J. ODERFELD i K. WIŚNIEWSKI (Warszawa)

ODBIÓR STATYSTYCZNY Z UWZGLĘDNIENIEM BŁĘDÓW KONTROLERA

Wstęp

Teoria odbioru wyrywkowego jest obecnie dość dobrze ugruntowana, zwłaszcza w przypadku najłatwiejszym, gdy produkt składa się z podobnych sztuk i gdy te sztuki kwalifikujemy alternatywnie, tzn. tylko jako dobre lub jako niedobre.

Teoria ta zajmuje się między innymi zagadnieniem trafności orzekania o produkcie na podstawie badania próbek. Są tu dwa źródła błędów: przybliżona reprezentacyjność próbki i błędy techniczne przy kwalifikowaniu poszczególnych sztuk przez kontrolera.

Teoria odbioru z reguły uwzględnia tylko pierwsze źródło błędów; robi się to dla dogodności, zakładając — najczęściej milcząco — że błędy techniczne są małe. Przy tym uproszczeniu dochodzi się do wniosku, że wprawdzie odbiór wyrywkowy może być tańszy od stuprocentowego, ale jest tylko jego namiastką pod względem trafności orzekania.

Zagadnieniem błędów technicznych zajmowano się w ogóle mało. Jednakże pewne wyniki zagraniczne i nowe uzyskane w przemyśle krajowym wskazują, że błędy te bywają znaczne i że ich uwzględnienie zupełnie zmienia pogląd na trafność orzekania.

Niniejszy artykuł zawiera niektóre wyniki uzyskane w Instytucie Matematycznym PAN. Składa się z dwóch oddzielnych prac.

W części I K. Wiśniewski opisuje eksperymenty, na podstawie których szacuje wielkość błędów technicznych, podaje zarys teorii odbioru uwzględniającej te błędy, rozważa różne przepisy badania stuprocentowego, wyprowadza wzory na moc testu przy badaniu stuprocentowym i przy badaniu statystycznym z losowaniem bezzwrotnym. Wreszcie ustala warunki, w których odbiór wyrywkowy jest lepszy od stuprocentowego.

W części II J. Oderfeld bada wpływ błędów kontrolera na moc testu przy losowaniu zwrotnym. Wyprowadzone wzory mogą również znaleźć zastosowanie w pospolitym przypadku praktycznym, gdy wprawdzie losowanie jest bezzwrotne, ale wielkość partii bardzo duża.

I. O błędach w kontroli towarów sztukowych *

§ 1. Błędy w kontroli. Przedmiotem rozważań będą błędy w kontroli technicznej przy klasyfikacji sztuk na dobre i niedobre.

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na zakwalifikowaniu sztuki dobrej jako dobrą, $\bar{A}$ — zdarzeniem polegającym na zakwalifikowaniu sztuki dobrej jako niedobrą. Prawdopodobieństwo zakwalifikowania sztuki dobrej jako dobrą oznaczamy przez $P(A)=p$.

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania sztuki dobrej jako niedobrą jest $P(\bar{A})=1-p$.

Błędem pierwszego typu będziemy nazywali zdarzenie $\bar{A}$ polegające na zakwalifikowaniu przez brakarza sztuki dobrej jako niedobrą. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego typu jest równe $1-p$.

Niech B oznacza zdarzenie polegające na zakwalifikowaniu sztuki niedobrej jako niedobrą, $\bar{B}$ zdarzenie polegające na zakwalifikowaniu sztuki niedobrej jako dobrą. Prawdopodobieństwo zakwalifikowania sztuki niedobrej jako niedobrą oznaczamy przez $P(B)=q$.

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania sztuki niedobrej jako dobrą jest $P(\bar{B})=1-q$.

Błędem drugiego typu będziemy nazywali zdarzenie $\bar{B}$, polegające na zakwalifikowaniu przez brakarza sztuki niedobrej jako dobrą. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego typu jest równe $1-q$.

Niech C oznacza zdarzenie polegające na zakwalifikowaniu wylosowanej sztuki jako dobrą, $\bar{C}$ — zdarzenie polegające na zakwalifikowaniu jej jako niedobrą, w — wadliwość partii.

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania jako dobrą sztuki, pochodzącej z partii o wadliwości w, jest

$$P(C|w,p,q)=(1-w)p+w(1-q).$$

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania jako niedobrą sztuki, pochodzącej z partii o wadliwości w, jest [1])

$$P(\bar{C}|w,p,q)=wq+(1-w)(1-p)=w_1.$$

Przyjmujemy, że zdarzenia A i B są od siebie niezależne; możemy więc rozpatrywać oddzielnie wpływ błędów pierwszego lub drugiego typu na orzeczenia o zgodności lub niezgodności partii z wymaganiami na podstawie przebadania wszystkich sztuk w partii (kontrola stuprocentowa) lub pewnej ich części (kontrola wyrywkowa).

* Część napisana przez K. Wiśniewskiego.

[1]) Wyrażenie to podał J. Oderfeld nazywając je pozorną wadliwością partii i używając do wyznaczania charakterystyki niektórych planów statystycznego badania przy uwzględnieniu błędów kontrolera.

Prawdopodobieństwa p i q mogą w praktyce przemysłowej zależeć od wielu parametrów, jak na przykład:

a) liczności badanej partii lub próbki,
b) zmęczenia brakarza,
c) kryterium kwalifikacji sztuk,
d) frakcji sztuk niedobrych w partii.

W czasie badań niektóre parametry mogą ulegać zmianie, więc prawdopodobieństwa p i q mogą być zmienne w czasie.

Na błędy drugiego typu, robione przez brakarza, zwrócono uwagę już dość dawno, lecz ograniczono się tylko do przeprowadzenia doświadczeń [1]. W doświadczeniach przeprowadzonych w Polsce stwierdzono błędy obu typów. Na przykład w kontroli automatycznej zapałek w pewnym etapie produkcji segreguje się patyki na dobre i niedobre przesiewając je przez sito, aby oddzielić patyki bądź o wymiarach znajdujących się poza granicami tolerancji, bądź połamane. Z sita spływają dwa potoki patyków. W potoku patyków dobrych stwierdzono pewien procent niedobrych, a w potoku patyków niedobrych pewien procent patyków dobrych. Przy kontroli automatycznej prawdopodobieństwa p i q nie zależą od liczności partii, od „zmęczenia automatu" i od frakcji sztuk niedobrych, lecz w sposób istotny jedynie od kryterium kwalifikowania sztuk. Przy kontroli nieautomatycznej prawdopodobieństwa p i q są mniej ustabilizowane, można jednak przypuszczać, że w ustalonych warunkach kontroli zmienność ich nie jest znaczna. W dalszych rozważaniach będziemy uważali p i q za stałe.

Z błędami pierwszego i drugiego typu spotykamy się nie tylko w kontroli jakości, ale również w korekcie drukarskiej, w odczytywaniu rentgenogramów[2]) itd.

Doświadczenia opisane przez C. W. Kennedy'ego [1] i potwierdzone przez H. Mierzejewską wykazują prawidłowość zauważoną już przez P. S. Olmsteada [3] przy badaniu serii zjawisk.

C. W. Kennedy [1] opisuje doświadczenia przeprowadzone nad partią składającą się z samych sztuk dobrych, do której celowo włączono 100 sztuk niedobrych i dokładnie zmieszano. Tak zanieczyszczoną partię oddano kontrolerowi do zbadania. W pierwszym badaniu stuprocentowym kontroler wykrył tylko 68 sztuk niedobrych. Nie informując kontrolera, że jest to ta sama partia, polecono mu zbadać ją stuprocentowo po raz drugi, a potem trzeci. Za drugim razem wykrył on 18 sztuk niedobrych, a za trzecim jeszcze 8 sztuk niedobrych. Po tych trzech kontrolach pozostało jeszcze w partii 6 sztuk niedobrych. Specjalnie dobrany

---

[2]) Rzecz tę przedstawił J. Spława-Neyman w referacie wygłoszonym w 1950 r. w Towarzystwie Ekonomicznym w Warszawie.

zespół kontrolerów zbadał partię po raz czwarty i znalazł jeszcze 4 sztuki niedobre, a więc nie zdołał wyłowić ostatnich dwóch sztuk niedobrych. Wyniki tych badań zamieszczamy w tablicy 1, w wierszu drugim.

Podobne badania zaproponowałem dyplomantce Szkoły Głównej Planowania i Statystyki (specjalizacja: Statystyczna Kontrola Jakości) H. Mierzejewskiej. Przeprowadziła je, jako fragment swej pracy dyplomowej, w Toruńskiej Fabryce Wodomierzy, w której odbywała praktykę dyplomową w 1953 r. Uzyskane wyniki należy zawdzięczać wytrwałości badającej, jak również przychylnemu ustosunkowaniu się do tych prac kierownictwa i załogi Toruńskiej Fabryki Wodomierzy. Wyniki badań H. Mierzejewskiej podano w trzecim i w dalszych wierszach tablicy 1.

TABLICA 1

Wyniki stuprocentowego badania partii towaru
(Przykład pierwszy — badania Kennedy'ego; dalsze — badania Mierzejewskiej, ogłoszone za zgodą Dyrekcji Toruńskiej Fabryki Wodomierzy)

Przedmiot badania	Liczność partii	Liczba znalezionych sztuk niedobrych w badaniu o numerze				
		1	2	3	4	5
Nieznany	nieznana	68	18	8	4	
Niklowe wkręty z łebkami cylindrycznymi (badanie na wkręcanie)	2064	169	32			
Filarki do liczydła gazomierzy (badanie średnicy)	1600+x	x	49	27	21	
Zapadki do zegarków (badanie średnicy otworu)	1427+x	x	131			
Kółka zębate liczydeł gazomierzy (badanie średnicy za pomocą sprawdzianu szczękowego)	1873	169	70 (2)	24 (1)	4	1
Zakrętki mocujące (badanie na wkręcenie)	1275	79	16			

Pierwsze stuprocentowe badanie partii niklowych wkrętów o liczności 2064 sztuki, przeprowadzone przez brakarza, wykazało 169 sztuk niedobrych. Po usunięciu sztuk niedobrych Mierzejewska znalazła w drugim badaniu jeszcze 32 sztuki niedobre. Dalszych badań nie prowadzono, jednak już ten wynik wskazuje na powstawanie błędów drugiego typu.

Filarki do liczydeł gazomierzy badał po raz pierwszy stuprocentowo brakarz, ale nie wiadomo, ile znalazł sztuk niedobrych, bo wyniku badania nie zanotowano. Sztuk dobrych zostało 1600. Dlatego w kolumnie o nagłówku „liczność partii" podano jako nieznaną liczbę sztuk niedobrych znalezionych w pierwszym badaniu symbol x, a więc liczność partii jest 1600+x. To samo zachodzi przy badaniu zapadek do zegarów.

Najbardziej interesujący jest wynik badania kółek zębatych liczydeł gazomierzy. Pierwsze badanie stuprocentowe przeprowadził brakarz znajdując 169 sztuk niedobrych. Następne badanie stuprocentowe przeprowadziła H. Mierzejewska. Okazało się, że jeszcze w piątym badaniu znaleziono jedną sztukę niedobrą. Następnego badania już nie prowadzono, tak samo jak dla innych przedmiotów. Możliwe, że badając dalej wykryto by jeszcze pewną liczbę sztuk niedobrych.

Błędy pierwszego typu zaobserwowano przy badaniu kółek zębatych liczydeł gazomierzy. W drugim badaniu wykryto 70 sztuk niedobrych. Wśród nich po skrupulatnym przebadaniu znaleziono 2 sztuki dobre, co zaznaczono w tablicy 1 liczbą w nawiasie. Analogicznie w trzecim badaniu wśród 24 sztuk uznanych za niedobre znaleziono 1 sztukę dobrą.

Z całej tablicy rozważę szczegółowo tylko dwa wyniki: pierwszy, cytowany za C. W. Kennedy'm [1], i drugi, uzyskany przez H. Mierzejewską, dotyczący badania kółek zębatych liczydeł gazomierzy. Pozostałe wyniki są tylko ilustracją spostrzeżenia, że badanie stuprocentowe nie jest nieomylne.

§ 2. Wielokrotne badania stuprocentowe. Na początek ograniczymy się tylko do błędów drugiego typu.

Niech zmienną losową x będzie liczba badań, po której niedobrą sztukę towaru uznaje się po raz pierwszy za niedobrą. Oznaczmy przez q prawdopodobieństwo, że $x=1$: $P(x=1)=q$. Z prostego rozumowania wynika wzór

$$P(x=k)=q(1-q)^{k-1}, \quad \text{gdzie} \quad k=1,2,\ldots \tag{1}$$

Jeśli wartość q nie ulega zmianie w czasie badań, to wzór (1) przedstawia rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej x. Jest to znany rozkład geometryczny (zob. [2]). Parametrem rozkładu jest q, wartością oczekiwaną

$$m_x=1/q, \tag{2}$$

a odchyleniem średnim

$$\sigma_x=\sqrt{1-q}/q. \tag{3}$$

Dystrybuanta $P(x\leqslant t)$ zmiennej losowej x ma postać

$$F(t)=\sum_{k=1}^{t} q(1-q)^{k-1}. \tag{4}$$

W tablicy 2 są podane wartości $F(t)$ dla różnych wartości t i q z dokładnością do trzech znaków po przecinku.

TABLICA 2

Wartości funkcji $F(t)=\sum_{k=1}^{t} q(1-q)^{k-1}$

q \ t	1	2	3	4	5	6	7	8
0,1	0,1	0,19	0,271	0,344	0,4095	0,469	0,521	0,570
0,2	0,2	0,36	0,488	0,590	0,6723	0,738	0,790	0,832
0,3	0,3	0,51	0,657	0,760	0,8380	0,882	0,918	0,942
0,4	0,4	0,64	0,784	0,870	0,922	0,953	0,972	0,983
0,5	0,5	0,75	0,875	0,938	0,969	0,984	0,992	0,996
0,6	0,6	0,84	0,936	0,974	0,990	0,996	0,998	0,999
0,7	0,7	0,91	0,973	0,992	0,998	0,999	1,000	1,000
0,8	0,8	0,96	0,992	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000
0,9	0,9	0,99	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Zgodność rozkładu geometrycznego z rozkładem empirycznym podanym w wierszu 1 tablicy 1 zbadano za pomocą kryterium χ^2, przy czym badania 4 i 5 połączono w jedno ze względu na małe ilości obserwacji. Zakładamy tutaj, że brakarz nie zrobił błędu pierwszego typu. Założenie to można zrobić ze względu na małą wartość $1-p$ w porównaniu z $1-q$. Otrzymano $\bar{x}=1{,}52$ z danych doświadczalnych jako oszacowanie prawdziwej średniej m_x rozkładu, a stąd $q=1/\bar{x}=0{,}658$ oraz $\chi^2=1{,}986$.

Dla $4-1-1=2$ stopni swobody, powstałych stąd, że jest jeden parametr rozkładu i jedna zależność wiążąca obserwacje, odczytano z tablic, że prawdopodobieństwo przekroczenia otrzymanej wartości χ^2 jest zawarte między 0,3 a 0,5. Ta duża zgodność świadczy za występującą w badaniach prawidłowością, zgodną z rozkładem geometrycznym.

Z przedmiotów zbadanych przez H. Mierzejewską najlepiej nadają się do sprawdzenia zgodności kółka zębate liczydeł gazomierzy. Wyniki badań są zamieszczone w wierszu 5 tablicy 1. Otrzymano $\bar{x}=1{,}5$; $q=0{,}668$ i $\chi^2=5{,}506$. Dla 2 stopni swobody odczytano z tablic, że prawdopodobieństwo przekroczenia $\chi^2=5{,}506$ jest zawarte między 0,05 a 0,01. Stopień zgodności jest tu bardzo mały. Powstało więc przypuszczenie, że powodem tej niezgodności była przede wszystkim różna zdolność kwalifikowania sztuk przez brakarza i Mierzejewską; jak bowiem zaznaczono na początku, pierwsze badanie przeprowadził brakarz. Biorąc pod uwagę tylko wyniki badań prowadzonych przez Mierzejewską otrzymujemy

$$\bar{x}=1{,}34, \quad q=0{,}744, \quad \chi^2=1{,}970.$$

Dla jednego stopnia swobody odczytano z tablic, że prawdopodobieństwo przekroczenia $\chi^2=1{,}970$ jest zawarte między 0,1 a 0,2. Wyniki te wykazują niezłą zgodność i nie upoważniają do odrzucenia hipotezy, że rozkład zmiennej x jest rozkładem geometrycznym.

J. Oderfeld zwrócił mi uwagę na przydatność siatki półlogarytmicznej do takich badań. Mianowicie $\lg P$ jest funkcją liniową k, jak to widać z (1). Wykreślając przez znane punkty prostą można znaleźć przybliżoną liczbę badań stuprocentowych, potrzebnych do wykrycia wszystkich braków. Ponieważ jednak jest to ekstrapolacja, należy odnosić się z dużą ostrożnością do otrzymanych wyników.

Badając kółka zębate liczydeł gazomierzy (tablica 1, wiersz 5), znaleziono w badaniu drugim wśród 70 sztuk niedobrych 2 sztuki dobre; w badaniu trzecim wśród 24 sztuk niedobrych znaleziono jedną sztukę dobrą. Niestety te dane doświadczalne jako zbyt szczupłe nie pozwalają na dokładniejszą analizę. Rozważania teoretyczne, dotyczące rozkładu zmiennej losowej x w zależności od prawdopodobieństwa p, mają taki sam przebieg jak rozważania dotyczące prawdopodobieństwa q. Wartości odpowiednich prawdopodobieństw można odczytać z tablicy 2 zamieniając q na p.

§ 3. Charakterystyka badania stuprocentowego. Przy odbiorze stuprocentowym mamy zwykle do czynienia z dwoma rodzajami przepisów postępowania.

Pierwszy rodzaj przepisu brzmi: Zbadać wszystkie sztuki w partii; sztuki uznane za dobre przyjąć, sztuki uznane za niedobre odrzucić. Postępowanie według tego przepisu jest sortowaniem. Jeśli brakarz nie robi błędów w klasyfikacji sztuk, to, pomijając koszty badania, można uważać ten przepis za najlepszy. W przypadku jednak, gdy brakarz robi błędy w klasyfikacji sztuk, wynik sortowania nie jest pewny. Można wtedy weryfikować różne hipotezy statystyczne co do wadliwości partii.

Wyrażenie na prawdopodobieństwo zakwalifikowania k sztuk jako niedobre, gdy w rzeczywistości jest ich w partii Nw, można otrzymać z następującego rozumowania:

Sztuki zakwalifikowane jako niedobre mogą pochodzić z błędnego zakwalifikowania sztuk dobrych jako niedobre i poprawnego zakwalifikowania sztuk niedobrych jako niedobre, co razem daje k sztuk niedobrych.

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania i spośród $N(1-w)$ sztuk dobrych jako niedobre można wyrazić wzorem dwumianowym

$$P_i = \binom{N(1-w)}{i} p^{N(1-w)-i}(1-p)^i.$$

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania $k-i$ spośród Nw sztuk niedobrych jako niedobre można wyrazić wzorem dwumianowym

$$P_{k-i}=\binom{Nw}{k-i}q^{k-i}(1-q)^{Nw-(k-1)}.$$

Prawdopodobieństwo zakwalifikowania i spośród $N(1-w)$ sztuk dobrych jako niedobre i $k-i$ spośród Nw sztuk niedobrych jako niedobre jest — wobec założonej niezależności tych zdarzeń — iloczynem $P_{i,k-i}=$ $=P_iP_{k-i}$. Sztuki niedobre w liczbie k mogą powstać z różnych układów i i $k-i$, prawdopodobieństwo zatem zakwalifikowania k sztuk jako niedobre (po zbadaniu partii o wadliwości w) wyraża się wzorem

$$P_k=\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}=\sum_{i=0}^{k}P_iP_{k-1},$$

czyli

$$(5)\qquad P_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{N(1-w)}{i}\binom{Nw}{k-i}p^{N(1-w)-i}(1-p)^iq^{k-i}(1-q)^{Nw-(k-i)}.$$

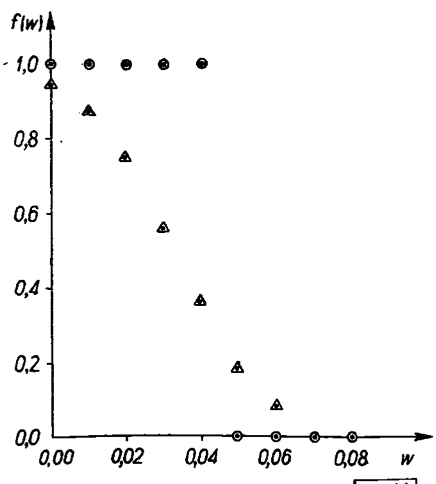
Wzór ten w innej postaci podał również niezależnie ode mnie C. Rajski.

D r u g i r o d z a j p r z e p i s u brzmi: Uzgodnić między dostawcą a odbiorcą dozwoloną wadliwość w_0. Zbadać wszystkie sztuki i policzyć sztuki niedobre. Podzielić znalezioną liczbę sztuk niedobrych przez liczność partii, otrzymując w ten sposób rzeczywistą jej wadliwość w. Jeśli $w\leqslant w_0$ — partię przyjąć, jeśli $w>w_0$ — partię odrzucić.

Jeśli brakarz nie robi błędów w klasyfikacji sztuk, to krzywa operacyjno-charakterystyczna (potocznie zwana *charakterystyką*) ma przebieg podany na rysunku 1 (punkty w kółkach). Gdy brakarz robi te błędy, charakterystyka wyraża się wzorem

$$(6)\qquad f(w)=\sum_{k=0}^{Nw_0}P_k,$$

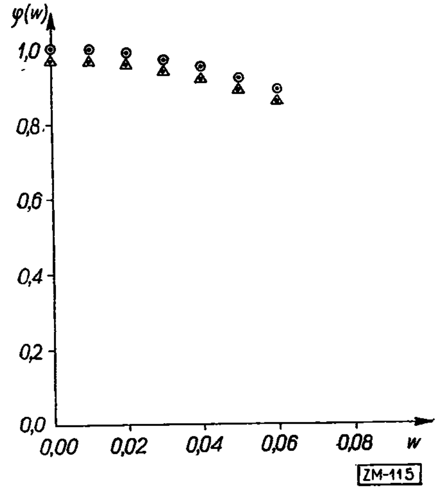
gdzie P_k jest określone przez zależność (5).



Rys. 1. Charakterystyki odbioru stuprocentowego (gdy brakarz nie robi błędów — punkty w kółkach, a gdy brakarz robi błędy — punkty w trójkątach). $N=100$, $p=0{,}98$, $q=0{,}8$, $w_0=0{,}04$

Przykład. Dla partii o liczności $N=100$ sztuk i dla $p=0{,}98$, $q=0{,}8$, przy założeniu, że $w=0{,}04$, obliczono posługując się wzorami (5) i (6) kilka punktów (punkty w trójkątach na rysunku 1) charakterystyki odbioru stuprocentowego, gdy brakarz robi błędy w klasyfikacji sztuk.

Porównanie charakterystyk, gdy brakarz nie robi błędu w klasyfikacji sztuk i gdy je robi, daje rysunek 1.



Rys. 2. Charakterystyki planu $1//10$ (gdy brakarz nie robi błędów — punkty w kółkach, a gdy brakarz robi błędy — punkty w trójkątach). $N=100$, $p=0{,}98$, $q=0{,}8$

§ 4. Charakterystyka badania statystycznego. Rozpatrzymy teraz wpływ błędów w klasyfikacji sztuk na przebieg charakterystyki pojedynczego planu badania $m//n$, w którym n oznacza liczność próbki, a m największą liczbę sztuk niedobrych w próbce, przy pojawieniu się której należy jeszcze partię przyjąć.

W przypadku, gdy brakarz nie robi błędów w klasyfikacji sztuk i losowanie jest bezzwrotne, charakterystykę można obliczać ze wzoru

$$f(w)=P(z\leqslant m)=\sum_{z=0}^{m}\binom{M}{z}\binom{N-M}{n-z}\Big/\binom{N}{n}, \tag{7}$$

w którym z oznacza rzeczywistą liczbę sztuk złych znalezionych w próbce.

W przypadku jednak, gdy brakarz robi błędy w klasyfikacji sztuk i losowanie jest bezzwrotne, charakterystykę można obliczać z wzoru

$$\varphi(w)=P(k\leqslant m)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{z=0}^{n}\binom{M}{z}\binom{N-M}{n-z}P_k\Big/\binom{N}{n}, \tag{8}$$

gdzie P_k jest dane przez wzór (5).

Przykład. Dla partii o liczności $N=100$ sztuk i dla $p=0{,}98$, $q=0{,}8$ obliczono z wzorów (7) i (8) odpowiednie punkty charakterystyk planu $1//10$, gdy brakarz nie robi błędów w klasyfikacji sztuk i gdy je robi (punkty w kółkach i punkty w trójkątach na rysunku 2). Punkt przecięcia krzywych występuje przy takiej wadliwości pozornej, która jest równa wadliwości rzeczywistej. W naszym przykładzie

$$w=\left(\frac{1-p}{1-q}-1\right)^{-1}=0{,}0909.$$

Rysunek 2 wskazuje, że wpływ błędów brakarza na charakterystykę planu $1//10$ jest znacznie mniejszy niż wpływ na charakterystykę odbioru stuprocentowego.

§ 5. Porównanie odbioru stuprocentowego z odbiorem statystycznym. Nasuwa się przypuszczenie, że gdy znane są p i q oraz w_0, to dla drugiego rodzaju przepisu odbioru stuprocentowego można dobrać taki plan $m//n$, żeby jego charakterystyka w przybliżeniu odpowiadała charakterystyce odbioru stuprocentowego. Wadą jednak takiego porównania jest konieczność arbitralnego przyjęcia dopuszczalnej wadliwości w_0. Dlatego zajmiemy się tylko pierwszym rodzajem przepisu odbioru stuprocentowego i oprzemy porównanie na przeciętnej liczbie sztuk zakwalifikowanych błędnie.

Z dwóch przepisów badania I i II będziemy nazywali przepis I *lepszym* od przepisu II, jeśli przy danej liczności N partii i jej rzeczywistej wadliwości w oraz przy danych p i q

1^0 przepis I wymaga zbadania niewiększej liczby sztuk niż przepis II,

2^0 stosowanie przepisu I powoduje mniej błędnych orzeczeń o poszczególnych sztukach niż stosowanie przepisu II.

Te przepisy statystyczne, które spełniają warunek 2^0 w porównaniu do przepisów odbioru stuprocentowego, są więc lepsze.

Porównamy pierwszy rodzaj przepisu odbioru stuprocentowego z odbiorem według planu pojedynczego $m//n$.

W odbiorze stuprocentowym oczekiwana liczba sztuk błędnie zakwalifikowanych jest

$$R_1 = N\big(1 - (1-w)p - wq\big). \tag{9}$$

W odbiorze statystycznym według planu pojedynczego oczekiwana liczba sztuk błędnie zakwalifikowanych w próbce jest

$$r_1 = n\big(1 - (1-w)p - wq\big). \tag{10}$$

Jeśli na podstawie zbadania próbki partię się przyjmuje, to według przyjętych zwyczajów handlowych płaci się za całą partię, tak jak gdyby składała się z samych sztuk dobrych. Znaczy to, że niebadane sztuki kwalifikuje się jako dobre. Oczekiwana liczba błędnie zakwalifikowanych sztuk niedobrych jako dobre, spośród sztuk niebadanych, jest

$$r_2 = (N-n)w\varphi(w), \tag{11}$$

gdzie $\varphi(w)$ wyraża się wzorem (8).

Jeśli na podstawie zbadania próbki partię się odrzuca, to tym samym uznaje się wszystkie niebadane sztuki za niedobre. Oczekiwana liczba błędnie zakwalifikowanych sztuk dobrych jako niedobre, spośród niebadanych, jest

$$(12) \qquad r_3 = (N-n)(1-w)\big(1-\varphi(w)\big).$$

Stosując statystyczną kontrolę odbiorczą otrzymuje się więc na oczekiwaną liczbę błędnie zakwalifikowanych sztuk wyrażenie

$$(13) \qquad R_s = r_1 + r_2 + r_3.$$

Korzystając z (10), (11), (12) i (13) znajdujemy

$$(14) \qquad R_2 = n[1-(1-w)p - wq] + (N-n)\Big(w\varphi(w) + (1-w)\big(1-\varphi(w)\big)\Big).$$

Na to, by przepis statystyczny był lepszy od przepisu odbioru stuprocentowego, powinną zachodzić nierówność $R_2 \leqslant R_1$. Relacja ta zachodzi, gdy

$$(15) \qquad \varphi(w) \geqslant \frac{p(1-w) - w(1-q)}{1-2w}.$$

Ponieważ z założenia $\varphi(w) \geqslant 0$, więc nierówność (15) jest spełniona zawsze, jeśli jej prawa strona jest niedodatnia, to znaczy jeśli

$$(16) \qquad \frac{1}{2} < w < \frac{p}{1+p-q}.$$

Prowadzi to do następującego wniosku:

Jeśli brakarz robi błędy o prawdopodobieństwach $1-p$ i $1-q$, to dla rzeczywistej wadliwości dostarczonej partii, spełniającej relację (16), każdy przepis statystyczny jest lepszy od przepisu odbioru stuprocentowego.

Przykład. Dla $p=0{,}98$, $q=0{,}8$ warunek (16) przyjmuje postać $0{,}5 < w < 0{,}83$, a dla $p=0{,}4$ i $q=0{,}4$ postać $0{,}4 < w < 0{,}5$.

Ponadto bezpośrednim rachunkiem można wyznaczyć ze wzoru (15) te przedziały dla w, w których dany plan statystyczny jest lepszy od stuprocentowego przy badaniu partii o danej liczności. Okazuje się na przykład, że dla $p=0{,}98$, $q=0{,}8$ i $N=100$, plan $1//10$ jest lepszy dla $w=0$ (dla dostatecznie dużych partii przedział w zakresie małych wadliwości nie jest zdegenerowany do punktu) i dla $0{,}5 < w < 0{,}83$.

Porównajmy teraz pierwszy rodzaj przepisu odbioru stuprocentowego z przepisem statystycznym według planu $m//n$, z tą jednak odmianą, że partię uznaną za niedobrą się sortuje.

Jak poprzednio, oczekiwana liczba błędnie zakwalifikowanych sztuk w próbce wynosi r_1, a jeśli na podstawie zbadania próbki partię się przyjmuje, to oczekiwana liczba błędnie zakwalifikowanych sztuk w części niebadanej wynosi r_2.

Jeśli na podstawie badania próbki pozostałą część partii się sortuje, to oczekiwana liczba sztuk zakwalifikowanych błędnie w sortowaniu wynosi

$$r_4 = (N-n)\big(1-(1-w)p - wq\big)\big(1-\varphi(w)\big). \tag{17}$$

Jeśli więc stosuje się przepis statystyczny z sortowaniem, to oczekiwana liczba błędnie zakwalifikowanych sztuk wynosi razem

$$R_3 = r_1 + r_2 + r_4. \tag{18}$$

Przepis statystyczny z sortowaniem jest lepszy od stuprocentowego, jeśli $R_3 \leqslant R_1$, czyli jeśli

$$n\big(1-(1-w)p-wq\big)+(N-n)w\varphi(w)+(N-n)\big(1-(1-w)p-wq\big)\big(1-\varphi(w)\big)\leqslant$$
$$\leqslant N\big(1-(1-w)p-wq\big),$$

a więc jeśli

$$w \leqslant (1-p)/(1-p+q). \tag{19}$$

W tej nierówności nie występuje $\varphi(w)$, co prowadzi do następującego wniosku:

Jeśli brakarz robi błędy o prawdopodobieństwach $1-p$ i $1-q$, to dla rzeczywistej wadliwości partii spełniającej relację

$$w \leqslant \big(1+q/(1-p)\big)^{-1}$$

przepis statystyczny z uwzględnieniem sortowania w przypadku uznania partii za niedobrą jest lepszy od przepisu odbioru stuprocentowego.

Przykład. Dla $p = 0{,}98$, $q = 0{,}8$ nierówność (19) przyjmuje postać $w \leqslant 0{,}024$.

W ten sposób pokazaliśmy, że w pewnych przypadkach i przy pewnych założeniach przepisy odbioru statystycznego są lepsze od przepisów odbioru stuprocentowego.

W naszych rozważaniach przyjęliśmy jednakową stratę w przypadku zakwalifikowania sztuki dobrej jako niedobrą i zakwalifikowania sztuki niedobrej jako dobrą. Rzecz jasna, że straty te mogą być różne. Można to uwzględnić, jeśli zna się koszt k badania jednej sztuki, stratę k_1 wynikłą z zakwalifikowania sztuki dobrej jako niedobrą i stratę k_2 wynikłą z zakwalifikowania sztuki niedobrej jako dobrą. Schemat rozumowania przy porównywaniu metod statystycznych z metodami odbioru stuprocentowego nie ulega zmianie, jedynie wszelkie wartości oczekiwane trzeba pomnożyć przez odpowiednie współczynniki bądź kosztów, bądź strat. Obliczenia te pomijamy jako nie wnoszące koncepcyjnie nic nowego.

II. Wpływ błędów kontrolera na charakterystykę statystycznego odbioru*

K. Wiśniewski podał teorię statystycznego odbioru produktów z uwzględnieniem błędów kontrolera. W jego pracy ogłoszonej w tym samym zeszycie Zastosowań Matematyki znajdujemy na stronicy 322 wzór oznaczony numerem (8), który pozwala oznaczyć charakterystykę planu badania. Wzór ten, dość skomplikowany (potrójna suma), dotyczy wąskiej klasy metod statystycznego odbioru, mianowicie tak zwanych alternatywnych planów pojedynczych.

W niniejszym artykule wyznaczymy charakterystykę w przypadku ogólniejszym. Mianowicie przyjmujemy słabe założenie, że gdy kontroler nie robi błędów, to prawdopodobieństwo P uznania partii za dobrą jest funkcjonałem tylko wadliwości w i reguły orzekania. Dla dowolnej, lecz ustalonej reguły, P jest funkcją w:

$$P = f(w). \tag{1}$$

Temu założeniu odpowiada wiele klasycznych planów statystycznego odbioru, pod warunkiem, że losowanie do próbki jest zwrotne lub — co na jedno wychodzi — że partia jest nieskończenie duża. A więc do rozważanej klasy należą między innymi alternatywne plany pojedyncze, wielostopniowe i sekwencyjne.

Błędy kontrolera ujmujemy zakładając, że prawdopodobieństwo uznania sztuki dobrej za dobrą jest p, a sztuki niedobrej za niedobrą jest q.

Dla ustalonej reguły, orzeczenia o partii (zgodna lub niezgodna z wymaganiami) zależą nie od rzeczywistej liczby niedobrych sztuk w próbce, ale od znalezionej, a więc nie od rzeczywistej wadliwości w, lecz od pozornej w_1, która wynosi

$$w_1 = wq + (1-p)(1-w),$$

czyli

$$w_1 = 1 - p + w(p+q-1). \tag{2}$$

Prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą jest więc

$$P_1 = f(w_1). \tag{3}$$

Poszukiwaną charakterystykę znajdujemy w postaci wyraźnej $P_1 = \varphi(w)$ rugując w_1 ze wzorów (2) i (3), co można zrobić różnymi sposobami.

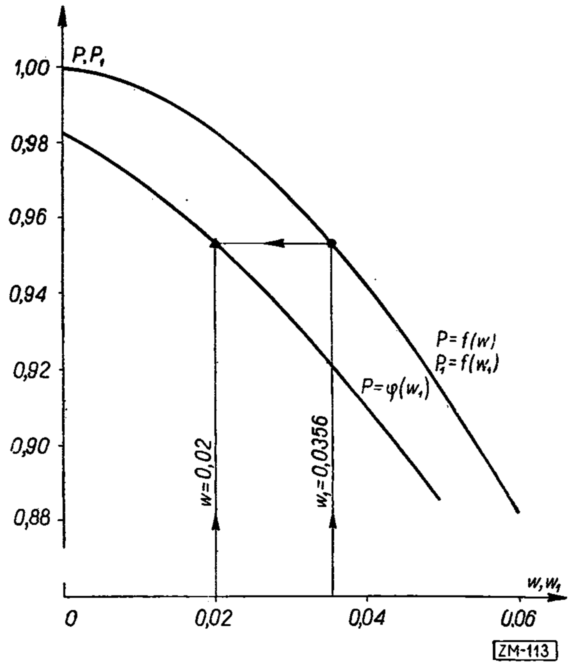
Przykład. Wykreślnie jest dana zależność $P = f(w)$, identyczna z $P_1 = f(w_1)$. Dane są $p = 0{,}98$, $q = 0{,}8$. Należy znaleźć charakterystykę z uwzględnieniem błędów kontrolera.

---

* Część napisana przez J. Oderfelda.

Zależność (2) przybiera postać $w_1 = 0{,}02 + 0{,}78w$, którą przedstawiamy tabelarycznie w kolumnach 1 i 2 tablicy 3.

Dla kolejnych wartości w_1 znajdujemy wykreślnie wartości P_1 i zapisujemy je w kolumnie 3 tablicy. Kolumny 1 i 3 stanowią poszukiwaną charakterystykę $P_1 = \varphi(w)$ z uwzględnieniem błędów kontrolera. Pokazano ją również na rysunku 3 podając wyznaczenie jednego punktu.



Rys. 3. Wyznaczanie charakterystyki. $P = f(w)$ jest charakterystyką bez uwzględnienia błędów kontrolera, $P = \varphi(w)$ — charakterystyką z uwzględnieniem błędów kontrolera

Dla porównania napisano w kolumnie 4 tablicy wartości P_1 znalezione przez K. Wiśniewskiego[1]) dla tego samego przykładu, który dotyczy alternatywnego pojedynczego planu badania o liczności próbki 10 i dozwolonej liczbie 1 sztuk niedobrych w próbce. Dla porządku notujemy drobną różnicę w założeniach: przyjęliśmy mianowicie nieskończoną wielkość partii, podczas gdy Wiśniewski przyjął ją za równą stu sztukom. W każdym razie różnice w wynikach są bez znaczenia.

Wydaje się, że opisana metoda jest dostatecznie prosta dla praktyków.

TABLICA 3

w	w_1	P_1 według wzorów (2) i (3)	P_1 według Wiśniewskiego
0	0,02	0,983	0,983
0,01	,0278	,971	,971
,02	,0356	,954	,956
,03	,0434	,934	,937
,04	,0512	,910	,914
,05	,0590	,885	,890

[1]) Zobacz niniejszy zeszyt Zastosowań Matematyki, str. 322.

Prace cytowane

[1] C. W. Kennedy, *An unconventional approach to statistical quality control*, The Machinist 20 (1950).

[2] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, New York and London 1950.

[3] P. S. Olmstead, *Note on theoretical and observed distributions of repetitive occurences*, The Annals of Mathematical Statistics 11 (1940), str. 363-366.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Część I wpłynęła dnia 10. 6. 1954 r.
Część II wpłynęła dnia 24. 4. 1954 r.

ЯН ОДЕРФЕЛЬД и К. ВИСЬНЕВСКИЙ (Варшава)

ВЫБОРОЧНО-ПРИЕМОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ С УЧЕТОМ ОШИБОК КОНТРОЛЕРА

РЕЗЮМЕ

I. ОБ ОШИБКЕ ПРИ КОНТРОЛЕ ПОШТУЧНЫХ ТОВАРОВ *

Примем обозначения:

p — вероятность того, что годная штука будет признана годной;

q — вероятность того, что негодная штука будет признана негодной.

Опыт показывает, что в промышленной практике $p<1$ и $q<1$ и, кроме того, что даже многократная сортировка не дает возможности вполне исключить все негодные штуки.

Число исследований ведущих к тому, что негодная штука товара признается таковой впервые, подлежит закону геометрического распределения. В статье показана достаточная согласованность этого утверждения с данными опыта. Далее, выведены точные формулы на сплошное стопроцентное исследование с учетом ошибок контролера при двух вариантах существующих торговых правил. В статье показано также, что в некоторых случаях правила выборочно-приемочного контроля приводят к меньшему числу ошибочных решений относительно отдельных штук, чем правила стопроцентного исследования.

II. ВЛИЯНИЕ ОШИБОК КОНТРОЛЕРА НА ХАРАКТЕРИСТИКУ ВЫБОРОЧНО-ПРИЕМОЧНОГО КОНТРОЛЯ **

Контролер статистического качества может ошибаться при квалифицировании проверяемых им штук. Обозначим через p и q вероятности признания годной штуки — годной, а негодной штуки — негодной.

Пусть, согласно некоторому определенному правилу контроля, вероятность P признания партии годной зависит исключительно от доли брака w и от чисел p и q.

---

* Написал К. Висьневский.

** Написал Ян Одерфельд.

При этих слабых условиях дается простой метод, позволяющий определить характеристику нлана квалифицирования.

J. ODERFELD and K. WIŚNIEWSKI (Warszawa)

SAMPLING IN CONTROL OF QUALITY TAKING ACCOUNT OF ERRORS MADE BY THE INSPECTORS

SUMMARY

I. Errors in control by attributes *

Let us denote by

p — the probability of classifying a good piece as good,

q — the probability of classifying a defective piece as defective.

Experience shows that in industrial practice $p<1$ and $q<1$, and that even repeated screening does not make it possible to eliminate all defective pieces.

The number of inspections after which a defective piece is classified as defective has a geometrical distribution. The paper shows that this statement is well in accordance with experience. Exact formulae of the operating characteristic curve are deduced, account being taken of the errors of the inspector within two variants of the existing trade regulations. It is also shown that in some cases sampling inspection gives rise to fewer erroneous pronouncements concerning individual pieces than a $100^0/_0$ inspection.

II. The effect of the inspector's error upon the operating characteristics in sampling inspection **

A statistical quality inspector may make errors in classifying the inspected pieces. Let us denote by p and q the probabilities of classifying a good piece as good and a defective piece as defective respectively. With a certain rule of procedure, let the probability P of classifying a lot as being good depend only on the percent defective w and on p and q. With these weak assumptions a simple method of determining the operating characteristic curve is given.

---

* Written by K. Wiśniewski.

** Written by J. Oderfeld.