

J. MIKUŚ (Wrocław)

ANGENÄHERTE SCHWINGUNGSFREQUENZFORMELN FÜR KONSERVATIVE SYSTEME (4)

1. Einleitung. Gegeben sei eine ungerade Funktion $f(x)$ die intervalweise im Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ stetig ist. ε sei ein kleines Parameter. Wir wollen Schwingungen eines konservativen Systems betrachten, die der Differentialgleichung

$$(1.1) \quad \ddot{x} + \operatorname{sgn} x + \varepsilon f(x) = 0$$

genügen und die das Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ durchlaufen. Für genügend kleine Werte von ε existieren solche Schwingungen; die Schwingungsperiode beträgt dabei

$$(1.2) \quad T = 2\sqrt{2} \int_0^1 \{G(1) - G(x)\}^{-1/2} dx,$$

wobei die Bezeichnung

$$(1.3) \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x + \varepsilon f(x)$$

angenommen wurde. Durch $\omega = 2\pi/T$ bezeichnen wir im Weiteren die entsprechende Schwingungskreisfrequenz.

In [4], [5] wurde eine Reihe von angenäherten Methoden zur Berechnung von T und ω angegeben, die besonders für quasilineare Charakteristiken der Gestalt $g(x) = x + \varepsilon f(x)$ wirksam sind. Diese Methoden geben leider, im Falle einer Charakteristik der Gestalt (1.3), keine befriedigende numerische Effekte. In der vorliegenden Arbeit geben wir einige angenäherte Formeln für die Größe ω an, die der Quasiumschaltungscharakteristik (1.3) besonders gut entsprechen. Die Anwendung dieser Formeln werden wir im Falle einer Gleichung durchführen, die die Beugung eines elastischen Stabes beschreibt.

2. Ein Minimalprinzip für ω . Q sei eine Klasse von meßbaren und nichtnegativen Funktionen $q = q(x)$, die für $x \in J = (-1, +1)$ bestimmt sind und die der Bedingung $\int_J q(x) dx = 1$ genügen. Weiter, sei $v = v(x)$ eine

in J meßbare und positive Funktion, die der Bedingung $0 < \int_J v^{-1}(x) dx < \infty$ genügt. In [3] wurde gezeigt, daß

$$(2.1) \quad \left(\int_J \frac{dx}{v(x)} \right)^{-2} = \min_{q \in Q} S[v^2, q],$$

wobei das Funktional S durch die Formel

$$(2.2) \quad S[\varphi, \psi] = \int_J \varphi(x) \psi^3(x) dx$$

definiert ist⁽¹⁾. Nehmen wir jetzt

$$(2.3) \quad v(x) = \sqrt{2} \sqrt{G(1) - G(x)}$$

an, wo G durch die Formeln (1.3) definiert wurde, so erhalten wir, gemäß (2.1) und (2.2), die prinzipielle Gleichheit

$$(2.4) \quad \omega^2 = 2\pi^2 \min_{q \in Q} \int_J [G(1) - G(x)] q^3(x) dx.$$

Das Minimum der rechten Seite in der letzten Gleichheit wurde ausschließlich für die Funktion $q(x) = 2T^{-1}v^{-1}(x)$ erhalten (s. [3]). Aus (2.4) folgern verschiedene angenäherte Formeln der Größe ω .

Ist $\varepsilon = 0$, d.h. wenn $g(x) = \operatorname{sgn} x$ ist, so erreicht die rechte Seite in (2.4) für $q(x) = q_0(x) \equiv \frac{1}{4}(1 - |x|)^{-1/2}$ sein Minimum. Mit Hilfe dieser Funktion können wir unter Hinzunahme von (2.4), eine sehr einfache Annäherung von ω , für den Fall $\varepsilon \neq 0$, erhalten, und zwar $\omega^2 \approx 4\pi^2 S[v^2, q_0]$, d.h.

$$(2.5) \quad \omega^2 \approx \frac{\pi^2}{32} \int \frac{G(1) - G(x)}{(1 - |x|)^{3/2}} dx.$$

Natürlich ist das eine Annäherung von oben. Man kann zeigen, daß der Fehler dieser Annäherung nach Null zugleich mit ε^2 strebt, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$. Wir erhalten jetzt aus (2.4) eine bessere Annäherung, wenn wir

$$q(x) = c_1(1 - |x|)^{-1/2} + c_2(1 - |x|)^{1/2}$$

annehmen und das Minimum der rechten Seite (2.4) bezüglich c_1, c_2 unter Hinzunahme der Bedingung $q \in Q$ berechnen. Aus der Bedingung $q \in Q$ geht hervor, daß die Funktion q folgender Gestalt ist:

$$(2.6) \quad q_\mu(x) = \left\{ 1 + \mu \left(1 - \frac{3}{2} |x| \right) \right\} q_0(x), \quad \text{wo } \mu \in (-1, +2).$$

⁽¹⁾ In [3] wurden unwesentlich stärkere Voraussetzungen der Funktionen q, v angenommen.

Auf diese Weise bekommen wir die Annäherung $\omega \approx \omega_{ap}$, wobei die Größe $\omega_{ap} > 0$ durch die Formel $\omega_{ap}^2 = 4\pi^2 \min_{-1 \leq \mu \leq 2} S[\nu^2, q_\mu]$ gegeben ist, d.h.

$$(2.7) \quad \omega_{ap}^2 = 2\pi^2 \min_{-1 \leq \mu \leq 2} \int_J \{G(1) - G(x)\} q_\mu^3(x) dx.$$

Die Annäherung $\omega \approx \omega_{ap}$ ist gleichfalls eine Annäherung von oben und liefert im allgemeinen Falle eine bessere und gewiss nicht schlechtere Annäherung als (2.5), die der Annäherung (2.6) für $\mu = 0$ entspricht.

3. Anwendung der Annäherung $\omega \approx \omega_{ap}$. Die Anwendung der Formel (2.7) kann man in folgender Weise durchführen. Gegeben sei eine ungerade Charakteristik $g(x)$. Für diese Charakteristik können wir die folgende Entwicklung nach Jacobi finden

$$(3.1) \quad 2 \frac{G(1) - G(x)}{1 - x} = \gamma_0 G_0\left(\frac{1}{2}, 1; x\right) + \gamma_1 G_1\left(\frac{1}{2}, 1; x\right) + \dots,$$

wo $G_i(p, q; x)$ Polynomen von Jacobi mit dem Gewicht $1/\sqrt{1-x}$ im Intervall (0,1) bedeuten (s. [3]). Folglich berechnen wir die Koeffizienten der Entwicklung

$$(3.2) \quad \left[1 + \mu \left(1 - \frac{3}{2}x\right)\right]^3 = \alpha_0 G_0\left(\frac{1}{2}, 1; x\right) + \dots + \alpha_3 G_3\left(\frac{1}{2}, 1; x\right),$$

woraus nach kurzer Rechnung

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= 1 + \frac{3}{5}\mu^2 + \frac{2}{35}\mu^3, & \alpha_1 &= 3\mu + \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{7}\mu^3, \\ \alpha_2 &= \frac{54}{35}\mu^2 + \frac{108}{385}\mu^3, & \alpha_3 &= \frac{18}{77}\mu^3 \end{aligned}$$

folgt. Aus (2.7), (3.1) und (3.2) folgt jetzt

$$(3.4) \quad \omega_{ap}^2 = \frac{\pi^2}{32} \min_{-1 \leq \mu \leq 2} S(\mu),$$

wo das Polynom $S(\mu)$ durch die Formel

$$S(\mu) = 2\alpha_0\gamma_0 + \frac{2}{5}\alpha_1\gamma_1 + \frac{2}{9}\alpha_2\gamma_2 + \frac{2}{13}\alpha_3\gamma_3$$

definiert ist. Mit Hilfe von (3.3) bekommen wir schließlich

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S(\mu) &= \left\{ \frac{4}{35}\gamma_0 + \frac{6}{35}\gamma_1 + \frac{24}{385}\gamma_2 + \frac{36}{1001}\gamma_3 \right\} \times \\ &\quad \times \mu^3 + \left\{ \frac{6}{5}\gamma_0 + \frac{12}{35}\gamma_1 + \frac{12}{35}\gamma_2 \right\} \mu^2 + \frac{6}{5}\gamma_1\mu + 2\gamma_0. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichheit ist ein Polynom dritten Grades, deshalb ist das Problem des Minimum im Intervall $\langle -1, +2 \rangle$ leicht zu lösen. Man kann zeigen, daß das Polynom $S(\mu)$, für hinreichend kleine Werte des Parameters ε , im Intervall $(-1, +2)$ genau ein Minimum besitzt. Man findet es mit Hilfe der Gleichung $S'(\mu) = 0$, also mit Hilfe einer Quadratgleichung deren Koeffizienten bekannte Größen sind. Diese Gleichung ist

$$(3.6) \quad \left\{ \frac{12}{35} \gamma_0 + \frac{18}{35} \gamma_1 + \frac{72}{385} \gamma_2 + \frac{108}{1001} \gamma_3 \right\} \times \\ \times \mu^2 + \left\{ \frac{12}{5} \gamma_0 + \frac{24}{35} \gamma_1 + \frac{24}{35} \gamma_2 \right\} \mu + \frac{6}{5} \gamma_1 = 0.$$

Sei μ_0 die Wurzel der Gleichung (3.6), die dem Intervall $(-1, +2)$ angehört. Die Formel (3.4) nimmt also die Gestalt

$$\omega_{\text{ap}}^2 = \frac{\pi^2}{32} S(\mu_0)$$

an; daraus folgt unmittelbar die angenäherte Formel

$$(3.7) \quad \omega^2 \approx \frac{\pi^2}{32} S(\mu_0).$$

Aus dieser angenäherten Formel wollen wir im weiteren Nutzen machen. Es ist klar, daß man bei Anwendungen der letzten Gleichung stets die nach der Berechnung angenommenen Voraussetzungen nachprüfen muß.

4. Über ein gewisses Integral aus der Theorie des elastischen Stabes.

Als Beispiel zur Anwendung der Formel (3.7) wollen wir eine angenäherte Formel für das Berechnen eines elliptischen Integrals angeben, welches in der Theorie des elastischen Stabes vorkommt. Darum betrachten wir einen elastischen Stab, dessen ein Ende befestigt ist, aber das zweite

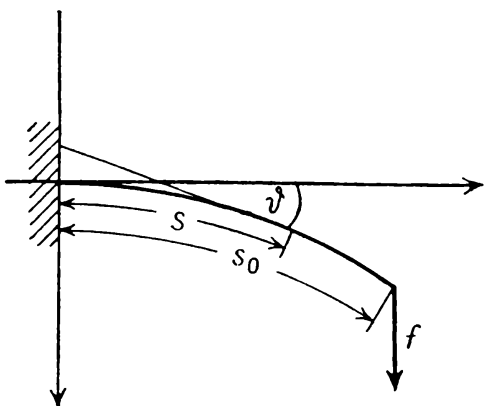


Abb. 1

mit einer zur nichtdeformierten Stabachse senkrechten Kraft belastet wurde (s. Abb. 1). Die Gestalt des Stabes wird durch die Gleichung

$$(4.1) \quad IE \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + f \cos \vartheta = 0$$

beschrieben, mit den Bedingungen

$$(4.2) \quad \vartheta(0) = 0, \quad \left. \frac{d\vartheta}{ds} \right|_{s=s_0} = 0.$$

In der Gleichung (4.1) ist $\vartheta(s)$ eine unbekannte, im Intervall $\langle 0, s_0 \rangle$ definierte Funktion und die Größen I, E, f bedeuten bekannte Parameter (s. [2]). Führen wir jetzt eine neue nulldimensionale Variable $l = (f/EI)^{1/2}s$ ein, so gehen die Gleichungen (4.1) und (4.2) in

$$(4.3) \quad \vartheta'' + \cos \vartheta = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta'(l_0) = 0$$

über. In diesen Gleichungen bedeutet ein Strich die Differentiation nach l , und das Parameter $l_0 = (f/EI)^{1/2}s_0$ bedeutet die nulldimensionale Länge des Stabes. Die nächste Parametertransformation, die durch die Formel

$$y(t) = \frac{\sin \vartheta(l)}{\sin \vartheta(l_0)}, \quad t = \frac{l}{\sqrt{\sin \vartheta_0}}$$

bestimmt wird, läßt (4.3) folgendermaßen schreiben

$$(4.4) \quad \ddot{y} + 1 + \varepsilon(2y - 3y^2) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0,$$

wo $\varepsilon = \sin^2 \vartheta_0$, $\vartheta_0 = \vartheta(l_0)$, $t_0 = l_0/\sqrt{\sin \vartheta_0}$, und der Punkt die Differentiation nach dem Parameter t , $0 \leq t \leq t_0$, bedeutet.

Es ist nun zu ersehen, daß die Funktion $y = y(t)$, welche die Randwertaufgabe (4.4) löst, gewisse Schwingungen der Schwingungssystem von der Art (1.1) beschreibt. Man soll nun in (1.1) $f(x) = (2|x| + 3x^2)\operatorname{sgn} x$ annehmen, und die Schwingungsamplitude $y(t_0) = 1$ zustellen. Dementsprechend hat man dann $T = 4t_0$ und $\omega = \pi/2t_0$. Die Formel (3.7) nimmt jetzt die Gestalt

$$(4.5) \quad t_0^{-2} \approx \frac{1}{8}S(\mu_0)$$

an, und ergibt die gewünschte angenäherte Beziehung zwischen den Parametern t_0 und ε . Im nächsten Punkte finden wir eine entwickelte Gestalt der Größe $S(\mu_0)$, dort auch wird die angenäherte Formel (4.5) mit der exakten Beziehung zwischen den Parametern t_0 und ε verglichen.

5. Numerisches Beispiel. Zunächst müssen wir die Entwicklung (3.1) für die Charakteristik $g(y) = 1 + \varepsilon(2|y| - 3y^2)$ berechnen, die die Form

$$(5.1) \quad \frac{v^2(y)}{1-y} = 2t_0^2 \left\{ \left(1 - \frac{8}{15}\varepsilon\right) G_0\left(\frac{1}{2}, 1; y\right) + \frac{16}{21}\varepsilon G_1\left(\frac{1}{2}, 1; y\right) - \frac{8}{35}\varepsilon G_2\left(\frac{1}{2}, 1; y\right) \right\}$$

annimmt. Die Koeffizienten γ_i sind von der Gestalt

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= 2t_0^2 \left(1 - \frac{8}{15}\varepsilon\right), & \gamma_1 &= \frac{16}{21}t_0^2\varepsilon, \\ \gamma_2 &= -\frac{16}{35}t_0^2\varepsilon, & \gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Folglich, gemäß (3.5), nimmt das Polynom $S(\mu)$ die Gestalt

$$(5.3) \quad S(\mu) = \frac{t_0^2}{2} w(\mu)$$

an, wobei

$$w(\mu) = \frac{16}{35} \left(1 + \frac{16}{35} \varepsilon\right) \mu^3 + \frac{24}{5} \left(1 - \frac{8}{21} \varepsilon\right) \mu^2 + \frac{128}{35} \varepsilon \mu + 8 \left(1 - \frac{8}{15} \varepsilon\right)$$

angenommen wurde. Für genügend kleine Werte des Parameters ε hat das Polynom $w(\mu)$ im Intervall $(-1, +2)$ genau ein Minimum. In der Tat, für den Wert $\varepsilon = 0$ bestehen die Beziehungen

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} \Big|_{\mu=-1} < 0 < \frac{\partial w}{\partial \mu} \Big|_{\mu=2},$$

die auch für genügend kleine Werte ε aufrecht erhalten bleiben. Im Intervall $(-1, +2)$ existiert also wenigstens ein Minimum. Es ist aber ein einziges Minimum, denn man hat $w'' > 0$ im erwähnten Intervall. Schließlich ergibt sich gemäß (1.2), (3.7), (4.5) und (5.3) die angenäherte Beziehung zwischen t_0 und ε ,

$$(5.4) \quad t_0^4 \approx \frac{16}{w(\mu_0)},$$

wo μ_0 die Wurzel der Gleichung $dw/d\mu = 0$ bedeutet, also

$$(5.5) \quad \left(1 + \frac{16}{33} \varepsilon\right) \mu_0^2 + \left(7 - \frac{8}{3} \varepsilon\right) \mu_0 + \frac{8}{3} \varepsilon = 0.$$

Die angenäherte Formel (5.4) wollen wir jetzt mit der exakten Beziehung

$$(5.6) \quad t_0^2 = \varepsilon^{-1/4} F \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}}; \sqrt{\frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{2}} \right)$$

vergleichen, wo $F(\cdot, \cdot)$ das unvollständige elliptische Integral erster Gattung bedeutet. Während der Berechnung ist es bequem die entwickelte Form

$$(5.7) \quad t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon^{1/4} \left\{ 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} B\left(\frac{1}{2}; 2k+1\right) \varepsilon^k \right\}$$

zu benutzen. Die Größe $B(a, b)$ bedeutet hier das Eulersche Integral erster Art ([1], S. 644). In Tafel 1 geben wir manche numerische Ergebnisse, welche aus (4.4), (5.4), (5.5) und (5.7) folgen. Man soll die Beziehung $\varepsilon = \sin^2 \vartheta_0$ beachten.

TAFEL 1

ϑ_0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$t_0 =$	0.448	0.637	0.788	0.922	1.049	1.174	1.303	1.440	1.589	1.757
$t_0 \approx$	0.448	0.637	0.787	0.921	1.047	1.169	1.292	1.416	1.542	1.669

Literaturverzeichnis

- [1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Band 2, S. 644, Warszawa 1964.
- [2] A. Krzywicki and A. Rybarski, *On a linearization of an equation of an elastic rod (I)*, Zastosow. Matem. 6 (1962), S. 321-332, (II), Zastosow. Matem. 7 (1964), S. 383-390.
- [3] A. Rybarski, *A minimum principle in the theory of conservative systems*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math. et phys., 12 (1964), S. 21-24.
- [4] — *Angenäherte Schwingungsfrequenzformeln für konservative Systeme (1)*, Zastosow. Matem. 7 (1964), S. 235-253, (2), Zastosow. Matem. 7 (1964), S. 255-269.
- [5] J. Mikuś und A. Rybarski, *Angenäherte Schwingungsfrequenzformeln für konservative Systeme (3)*, Zastosow. Matem. 9 (1967), S. 173-186.
- [6] I. M. Rzyżyk i I. S. Gradsztejn, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, Warszawa 1964.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE HOCHSCHULE WROCLAW

Eingegangen am 15. 11. 1968

J. MIKUŚ (Wrocław)

**PRZYBLIŻONE WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ
UKŁADÓW ZACHOWAWCZYCH (4)**

STRESZCZENIE

W pracy podaje się pewne przybliżone wzory dla częstości drgań układów konserwatywnych, dopasowane specjalnie do przypadku charakterystyki quasi-przełącznikowej. Wzory te otrzymuje się nową metodą, stosując znalezioną niedawno zasadę minimum. Jako ilustrację rozpatrzono w pracy pewne całki eliptyczne, występujące w teorii pręta sprężystego.

Й. МИКУСЬ (Вроцлав)

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ
КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ (4)**

РЕЗЮМЕ

В работе приводятся некоторые приближенные формулы для частоты колебаний консервативных систем, соответствующие случаю квазипереключательной характеристики. Эти формулы получены с помощью недавно найденного принципа минимума. В качестве иллюстрации рассматриваются некоторые эллиптические интегралы, выступающие в теории упругого стержня.

J. MIKUŚ (Wrocław)

**APPROXIMATE DETERMINATION OF VIBRATION
FREQUENCY IN CONSERVATIVE SYSTEMS (4)**

SUMMARY

The paper contains certain approximate formulae for the frequency of oscillation of conservative systems, adapted especially to the case of quasi-switch characteristics. The formulae have been derived in a new way using the recently found principle of minimum. Some elliptic integrals being important in the theory of the elastic rod have been considered as an illustration.