2 = 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Стационарная вероятность занятости ровно k приборов p_k не зависит от видов ф.р. времен обслуживания G_1 и G_2, а зависит от их математических ожиданий $1/\mu_1$ и $1/\mu_2$. В случае приборов одинаковой производительности, эти вероятности не зависят и от порядка занятия свободных приборов.*

Действительно, положив $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ в (8), находим, что для любого $\pi_1 \in [0, 1]$

$$p_k = \frac{a^k/k!}{1+a+a^2/2} \qquad (k = 0, 1, 2),$$

где $a = \lambda/\mu$. В частности, p_k имеет одно и то же значение и для равновероятного ($\pi_1 = \frac{1}{2}$) и для упорядоченного ($\pi_1 = 1$) занятия.

Согласно этому следствию среднее число занятых приборов для одинаковых приборов не зависит от порядка занятия свободных приборов и вычисляется по формуле

$$L = \frac{2a(a+1)}{a^2+2a+2}.$$

Следствие 2. *Пусть q_k — вероятность того, что занят прибор с номером k. Тогда*

$$q_k = \frac{\lambda}{\mu_k} \frac{\pi_k + (1+A\mu_k)\varrho}{2\varrho+1+(\varrho+1)\lambda A} \qquad (k = 1, 2).$$

Из этих формул следует, что вероятность q_k даже для приборов одинаковой производительности ($\mu_1 = \mu_2$) зависит от порядка занятия свободных приборов. Например, при равновероятном занятии

$$q_1 = q_2 = \frac{a(a+1)}{a^2+2a+2},$$

а при упорядоченном занятии

$$q_1 = \frac{a}{1+a}, \quad q_2 = q_1 \frac{a(a+2)}{a^2+2a+1}.$$

Следствие 3. *При равновероятном занятии* ($\pi_1 = \frac{1}{2}$) *вероятность потери* p_2 *принимает наименьшее значение только при* $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, *равное*

$$p_2^* = \frac{a^2}{a^2+2a+1}.$$

Действительно, положив $\pi_1 = \frac{1}{2}$ в (8) или $n = 2$ в (7), получим

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+(\mu_1+\mu_2)\lambda+2\mu_1\mu_2}.$$

Так как $\mu_1+\mu_2 = \lambda/\varrho$ фиксировано, то $\mu_1\mu_2$ максимально при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Следовательно, при равновероятном занятии, использование разнотипных приборов нецелесообразно.

Следствие 4. *Если* $\mu_1 > \mu_2$, *то вероятность потери принимает наименьшее значение при*

$$\pi_1 = 1, \quad \mu_2 = \hat{\mu}_2 \equiv \lambda\left(\sqrt{1+1/\varrho}-1\right).$$

Действительно, из (8) видно, что вероятность p_2 минимальна лишь тогда, когда A минимальна. Так как $\mu_2-\mu_1 < 0$, то A — как функция от π_1 — принимает наименьшее значение при $\pi_1 = 1$, равное $\varrho A^*(\mu_2)$, где

$$A^*(\mu_2) = \frac{\mu_2+\lambda}{(\lambda-\varrho\mu_2)\mu_2}.$$

Теперь нетрудно проверить, что функция $A^*(\mu_2)$ достигает единственного минимума при $\mu_2 = \hat{\mu}_2$.

Цитированная литература

[1] R. Fortet, *Calcul des probabilités*, Paris 1950.

[2] Б. В. Гнеденко, *О некоторых постановках задач и результатах теории массового обслуживания*, стр. 221-235 в: А. Я. Хинчин, *Работы по теории массового обслуживания*, Москва 1963.

[3] — и И. Н. Коваленко, *Введение в теорию массового обслуживания,* Москва 1966.

[4] Д. Б. Гнеденко, *Об одном обобщении формул Эрланга,* Zastos. Mat. 12 (1971), стр. 239-242.

[5] И. Н. Коваленко, *Исследования по анализу надежности сложных систем,* Киев 1975.

[6] C. Palm, *Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr,* Ericson Techn. 44 (1943), стр. 1-189.

[7] Б. А. Севастьянов, *Предельная теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами,* Теор. вероятност. и применен. 2 (1957), стр. 106-116.

[8] V. P. Singh, *Two-server Markovian queues with balking* (*heterogeneous vs. homogeneous servers*), Operations Res. 18 (1970), стр. 145-159.

[9] W. L. Smith, *Renewal theory and its ramifications,* J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 20 (1958), стр. 243-302.

[10] А. А. Шахбазов, Автореферат кандидатской диссертации, Московский университет, 1962.

[11] — *Система с разными приборами и управлением обслуживания,* Ученые записки МВиССО Азерб. ССР, Вопросы прикладной математики и кибернетики, Но. 1 (1977), стр. 43-47.

[12] L. Takács, *Introduction to the theory of queues,* New York 1962.

Поступило в редакцию 28. 1. 1981