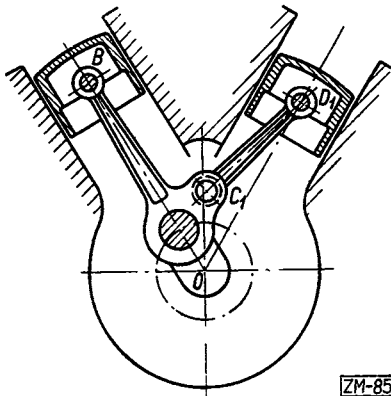


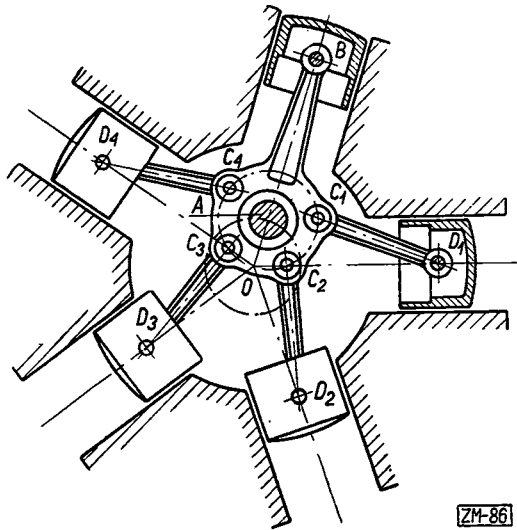
M. WARMUS (Wrocław)

*O PEWNEJ METODZIE NUMERYCZNO-GRAFICZNEJ,
ZILUSTROWANEJ PRZYKŁADEM Z KINEMATYKI
SILNIKÓW W UKŁADZIE \vee I GWIAZDOWYCH*

Wiele zagadnień technicznych sprowadza się do takiego układu równań elementarnych (algebraicznych, trygonometrycznych itp.), że — mimo elementarnego charakteru samych równań — rozwiązanie układu jest połączone z dużymi trudnościami numerycznymi. W takich przypadkach często szuka się niewiadomych funkcji lub ich wartości w postaci szeregów potęgowych czy trygonometrycznych, z których bierze się dwa lub trzy pierwsze wyrazy, a ponieważ ocena błędu, czy też dowód zbieżności szeregu są zazwyczaj uciążliwe, to po prostu się je opuszcza. Łatwo podać przykłady, w których takie niedozwolone uproszczenia prowadzą do zupełnie błędnych wyników.



Rys. 1. Układ korbowy \vee



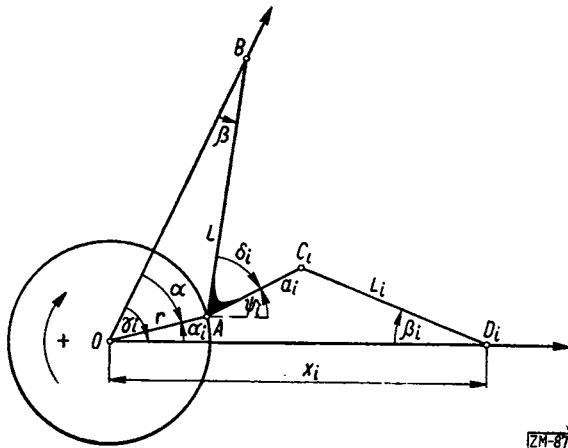
Rys. 2. Układ korbowy gwiazdowy

Niniejsza praca jest przykładem pokonywania trudności numerycznych w rozwiązywaniu pewnego układu równań. Głównym jej celem jest pokazanie pewnej metody numeryczno-graficznej na konkretnym przy-

kładzie technicznym. Nie jest natomiast jej celem załatwienie wszystkich trudności kinematycznych, na jakie natrafiają konstruktorzy silników lotniczych i samochodowych. Mimo to, metody opisane w niniejszej pracy mogą być dla tych konstruktorów pożyteczne w pewnych etapach ich obliczeń. Zagadnienie techniczne rozwiązywane w tej pracy pozwala przedstawić na przykładzie metodę, która może znaleźć zastosowanie i w innych zagadnieniach.

W silnikach w układzie ∇ i gwiazdowych stosuje się układy korbowe przedstawione na rysunkach 1 i 2.

Bezpośrednio z korbą OA jest połączony tylko korbowód główny AB , korbowody boczne $C_i D_i$ ($i=1, 2, \dots$) są połączone z korbowodem głównym sworzniami C_i . Schemat takiego układu jest na rysunku 3.



Rys. 3. Schemat układu korbowego z korbowodem bocznym

Oś OB jest osią cylindra głównego, oś OD_i osią cylindra i -tego, OA jest korbą wału głównego, AB korbowodem głównym, z którym odcinek AC_i jest związany sztywno, $C_i D_i$ jest korbowodem i -tym. Litera r oznacza długość korby OA , L i L_i — długości korbowodów AB i $C_i D_i$, a_i — długość odcinka AC_i , x_i — współrzędną sworzni D_i , którym korbowód łączy $C_i D_i$ się z tłokiem i -tego cylindra; a oznacza kąt, który korba OA tworzy z osią OB cylindra głównego, a_i — kąt, który korba OA tworzy z osią OD_i cylindra i -tego, β — kąt, który korbowód główny AB tworzy z osią OB cylindra głównego, β_i — kąt, który korbowód $C_i D_i$ tworzy z osią OD_i cylindra i -tego, γ_i — kąt, który oś OD_i cylindra i -tego tworzy z osią OB cylindra głównego, δ_i — kąt, który odcinek AC_i tworzy z korbowodem głównym AB , wreszcie ψ_i — kąt, który odcinek AC_i tworzy z kierunkiem osi OD_i cylindra i -tego. Wszystkie kąty są zorientowane, zwrot dodatni przyjęto jak na rysunku 3.

Z rysunku 3 odczytujemy z łatwością następujące związki:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= r \cos \alpha_i + a_i \cos \psi_i + L_i \cos \beta_i, & \alpha_i &= \alpha - \gamma_i, & \psi_i &= \beta - \gamma_i + \delta_i, \\ L_i \sin \beta_i &= -r \sin \alpha_i - a_i \sin \psi_i, & L \sin \beta &= -r \sin \alpha. \end{aligned}$$

Przez wprowadzenie nowych wielkości

$$(2) \quad \xi_i = \frac{x_i}{L_i}, \quad \lambda_i = \frac{r}{L_i}, \quad \lambda = \frac{r}{L}, \quad \eta_i = \frac{a_i}{L_i}, \quad \varphi_i = \gamma_i - \delta_i$$

zastępujemy układ (1) przez następujący układ równań:

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi_i &= \lambda_i \cos \alpha_i + \eta_i \cos \psi_i + \cos \beta_i, & \alpha_i &= \alpha - \gamma_i, & \psi_i &= \beta - \varphi_i, \\ \sin \beta_i &= -\lambda_i \sin \alpha_i - \eta_i \sin \psi_i, & \sin \beta &= -\lambda \sin \alpha. \end{aligned}$$

Stąd można obliczyć ξ_i jako funkcję kąta α :

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi_i = f_i(\alpha) &= \lambda_i \cos \gamma_i \cos \alpha + (\lambda_i \sin \gamma_i - \lambda \eta_i \sin \varphi_i) \sin \alpha + \\ &+ \eta_i \cos \varphi_i \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - M^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$M = \lambda_i \sin \gamma_i \cos \alpha + (\lambda \eta_i \cos \varphi_i - \lambda_i \cos \gamma_i) \sin \alpha + \eta_i \sin \varphi_i \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha},$$

albo jako funkcję kąta α_i :

$$(5) \quad \begin{aligned} \xi_i = F_i(\alpha_i) &= (\lambda_i - \lambda \eta_i \sin \varphi_i \sin \gamma_i) \cos \alpha_i - \lambda \eta_i \sin \varphi_i \cos \gamma_i \sin \alpha_i + \\ &+ \eta_i \cos \varphi_i \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\alpha_i + \gamma_i)} + \sqrt{1 - N^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$N = \lambda \eta_i \cos \varphi_i \sin \gamma_i \cos \alpha_i + (\lambda \eta_i \cos \gamma_i \cos \varphi_i - \lambda_i) \sin \alpha_i + \eta_i \sin \varphi_i \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\alpha_i + \gamma_i)}.$$

Dla uproszczenia obliczeń zakłada się zazwyczaj $\varphi_i = 0$ i rozwija funkcję $\xi_i = f_i(\alpha)$ albo $\xi_i = F_i(\alpha_i)$ w szereg potęgowy lub trygonometryczny, zachowując jedynie pierwsze trzy wyrazy¹⁾. Przy tych obliczeniach nie szacuje się reszty, a więc nawet nie wiadomo, z jaką dokładnością oblicza się szukane wielkości. Założenie $\varphi_i = 0$, nie zawsze zresztą robione, kępuje konstruktorów, przyznać jednak trzeba, że przyjęcie $\varphi_i \neq 0$ bardzo utrudnia obliczenia. Rozwinięcie funkcji $f_i(\alpha)$ danej wzorem (4) lub funkcji $F_i(\alpha_i)$ danej wzorem (5) w szereg potęgowy lub trygonometryczny jest bardzo żmudne i daje długie i skomplikowane wyrażenia na współczynniki. Jeśli nawet ograniczyć się tylko do trzech pierwszych wyrazów szeregu, to już otrzymuje się wzory długie i zawile.

¹⁾ Por. C. B. Biezeno und R. Grammel, *Technische Dynamik*, Berlin 1939, str. 889.

Jednym z ważniejszych zagadnień, jakie napotyka konstruktor w obliczeniach silnika w układzie V lub gwiazdowego, jest wyznaczenie położenia punktów zwrotnych i skoku tłoka w każdym cylindrze. W opisywanym układzie korbowym obliczenie położenia punktów zwrotnych i skoku tłoka dla cylindra głównego nie przedstawia żadnych trudności. Analogiczne obliczenie dla cylindrów bocznych jest znacznie trudniejsze.

W dalszym ciągu podano nową metodę obliczenia położenia punktów zwrotnych dla cylindrów bocznych z dowolną dokładnością, bez założenia, że $\varphi_i = 0$.

Punkty zwrotne $\xi_{i\max}$ i $\xi_{i\min}$ (pierwszy z nich nazywać będziemy *górnym*, a drugi *dolnym punktem zwrotnym*) można obliczyć z układu (3) po dołączeniu doń warunku

$$\frac{d\xi_i}{da} = \frac{d\xi_i}{da_i} = 0.$$

Warunek ten po obliczeniu pochodnej $d\xi_i/da$ z równań (3) i po uporzędkowaniu daje się ująć w postać

$$\lambda_i \cos \beta \sin(\alpha_i - \beta_i) - \lambda \eta_i \cos a \sin(\psi_i - \beta_i) = 0,$$

co po wprowadzeniu nowego symbolu $\eta_i = \lambda \eta_i / \lambda_i = a_i / L$ przechodzi w

$$(6) \quad \sin(\alpha_i - \beta_i) = \frac{\bar{\eta}_i}{\cos \beta} \cos a \sin(\psi_i - \beta_i) \quad (\cos \beta \neq 0).$$

W celu wyznaczenia zatem punktów zwrotnych, należy rozwiązać układ równań

$$(7) \quad a = \alpha_i + \gamma_i, \quad \sin \beta = -\lambda \sin a, \quad \psi_i = \beta - \varphi_i,$$

$$\sin \beta_i = -\lambda_i \sin \alpha_i - \eta_i \sin \psi_i, \quad \sin(\alpha_i - \beta_i) = \frac{\bar{\eta}_i}{\cos \beta} \cos a \sin(\psi_i - \beta_i),$$

gdzie λ , λ_i , η_i , $\bar{\eta}_i$, γ_i , φ_i są dane, a a , α_i , β , β_i , ψ_i szukane, i podstawić otrzymane wartości α_i , β_i i ψ_i do pierwszego równania (3). Ponieważ warunek (6) jest warunkiem koniecznym, ale mógłby być warunkiem niewystarczającym do istnienia ekstremum funkcji $\xi_i = f_i(a)$ czy funkcji $\xi_i = F_i(\alpha_i)$, więc należy sprawdzić, czy uzyskane rozwiązania układu (7) są rzeczywiście wartościami parametrów w punktach zwrotnych.

Metoda przeze mnie proponowana jest metodą iteracyjną. W pierwszym równaniu (7) podstawiam za a wartość przybliżoną tego parametru (za pierwsze przybliżenie można na przykład przyjąć $\alpha_i = 0$ dla górnego punktu zwrotnego, a $\alpha_i = 180^\circ$ dla dolnego punktu zwrotnego) i obliczam a . Z następujących równań obliczam kolejno β , ψ_i i β_i . Wreszcie

z ostatniego równania obliczam α_i , przyjmując za α , β , β_i , ψ_i wartości z poprzednich równań. Uzyskaną wartość α_i przyjmuję za wyjściowe przybliżenie w następnym cyklu iteracyjnym: wstawiam ją do pierwszego równania (7), obliczam stąd α , z następnych równań obliczam nowe wartości β , ψ_i i β_i , a z ostatniego nową wartość α_i , którą znowu przyjmuję za wyjściową do dalszej iteracji itd. Jeżeli się udowodni, że takie postępowanie iteracyjne jest zbieżne, to można je przerwać, gdy się dojdzie do wartości parametrów dostatecznie bliskich wartościom granicznym tychże parametrów. Jeżeli zbieżność iteracji jest szybka, to postępowanie iteracyjne kończymy, gdy różnica między dwiema kolejnymi wartościami parametru α_i staje się mniejsza od żądanej dokładności.

Zanim podam przykład obliczenia położenia punktów zwrotnych, omówię ważną sprawę zbieżności opisanego procesu iteracyjnego i udowodnię, że proces ten istotnie daje położenia punktów zwrotnych. Zacznę od wstępnych oszacowań. Niech będzie — jak zazwyczaj —

$$\begin{aligned} 0,222 < \lambda < 0,323, & \quad 0,200 < \eta_i < 0,620, & \quad -8^\circ \leq \varphi_i \leq 0^\circ. \\ 0,250 < \lambda_i < 0,477, & \quad 0,177 < \eta_i < 0,420, & \end{aligned}$$

Z drugiego równania układu (7) mamy

$$|\sin \beta| \leq \lambda < 0,323,$$

skąd

$$|\beta| < 18^\circ 50' 40''.$$

Zatem z trzeciego równania (7) wynika

$$-18^\circ 50' 40'' < \psi_i < 26^\circ 50' 40'', \quad -0,27998 < -\eta_i \sin \psi_i < 0,20026.$$

Stąd na podstawie czwartego równania z układu (7) wynika

$$-0,75698 = -0,27998 - 0,477 < \sin \beta_i < 0,20026 + 0,477 = 0,67726,$$

czyli

$$-49^\circ 12' 00'' < \beta_i < 42^\circ 37' 50'',$$

a stąd

$$|\psi_i - \beta_i| < 76^\circ 02' 40''.$$

Ponieważ $\cos \beta > \cos 18^\circ 50' 40'' > 0,94639$, więc z ostatniego równania (7) otrzymujemy

$$|\sin(\alpha_i - \beta_i)| < \frac{0,420}{0,94639} \sin 76^\circ 02' 40'' < 0,43070,$$

czyli

$$|\alpha_i - \beta_i| < 25^\circ 30' 50'' \quad \text{lub} \quad |\alpha_i - 180^\circ - \beta_i| < 25^\circ 30' 50''.$$

Z tej nierówności i poprzednio uzyskanego oszacowania dla β_i otrzymujemy

$$-74^{\circ}42'50'' < \alpha_i < 68^{\circ}08'40'' \quad \text{lub} \quad 105^{\circ}17'10'' < \alpha_i < 248^{\circ}08'40''.$$

Pierwsza z tych nierówności odpowiada górnemu a druga dolnemu punktowi zwrotnemu.

Uzyskane powyżej oszacowania można jeszcze znacznie poprawić. Ze względu na symetrię silników gwiazdowych można założyć, że $40^{\circ} \leq \gamma_i \leq 160^{\circ}$. Załóżmy teraz na przykład, że

$$-74^{\circ}42'50'' < \alpha_i \leq -40^{\circ}00'00''.$$

Wtedy

$$-34^{\circ}42'50'' < \alpha \leq 120^{\circ}00'00''$$

według pierwszego równania. Z drugiego równania otrzymujemy

$$-18^{\circ}50'40'' < \beta < 10^{\circ}36'00'',$$

a z trzeciego

$$-18^{\circ}50'40'' < \psi_i < 18^{\circ}36'00''.$$

Obliczamy następnie z czwartego równania układu (7), że

$$-2^{\circ}07'30'' < \beta_i < 41^{\circ}19'50'',$$

a z ostatniego równania, że

$$-22^{\circ}38'50'' < \alpha_i - \beta_i < 11^{\circ}06'00'' \quad \text{lub} \quad 168^{\circ}54'00'' < \alpha_i - \beta_i < 202^{\circ}38'50''.$$

Z ostatnich trzech nierówności wynika, że

$$-24^{\circ}46'20'' < \alpha_i < 52^{\circ}25'50'' \quad \text{lub} \quad 166^{\circ}46'30'' < \alpha_i < 243^{\circ}58'40'',$$

a obie te nierówności są sprzeczne z założeniem

$$-74^{\circ}42'50'' < \alpha_i \leq -40^{\circ}00'00''.$$

A zatem α_i nie może leżeć w tym przedziale.

Postępując analogicznie dalej otrzymałem następujące oszacowania:

1) Dla górnego punktu zwrotnego:

$$\begin{aligned} -20^{\circ}00'00'' < \alpha_i < 20^{\circ}00'00'', & \quad -18^{\circ}50'40'' < \beta < 0^{\circ}00'00'', \\ -18^{\circ}50'40'' < \psi_i < 8^{\circ}00'00'', & \quad -14^{\circ}26'50'' < \beta_i < 21^{\circ}18'40'', \\ & \quad -15^{\circ}36'10'' < \alpha_i - \beta_i < 16^{\circ}37'50''. \end{aligned}$$

2) Dla dolnego punktu zwrotnego:

$$\begin{aligned} 131^{\circ}00'00'' < \alpha_i < 200^{\circ}00'00'', & \quad -2^{\circ}53'50'' < \beta < 18^{\circ}50'40'', \\ -2^{\circ}53'50'' < \psi_i < 26^{\circ}50'40'', & \quad -39^{\circ}47'30'' < \beta_i < 11^{\circ}13'00'', \\ & \quad 155^{\circ}57'20'' < \alpha_i - \beta_i < 204^{\circ}02'40'' \end{aligned}$$

Są to już oszacowania dosyć dobre, choć nienajlepsze. Można jednak otrzymać znacznie lepsze w mniejszych przedziałach dla danych parametrów. I tak na przykład, zakładając, że $40^\circ \leq \gamma_i \leq 90^\circ$, co zachodzi zawsze w przypadku silników w układzie V i w przypadku niektórych tylko cylindrów silników gwiazdowych, mogłem już otrzymać drogą szacowania pochodnych typu $\partial \alpha_i / \partial L_i$, $\partial \alpha_i / \partial \varphi_i$ (tzn. uważając α_i dane przez równania (7) za funkcję znanych parametrów $r, L, L_i, \alpha_i, \gamma_i, \varphi_i$) następujące nierówności:

$$\begin{aligned} -5^\circ 00' 00'' < \alpha_i < 9^\circ 00' 00'', & \quad -18^\circ 50' 40'' < \beta < -7^\circ 21' 00'', \\ -18^\circ 50' 40'' < \varphi_i < 0^\circ 39' 00'', & \quad -2^\circ 58' 00'' < \beta_i < 10^\circ 38' 30'', \\ -8^\circ 11' 30'' < \alpha_i - \beta_i < 3^\circ 37' 50''. \end{aligned}$$

Mając oszacowania szukanych parametrów można przystąpić do dowodu zbieżności proponowanego procesu iteracyjnego.

Niech będzie dana funkcja $\bar{\alpha}_i = g_i(\alpha_i)$, określona przez równania

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_i + \gamma_i, & \sin \beta &= -\lambda \sin \alpha, & \varphi_i &= \beta - \varphi_i, \\ \sin \beta_i &= -\lambda_i \sin \alpha_i - \eta_i \sin \varphi_i, & \sin(\bar{\alpha}_i - \beta_i) &= \frac{\eta_i}{\cos \beta} \cos \alpha \sin(\varphi_i - \beta_i), \end{aligned}$$

które otrzymujemy z układu (7) zastępując w ostatnim równaniu symbol α_i przez symbol $\bar{\alpha}_i$. Jeżeli zatem $\alpha_i = \alpha_{i0}$ jest pierwiastkiem układu równań (7), to mamy $\bar{\alpha}_{i0} = g_i(\alpha_{i0}) = \alpha_{i0}$, jeżeli natomiast α_{i0} jest jedynie przybliżeniem pierwiastka układu równań (7), to $\bar{\alpha}_{i0} = g_i(\alpha_{i0})$ jest następnym z kolei przybliżeniem tego pierwiastka w procesie iteracyjnym.

Jeżeli istnieje taka liczba q , że

$$(9) \quad \left| \frac{d\bar{\alpha}_i}{d\alpha_i} \right| < q < 1$$

w całym rozpatrywanym przedziale zmiennej α_i , to proces iteracyjny jest na pewno zbieżny. Istotnie, niech $\Delta \bar{\alpha}_i$ oznacza przyrost funkcji $\bar{\alpha}_i = g_i(\alpha_i)$ odpowiadający przyrostowi $\Delta \alpha_i$ zmiennej α_i . Na mocy (9) jest zatem

$$(10) \quad |\Delta \bar{\alpha}_i| < q |\Delta \alpha_i|.$$

Niech teraz $\alpha_i^{(0)}, \alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots$ będzie ciągiem kolejnych przybliżeń pierwiastka $\alpha_i = \alpha_{i0}$ układu (7) i niech $\bar{\alpha}_i^{(0)} = g_i(\alpha_i^{(0)})$, $\bar{\alpha}_i^{(1)} = g_i(\alpha_i^{(1)})$, $\bar{\alpha}_i^{(2)} = g_i(\alpha_i^{(2)})$, ... Jak wynika z opisu procesu iteracyjnego, jest

$$(11) \quad \alpha_i^{(n)} = \bar{\alpha}_i^{(n-1)} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Niech dalej

$$\Delta \alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(n-1)}, \quad \Delta \bar{\alpha}_i^{(n)} = \bar{\alpha}_i^{(n)} - \bar{\alpha}_i^{(n-1)} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Jest zatem na podstawie (11)

$$\Delta\alpha_i^{(n)} = \Delta\bar{\alpha}_i^{(n-1)} \quad \text{dla } n=2, 3, \dots$$

i na podstawie (10)

$$(12) \quad |\Delta\alpha_i^{(n)}| < q |\Delta\alpha_i^{(n-1)}| \quad \text{dla } n=2, 3, \dots$$

Wynika stąd, że szereg

$$(13) \quad \alpha_i^{(0)} + \Delta\alpha_i^{(1)} + \Delta\alpha_i^{(2)} + \dots$$

jest zbieżny. Zbieżność zaś tego szeregu jest równoważna ze zbieżnością ciągu

$$\alpha_i^{(0)}, \quad \alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(0)} + \Delta\alpha_i^{(1)}, \quad \alpha_i^{(2)} = \alpha_i^{(0)} + \Delta\alpha_i^{(1)} + \Delta\alpha_i^{(2)},$$

którą należało wykazać. Ciąg ten jest ponadto zbieżny do pierwiastka układu (7), ponieważ na podstawie (11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_i^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_i^{(n)}$$

Jest to zarazem jedyny pierwiastek tego układu w rozpatrywanym przedziale zmienności α_i , ponieważ z nierówności (9) wynika, że w danym przedziale może leżeć co najwyżej jeden punkt taki, że $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$. Wobec tego znaleziony pierwiastek odpowiada właśnie wartości parametru α_i w górnym punkcie zwrotnym, jeśli nierówność (9) udowodnimy w całym przedziale dającym oszacowanie wartości α_i w górnym punkcie zwrotnym (a więc na przykład w przedziale $-20^\circ < \alpha_i < 20^\circ$ uzyskanym w wyżej opisanych oszacowaniach), i podobnie znaleziony pierwiastek będzie wartością parametru α_i w dolnym punkcie zwrotnym, jeśli nierówność (9) udowodnimy w całym przedziale dającym oszacowanie wartości α_i w dolnym punkcie zwrotnym (a więc na przykład w przedziale $131^\circ < \alpha_i < 200^\circ$ uzyskanym w wyżej opisanych oszacowaniach), ponieważ wartości parametru α_i w punktach zwrotnych muszą być pierwiastkami układu (7), a w danym przedziale otrzymujemy tylko jeden pierwiastek.

Jak widzimy, przez udowodnienie nierówności (9) w całym przedziale dającym oszacowanie wartości α_i w szukanym punkcie zwrotnym, uzyskujemy nie tylko dowód zbieżności postępowania iteracyjnego, ale ponadto dowód, że warunek (6) jest wystarczający do istnienia ekstremum funkcji danej wzorem (4) lub (5).

Należy zatem udowodnić nierówność (9).

Pochodną $d\bar{\alpha}_i/d\alpha_i$ obliczamy z równań (8), różniczkując je względem α_i . Można ją napisać w postaci

$$\frac{d\bar{\alpha}_i}{d\alpha_i} = \frac{P \frac{d\beta}{d\alpha} + Q \frac{d\beta_i}{d\alpha_i}}{R},$$

gdzie

$$P = \sin \beta \sin (\alpha_i - \beta_i) + \eta_i \cos \alpha \cos (\psi_i - \beta_i),$$

$$Q = \cos \beta \cos (\alpha_i - \beta_i) - \eta_i \cos \alpha \cos (\psi_i - \beta_i),$$

$$R = \cos \beta \cos (\alpha_i - \beta_i) + \eta_i \sin \alpha \sin (\psi_i - \beta_i),$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha_i} = -\frac{\lambda}{\cos \beta} \cos \alpha, \quad \frac{d\beta_i}{d\alpha_i} = \frac{\lambda_i}{\cos \beta_i} \left(-\cos \alpha_i + \frac{\eta_i}{\cos \beta} \cos \alpha \cos \psi_i \right).$$

Szacując te wyrażenia udowodniłem nierówność (7) w przypadku, gdy $40^\circ \leq \gamma_i \leq 100^\circ$. Otrzymałem mianowicie oszacowania:

1) dla górnego punktu zwrotnego

$$-0,98351 < \frac{d\alpha_i}{d\alpha_i} < -0,07744,$$

2) dla dolnego punktu zwrotnego

$$0,02257 < \frac{d\alpha_i}{d\alpha_i} < 0,89534.$$

Oszacowania te są obliczone z grubsza i można by je zaostrzyć, lecz wymaga to dość żmudnych rachunków.

Obliczeń dla pozostałego przedziału $100^\circ < \gamma_i < 160^\circ$ nie przeprowadzałem, ale na podstawie wykonanych rachunków mogę przypuszczać, że i w tym przypadku nierówność (9) pozostanie prawdziwa.

Pozostała jeszcze do omówienia sprawa dokładności przybliżeń otrzymywanych opisaną metodą iteracyjną.

Różnicę między szukanym pierwiastkiem α_i układu (7) a jego k -tym z kolei przybliżeniem $\alpha_i^{(k)}$ można na mocy (12) łatwo oszacować jako resztę R_k szeregu (13). Mamy bowiem

$$\begin{aligned} |R_k| &= |\Delta\alpha_i^{(k+1)} + \Delta\alpha_i^{(k+2)} + \dots| \leq |\Delta\alpha_i^{(k+1)}| + |\Delta\alpha_i^{(k+2)}| + \dots < \\ &< |\Delta\alpha_i^{(k)}| (q + q^2 + q^3 + \dots) = |\Delta\alpha_i^{(k)}| \cdot \frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

Ale $\Delta\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k-1)}$, skąd ostatecznie

$$(14) \quad |R_k| < |\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k-1)}| \cdot \frac{q}{1-q}$$

Ponieważ obliczenie liczby q przez szacowanie pochodnej da_i/da_i zgodnie z wzorem (9) jest bardzo żmudne, można w obliczeniach praktycznych korzystać z wzoru przybliżonego na tę pochodną i przyjąć

$$q \approx \frac{|\alpha_i^{(k-1)} - \alpha_i^{(k-2)}|}{|\alpha_i^{(k-1)} - \alpha_i^{(k-2)}|} = \frac{|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k-1)}|}{|\alpha_i^{(k-1)} - \alpha_i^{(k-2)}|}.$$

Wzór (14) można wtedy zastąpić przez przybliżony wzór

$$(15) \quad |R_k| \approx \frac{(\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k-1)})^2}{|\alpha_i^{(k-1)} - \alpha_i^{(k-2)}| - |\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k-1)}|}.$$

Podam teraz przykład obliczenia położenia punktów zwrotnych. Niech

$$\lambda = 0,25, \quad \lambda_t = 0,35, \quad \eta_i = 0,38, \quad \gamma_i = 60^\circ, \quad \varphi_i = -5^\circ.$$

Obliczamy najpierw

$$\eta_i = \frac{\lambda \eta_t}{\lambda_t} = 0,27143.$$

Za wartość wyjściową do iteracji przyjmujemy: $\alpha_i = 0^\circ$ dla górnego punktu zwrotnego, $\alpha_i = 180^\circ$ dla dolnego punktu zwrotnego.

A oto obliczenia iteracyjne dla górnego punktu zwrotnego:

Z pierwszego równania układu (7) obliczamy, że $\alpha = 60^\circ$,
z drugiego " " " " $\beta = -12^\circ 30' 15''$,
z trzeciego " " " " $\varphi_i = -7^\circ 30' 15''$,
z czwartego " " " " $\beta_i = 2^\circ 50' 40''$,
z piątego " " " " $\alpha_i = 1^\circ 24' 50''$.

Na tym kończy się pierwszy cykl iteracyjny. Za wartość wyjściową do drugiego cyklu iteracyjnego bierzemy otrzymaną z pierwszego cyklu, tj. $\alpha_i = 1^\circ 24' 50''$.

Z pierwszego równania układu (7) obliczamy, że $\alpha = 61^\circ 24' 50''$,
z drugiego " " " " $\beta = -12^\circ 40' 50''$,
z trzeciego " " " " $\varphi_i = -7^\circ 40' 50''$,
z czwartego " " " " $\beta_i = 2^\circ 25' 00''$,
z piątego " " " " $\alpha_i = 1^\circ 04' 45''$.

Wartość $\alpha_i = 1^\circ 04' 45''$ bierzemy za wyjściową do trzeciego cyklu iteracyjnego i otrzymujemy kolejno

$$\alpha = 61^\circ 04' 50'', \quad \beta = -12^\circ 38' 20'', \quad \varphi_i = -7^\circ 38' 20'', \\ \beta_i = 2^\circ 31' 00'', \quad \alpha_i = 1^\circ 09' 30''.$$

Ostatnią z tych wartości bierzemy za wyjściową do czwartego z kolei cyklu iteracyjnego i otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \alpha &= 61^{\circ}09'30'', & \beta &= -12^{\circ}39'00'', & \psi_i &= -7^{\circ}39'00'', \\ \beta_i &= 2^{\circ}29'40'', & \alpha_i &= 1^{\circ}08'25''. \end{aligned}$$

Oszacujmy błąd ostatniego przybliżenia $\alpha_i = 1^{\circ}08'25''$. W tym celu posłużymy się wzorem (15). W symbolach tego wzoru otrzymaliśmy w naszych obliczeniach $\alpha_i^{(2)} = 1^{\circ}04'45''$, $\alpha_i^{(3)} = 1^{\circ}09'30''$, $\alpha_i^{(4)} = 1^{\circ}08'25''$. Mamy zatem

$$|R_4| \approx \frac{(1^{\circ}08'25'' - 1^{\circ}09'30'')^2}{|1^{\circ}09'30'' - 1^{\circ}04'45''| - |1^{\circ}08'25'' - 1^{\circ}09'30''|} \approx 20''.$$

A oto obliczenia dla dolnego punktu zwrotnego:

Z pierwszego równania układu (7) obliczamy, że $\alpha = 240^{\circ}00'00''$,
 z drugiego „ „ „ „ $\beta = 12^{\circ}30'15''$,
 z trzeciego „ „ „ „ $\psi_i = 17^{\circ}30'15''$,
 z czwartego „ „ „ „ $\beta_i = -6^{\circ}33'45''$,
 z piątego „ „ „ „ $\alpha_i = 176^{\circ}41'15''$.

Ostatnią z tych wartości bierzemy — analogicznie jak to było dla górnego punktu zwrotnego — za wyjściową do drugiego cyklu iteracyjnego. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \alpha &= 236^{\circ}41'15'', & \beta &= 12^{\circ}03'30'', & \psi_i &= 17^{\circ}03'30'', \\ \beta_i &= -7^{\circ}34'05'', & \alpha_i &= 176^{\circ}04'25''. \end{aligned}$$

W trzecim z kolei cyklu iteracyjnym otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha &= 236^{\circ}04'25'', & \beta &= 11^{\circ}58'20'', & \psi_i &= 16^{\circ}58'20'', \\ \beta_i &= -7^{\circ}45'10'', & \alpha_i &= 175^{\circ}57'40''. \end{aligned}$$

Oszacujmy błąd ostatniego przybliżenia, tj. $\alpha_i = 175^{\circ}57'40''$. W symbolach wzoru (15) otrzymaliśmy w naszych obliczeniach

$$\alpha_i^{(1)} = 176^{\circ}41'15'', \quad \alpha_i^{(2)} = 176^{\circ}04'25'', \quad \alpha_i^{(3)} = 175^{\circ}57'40''.$$

Z wzoru (15) obliczamy — analogicznie jak w przypadku górnego punktu zwrotnego — $|R_3| \approx 1'31''$.

Chociaż opisana wyżej metoda iteracyjna daje na ogół ciąg przybliżeń szybko zbieżny, jednak wymaga dość dużej ilości rachunków. Znaczne uproszczenie procedury uzyskuje się stosując nomogram. Metoda nomograficzna ma jednak zazwyczaj tę wadę, że jest za mało dokładna. W danym przypadku można skorzystać z bardzo prostego nomogramu o dużej dokładności. Oto opis tego nomogramu wraz ze sposobem użycia w postępowaniu iteracyjnym.



Układ równań (7) zastępujemy przez następujący równoważny:

$$(16) \quad \begin{array}{ll} (a) & \alpha = \alpha_i + \gamma_i, \\ (b) & \sin \beta = -\lambda \sin \alpha, \\ (c) & \psi_i = \beta - \varphi_i, \\ (d) & \varrho_i = -\lambda_i \sin \alpha_i, \\ (e) & \omega_i = -\eta_i \sin \psi_i, \\ (f) & \zeta_i = \varrho_i + \omega_i, \\ (g) & \sin \beta_i = \zeta_i, \\ (h) & \tau_i = \psi_i - \beta_i, \\ (i) & \sin \sigma_i = \frac{\eta_i \cos \alpha}{\cos \beta} \sin \tau_i, \\ (j) & \alpha_i = \sigma_i + \beta_i. \end{array}$$

Proste dodawania (a), (c), (f), (h), (j) wykonuje się bez użycia nomogramu. Nomogram jest zaprojektowany dla zależności (b), ale rozwiązuje również równania (d), (e), (g), (i). W jednym cyklu iteracyjnym wykonujemy zatem 5 dodawań i pięciokrotnie korzystamy z tego samego nomogramu.

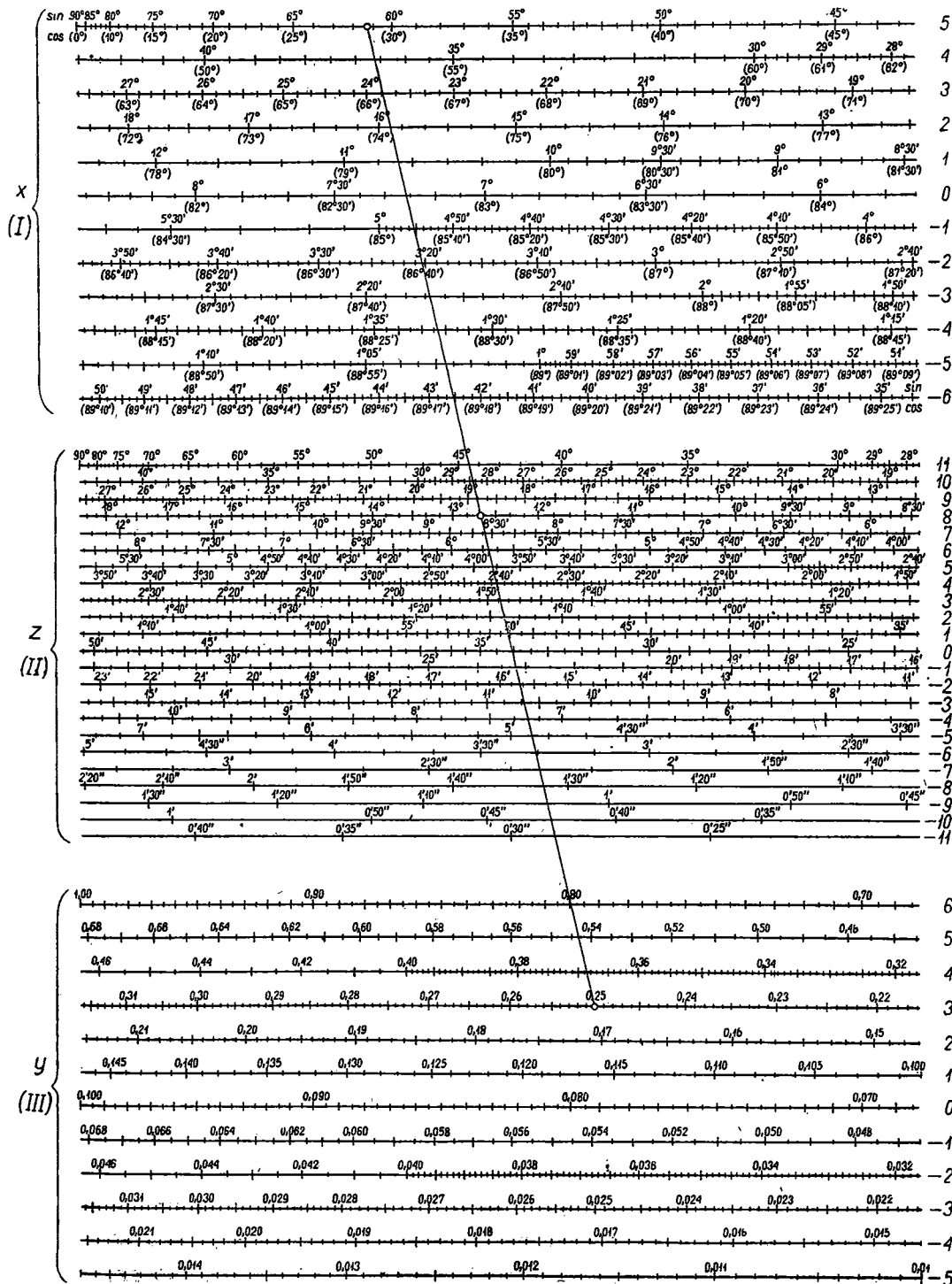
Nomogram (rys. 4) składa się z trzech części: w części I jest umieszczona skala logarytmiczna sinusów kątów wypisanych, pocięta na równe odcinki, w części II jest podana taka sama skala, tylko dwa razy zmniejszona (na skutek tego jest ona dwukrotnie powtórzona) i w większym przedziale kątów, wreszcie w części III jest podana zwykła skala logarytmiczna, pocięta również na równe odcinki. Nomogram jest zatem zwykłym nomogramem o trzech drabinkach równoległych dla zależności

$$\log \sin z = \log y + \log \sin x,$$

jeżeli skalę I uważać za skalę x , skalę II za skalę z , skalę III za skalę y , jedynie z tą różnicą, że skale pocięto na równe odcinki.

Omówię teraz sposób korzystania z nomogramu w proponowanym procesie iteracyjnym.

Wzór (16 b). Dane λ i α , należy znaleźć β . Na skali I odnajdujemy punkt odpowiadający danemu kątowi $|\alpha|$, a na skali III punkt odpowiadający danej wartości λ . Punkty te łączymy linią prostą. Szukaną wartość β odczytujemy na skali II w punkcie przecięcia się tej prostej z tym odcinkiem skali II, który opatrzony jest numerem równym sumie numerów odcinków skal I i III, na których to odcinkach poprzednio zaznaczono punkty odpowiadające danym wartościom $|\alpha|$ i λ ; odczytanej wartości β dajemy znak przeciwny niż miał $\sin \alpha$. Niech na przykład $\lambda = 0,25$ i $\alpha = 61^\circ 25'$. Punkt odpowiadający wartości $61^\circ 25'$ odnajdujemy na skali I na odcinku, który z prawej strony opatrzony jest numerem 5, a punkt odpowiadający wartości 0,25 na skali III na odcinku, który z prawej strony jest opatrzony numerem 3; zatem szukana wartość β leży na skali II na odcinku, który z prawej strony jest opatrzony numerem $5 + 3 = 8$, w punkcie przecięcia z prostą, łączącą dane punkty na skalach I i III. Odczytujemy $\beta = -12^\circ 40'$.



Rys. 4

Powyższy przykład korzystania z nomogramu narysowano na samym nomogramie.

Jeżeli dany kąt α nie leży w przedziale $(0^\circ, 90^\circ)$, należy go zastąpić przez kąt z tego przedziału o tej samej wartości bezwzględnej sinusa. Jeżeli natomiast dany kąt α leży w przedziale $(0^\circ, 90^\circ)$, ale jest taki mały, że nie ma go na skali I, to można na przykład zamiast wzoru $\sin \beta = -\lambda \sin \alpha$ użyć wzoru przybliżonego $\sin 10\beta = -\lambda \sin 10\alpha$, albo obliczyć β bez użycia nomogramu ze wzoru przybliżonego $\beta = -\lambda\alpha$.

Wzór (16 d). Gdyby na skali II oprócz podziałki logarytmicznej sinusów kątów umieścić również podziałkę logarytmiczną zwykłą, to sposób korzystania z nomogramu byłby taki jak w poprzednim przypadku, jedynie z tą różnicą, że szukaną wartość odczytywalibyśmy nie na podziałce logarytmicznej sinusów, lecz na podziałce logarytmicznej zwykłej. Aby ułatwić orientację, na skali II nie umieszczono podziałki logarytmicznej zwykłej, a wzór (16 d) rozwiązuje się jako wzór $\rho_i \sin 90^\circ = -\lambda_i \sin \alpha_i$. Najpierw znajdujemy punkty na skalach I i III odpowiadające danym wartościom α_i i λ_i , potem łącząc je prostą znajdujemy na skali II punkt przecięcia z odcinkiem o numerze równym sumie numerów odcinków, na których były dane punkty α_i i λ_i ; następnie łączymy linią prostą znaleziony w ten sposób punkt skali II z punktem skali I odpowiadającym kątowi 90° (jest to sam początek skali I) aż do przecięcia z odcinkiem skali III, opatrzonym numerem równym różnicy numerów odcinków skal II i I, na których leżały ostatnie dwa punkty z poprowadzoną przez nie prostą. Szukaną wartość ρ_i odczytujemy w otrzymanym punkcie skali III. Schemat takiego postępowania podajemy na rysunku 5.

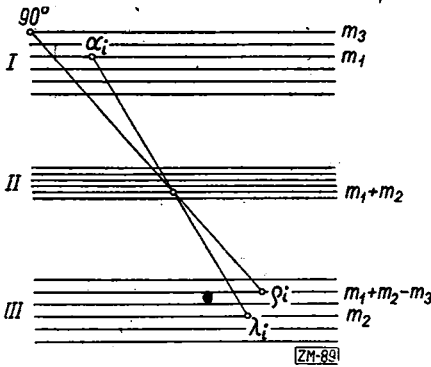
Wzór (16 e). Postępowanie analogiczne, jak w przypadku wzoru (16 d).

Wzór (16 g). Wzór ten rozwiązujemy, jak w przypadku (16 b) pisząc go w postaci

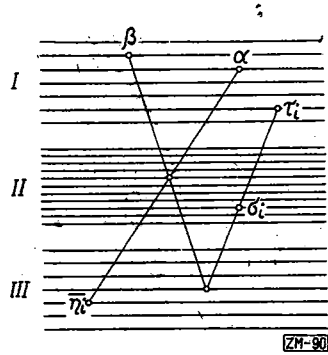
$$\sin \beta_i = \zeta_i \sin 90^\circ.$$

Wzór (16 i). Zachowując stale regułę, że dla trzech odpowiadających sobie punktów skal I, II i III numery odcinków tych skal są zawsze takie, że numer odcinka skali II jest sumą numerów odcinków skal I i III, wzór (16 i) rozwiązujemy w następujący sposób: Na skali pierwszej znajdujemy punkt odpowiadający danej wartości kąta α (mianowicie na podziałce cosinusów, tzn. po tej stronie drabinki, po której kąty są pisane w nawiasach), a na skali III punkt odpowiadający danej wartości η_i , łączymy te punkty prostą i znajdujemy odpowiadający im punkt skali II. Ten punkt skali II łączymy teraz prostą z punktem skali I (podziałka cosinusów), odpowiadającym danej wartości kąta β , aż do przecięcia ze skalą III. Znaleziony w ten sposób punkt skali III łączymy prostą z punktem skali I

(шкала синусов), odpowiadajacym danej wartosci kąta τ_i . W przecięciu tej prostej ze skalą II odczytujemy szukany kąt σ_i . Schemat postępowania podajemy na rysunku 6.



Rys. 5



Rys. 6

Nomogram podany na rysunku 4 można z powodzeniem stosować nie tylko w opisywanym procesie iteracyjnym, ale i w wielu innych metodach numerycznych. Dokładność zaprojektowanego nomogramu można oczywiście zwiększyć przez zwiększenie ogólnej długości skal i zwiększenie precyzji wykonania.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 6. 7. 1953 r.

М. ВАРМУС (Вроцлав)

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННО-ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ,
ПОЯСНЕННОМ ПРИМЕРОМ ИЗ КИНЕМАТИКИ ДВИГАТЕЛЕЙ
ТИПА V И ЗВЕЗДОБРАЗНЫХ МОТОРОВ

РЕЗЮМЕ

Предлагаемая работа — образец в преодолении численных затруднений при решении конкретной системы уравнений:

$$a = \alpha_i - \gamma_i, \quad \sin \beta = -\lambda \sin \alpha, \quad \psi_i = \beta - \varphi_i,$$

(1)

$$\sin \beta_i = -\lambda_i \sin \alpha_i - \eta_i \sin \psi_i, \quad \sin(\alpha_i - \beta_i) = \frac{\eta_i}{\cos \beta} \cos \alpha \sin(\psi_i - \beta_i),$$

где $\lambda, \lambda_i, \eta_i, \eta_i, \gamma_i, \varphi_i$ данные, а $a, \alpha, \beta, \beta_i, \psi_i$ искомые. Такую систему получаем например при исследовании точек возврата в боковых цилиндрах двигателей типа V и звездообразных моторов.

Главная цель работы заключается в описании численно-графического метода в применении к этому конкретному техническому примеру. Обычно системы уравнений типа (1) решаются приближенно следующим образом: ищем неизвестные функции или их значения в виде степенного или тригонометрического

ряда, а потом берем два или три первые его члена; а так как оценка погрешности или доказательство сходимости ряда обычно громоздки, попросту опускаем их. Легко привести примеры, когда такие недопустимые упрощения ведут к вполне ложным результатам. Для решения системы (1) автор предлагает итерационный метод. Доказывает сходимость этого метода, однозначность решения, и дает оценку погрешности получаемой итерацией приближений.

Итерацию можно производить численно или графически, пользуясь номограммом уравнения $\sin z = x \sin y$. Так, как обыкновенные номограммы отличаются слишком малой точностью отчетов, автор применяет номограммы с высокой точностью собственного изобретения. Это номограммы с параллельными шкалами, изготовленные из обыкновенных номограммов с тремя параллельными шкалами путем деления этих шкал на равные части и расположения этих частей параллельно в определенных (исчислением) расстояниях.

M. WARMUS (Wrocław)

ON A NUMERICAL-GRAPHIC METHOD ILLUSTRATED BY AN EXAMPLE FROM THE KINEMATICS OF TYPE V AND RADIAL ENGINES

S U M M A R Y

The paper is an example of overcoming numerical difficulties in solving a definite system of equations:

$$(1) \quad a = \alpha_i + \gamma_i, \quad \sin \beta = -\lambda \sin \alpha, \quad \psi_i = \beta - \varphi_i,$$

$$\sin \beta_i = -\lambda_i \sin \alpha_i - \eta_i \sin \psi_i, \quad \sin(\alpha_i - \beta_i) = \frac{\bar{\eta}_i}{\cos \beta} \cos \alpha \sin(\psi_i - \beta_i),$$

where $\lambda, \lambda_i, \eta_i, \bar{\eta}_i, \gamma_i, \varphi_i$, are known and $a, \alpha_i, \beta, \beta_i, \psi_i$, are sought.

Such a system is obtained, for instance, when seeking dead centres in side cylinders of type V and radial engines.

The main object of the paper is to show a numerical-graphic method on the above definite technical example. Usually equation systems similar to (1) are solved approximately as follows: we seek the unknown functions or their values in the form of power series or trigonometrical series, from which we then take the first two or three terms; and, since an error estimate or a proof of convergence of the series is usually very troublesome, it is simply omitted. It is easy to give examples in which such unwarranted simplifications lead to entirely false results. In order to solve equation (1) the author suggests an iteration method, proves the convergence of this method, the uniqueness of the solution, and also gives the estimate of errors obtained by the iteration of approximations.

The iteration can be performed numerically or graphically, use being made of the nomogram of the relation $\sin z = x \sin y$. Since ordinary nomograms give insufficient accuracy of readings, the author uses high accuracy nomograms of his own design. They are nomograms with parallel scales, formed from ordinary nomograms with three parallel scales by dividing those scales into equal parts and placing those parts in certain calculated intervals.