C. RAJSKI (Warszawa)

O WERYFIKACJI HIPOTEZ DOTYCZĄCYCH DWÓCH POPULACYJ ZŁOŻONYCH ZE SZTUK CECHOWANYCH ALTERNATYWNIE

1. Sformułowanie zagadnienia

Niniejsza praca przedstawia metodę rozwiązania następującego zagadnienia: Mamy dwie populacje generalne, z których każda zawiera pewną nieznaną liczbę sztuk wyróżnionych w określony sposób. Stosunek liczby sztuk wyróżnionych w którejkolwiek populacji generalnej do jej całkowitej liczności nazywamy *frakcją sztuk wyróżnionych* lub krócej *frakcją* i oznaczamy dla pierwszej populacji przez w_1, — dla drugiej przez w_2. Jeśli populacje są skończone, to frakcje mogą przyjmować tylko skończone liczby wartości dyskretnych. Dla uproszczenia przyjmiemy, że populacje są takie liczne, iż wolno zakładać, że każda ze zmiennych w_1, w_2 może przybierać wszelkie wartości w przedziale od 0 do 1.

Przypuśćmy, że w próbce o liczności n_1 sztuk pobranej losowo z pierwszej populacji generalnej znalazło się r_1 sztuk wyróżnionych, a w próbce o liczności n_2 pobranej z drugiej populacji r_2 sztuk wyróżnionych. Zagadnienie polega na tym, żeby na podstawie czwórki liczbowej n_1, r_1, n_2, r_2 weryfikować hipotezy, których treścią są relacje — zazwyczaj nierówności — zachodzące między frakcjami sztuk wyróżnionych badanych populacyj generalnych.

Najbardziej wiarogodnymi wartościami tych frakcyj są ułamki r_1/n_1 i r_2/n_2. Jeśli liczności są znaczne, na przykład każda jest rzędu tysiąca sztuk, to ułamki te określają z dużą dokładnością frakcje sztuk wyróżnionych w każdej populacji i w wielu przypadkach można przez proste porównanie ocenić, czy zadana relacja jest zapewne spełniona, aczkolwiek ze słowem „zapewne" nie wiąże się wtedy żadnej wartości liczbowej.

Jeśli liczności próbek są niewielkie, np. rzędu kilkunastu sztuk każda, to ułamki r_1/n_1 i r_2/n_2 są bardzo niedokładnymi estymatorami frakcyj w populacjach. Można w takich przypadkach stosować metodę przedstawioną w poprzednim artykule [1]) autora, opartą na twierdzeniu Bayesa. Niniejsza praca zawiera przedstawienie metody opartej na teorii Neymana-Pearsona estymacji i weryfikacji hipotez.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Za parametr charakteryzujący dwie populacje generalne weźmiemy parę uporządkowaną frakcyj sztuk wyróżnionych. O parze takiej będziemy mówili, że *reprezentuje* ona *parę populacyj generalnych*. Parę stałych frakcyj będziemy oznaczali symbolem $\langle w_1, w_2 \rangle$, parę zmiennych frakcyj, z których każda może przebiegać zbiór wszelkich wartości dopuszczalnych, będziemy oznaczali symbolem $\langle x_1, x_2 \rangle$. Dwie pary uporządkowane frakcyj są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są ich pierwsze człony i równe są ich drugie człony. Zbiór wszystkich par $\langle x_1, x_2 \rangle$ będziemy nazywali *przestrzenią populacji*.

Uporządkowanej parze $\langle x_1, x_2 \rangle$ frakcyj sztuk wyróżnionych możemy przypisać punkt o współrzędnych prostokątnych (x_1, x_2). Zbiór punktów przypisanych wszystkim parom przestrzeni populacji wypełnia pole kwadratu o boku równym jedności. Kwadrat ten będziemy nazywali *podstawowym*.

Za paramter charakteryzujący dwie próbki przyjmiemy parę uporządkowaną liczb sztuk wyróżnionych. O parze takiej będziemy mówili, że reprezentuje ona parę próbek o znanych licznościach n_1 i n_2. Dla oznaczenia rzeczywistych liczb sztuk wyróżnionych będziemy używali symbolu $\langle r_1, r_2 \rangle$, dla oznaczenia możliwych liczb sztuk wyróżnionych będziemy używali symbolu $\langle z_1, z_2 \rangle$, w którym zmienna z_1 może przybierać dowolną wartość całkowitą zawartą w przedziale od 0 do n_1, zmienna z_2 zaś — dowolną wartość całkowitą zawartą w przedziale od 0 do n_2. Dwie pary uporządkowane liczb sztuk wyróżnionych są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są ich pierwsze człony i równe są ich drugie człony. Zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle z_1, z_2 \rangle$ będziemy nazywali *przestrzenią próbek*.

Parze $\langle z_1, z_2 \rangle$ liczb sztuk wyróżnionych możemy przypisać punkt o współrzędnych prostokątnych (z_1, z_2). Wówczas przestrzeni próbek odpowiada $(n_1+1)(n_2+1)$ punktów rozmieszczonych w węzłach siatki prostokątnej.

Celem naszym jest określenie, czy nieznana nam para frakcyj $\langle w_1, w_2 \rangle$ spełnia pewną zadaną relację, na przykład $w_1 < w_2$, $w_1 > a w_2$ lub $w_1 - w_2 < \varepsilon$, gdzie a i ε są pewnymi stałymi. Wykresem każdej z tych

[1]) C. Rajski, *Porównywanie populacyj generalnych na podstawie twierdzenia Bayesa*, Zastosowania Matematyki 1 (1954), str. 330-341.

relacyj jest pewien obszar zawarty wewnątrz kwadratu podstawowego. Nie jest konieczne, żeby zadana relacja była wyrażona w postaci analitycznej. Zagadnienie jest jednoznacznie określone także wtedy, gdy relacja jest podana w postaci graficznej.

Oznaczmy przez U zbiór par $\langle x_1, x_2\rangle$ spełniających daną relację, przez $\overline{U}$ zaś dopełnienie tego zbioru do przestrzeni populacji.

Rozwiązywanie zagadnienia, czy para $\langle w_1, w_2\rangle$ spełnia daną relację jest równoważne z weryfikacją hipotezy, że para $\langle w_1, w_2\rangle \epsilon U$. Na tej podstawie obszar zadanej relacji będziemy nazywali *obszarem hipotezy* i oznaczali przez H.

Zapomnijmy na chwilę o tym, że już znamy rzeczywiste liczby sztuk wyróżnionych w próbkach i zapytajmy, jakie pary możliwych liczb sztuk wyróżnionych należy uznawać za potwierdzające rozpatrywaną hipotezę. Abstrahując na razie od tego, jak wyznaczyć takie pary, oznaczmy ich zbiór przez A i nazwijmy go *obszarem przyjęć*; zbiór wszystkich pozostałych par przestrzeni próbek nazwijmy *obszarem odrzuceń* i oznaczmy przez B. Para $\langle r_1, r_2\rangle$ musi być równa bądź jednej z par będących elementami zbioru A, a wówczas będziemy mówili, że znajduje się ona w obszarze przyjęć, bądź też równa jednej z par będących elementami zbioru B, a w tym przypadku będziemy mówili, że znajduje się ona w obszarze odrzuceń.

Obliczmy prawdopodobieństwo $p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A|\langle x_1, x_2\rangle\}$ zdarzenia, że z dwóch populacyj generalnych reprezentowanych przez parę $\langle x_1, x_2\rangle$ otrzymano — przy założonych licznościach n_1 i n_2 — dwie próbki reprezentowane przez którąkolwiek parę należącą do zbioru A. Znajdujemy łatwo, że

$$(1) \qquad p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A\,|\langle x_1, x_2\rangle\} = \sum_A\sum \binom{n_1}{z_1} x_1^{z_1}(1-x_1)^{n_1-z_1}\binom{n_2}{z_2} x_2^{z_2}(1-x_2)^{n_2-z_2}.$$

Wprowadźmy pewien parametr a spełniający nierówność

$$(2) \qquad 0 \leqslant a \leqslant 1$$

i nazwijmy go *poziomem istotności*. W praktyce poziom istotności ma wartości niewielkie, rzędu kilku setnych. Oznaczmy przez W zbiór takich par $\langle x_1, x_2\rangle$, które spełniają warunek

$$(3) \qquad p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A\,|\langle x_1, x_2\rangle \epsilon W\} \geqslant a,$$

i nazwijmy ten zbiór *obszarem pewności*. Mówimy, że para $\langle w_1, w_2\rangle$ leży wewnątrz obszaru pewności, jeśli jest ona równa którejkolwiek parze będącej elementem zbioru W. Oznaczmy poza tym przez $\overline{W}$ uzupełnienie obszaru W do przestrzeni populacji.

Z (3) wynika, że

$$p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon B \mid \langle x_1, x_2\rangle \epsilon W\} < 1-\alpha. \tag{4}$$

Wystarczy zatem założyć, że $\overline{U}\subset\overline{W}$, żeby dla każdej pary populacyj spełniającej relację $\langle x_1, x_2\rangle \epsilon \overline{U}$ prawdopodobieństwo otrzymania pary $\langle r_1, r_2\rangle$ było mniejsze od α. Na tej podstawie odrzucamy hipotezę, gdy $\langle r_1, r_2\rangle \epsilon B$. Z ostatniego równania wynika, że $W\subset U$, czyli że obszar hipotezy powinien obejmować obszar pewności.

Dla ustalonej wartości poziomu istotności każdemu obszarowi przyjęć odpowiada jeden i tylko jeden obszar pewności. Ponieważ liczba obszarów przyjęć jest skończona, liczba obszarów pewności dla każdej wartości α jest też skończona. Liczba natomiast obszarów hipotez jest nieskończona a każdy z nich można uważać za obraz pewnej relacji. Określony obszar hipotezy obejmuje na ogół wiele, aczkolwiek tylko skończenie wiele obszarów pewności. Wśród nich ten obszar jest optymalny, który najmniej się różni od obszaru hipotezy. Obszar przyjęć odpowiadający optymalnemu obszarowi będziemy też nazywali *optymalnym*. Wyznaczenie optymalnego obszaru przyjęć, odpowiadającego zadanej relacji i założonej wartości poziomu istotności, wymaga pewnej liczby prób, ponieważ bezpośrednie wyznaczenie z równań (1) i (3) jest w ogólnym przypadku niemożliwe. Sposób odnajdowania optymalnego obszaru przyjęć podano w rozdziale 4.

3. Numeryczne wyznaczanie obszarów pewności

Do wyznaczenia obszarów pewności trzeba znać przebieg powierzchni charakterystycznej, obliczanie zaś współrzędnych tej powierzchni wymaga wielu czynności rachunkowych. Ich ilość można znacznie zredukować opierając się na dwóch wskazówkach. Po pierwsze, jeśli liczba par $\langle z_1, z_2\rangle$ w obszarze przyjęć (A) jest większa niż w obszarze odrzuceń (B), to należy korzystać z wzoru

$$p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A \mid \langle x_1, x_2\rangle\} = 1 - p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon B \mid \langle x_1, x_2\rangle\}.$$

Po drugie, należy plan obliczeń uzależniać od kształtu obszaru przyjęć pamiętając o tym, że obliczanie współrzędnych powierzchni charakterystycznej jest czynnością pośrednią, a ostatecznym celem jest znalezienie obszarów pewności. Dlatego celowe jest podzielić obliczanie na dwie fazy, prowizoryczną i ostateczną. W prowizorycznej fazie obliczeń należy ustalić kształt powierzchni charakterystycznej tylko w przybliżeniu, a w fazie ostatecznej obliczyć dodatkowo współrzędne tylko tych punktów powierzchni charakterystycznej, które są konieczne do ustalenia konturów obszaru pewności z pożądanym stopniem dokładności.

W fazie prowizorycznej należy przede wszystkim wyznaczyć ślady powierzchni charakterystycznej na czterech płaszczyznach, nazwanych przez nas *granicznymi* i określonych przez równania $x_1=0$, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_2=1$. Dla ułatwienia dyskusji wprowadzimy oznaczenia

$$(5)\qquad p(x_1, n_1, z_1) = \binom{n_1}{z_1} x_1^{z_1}(1-x_2)^{n_1-z_1},$$

$$(6)\qquad p(x_2, n_2, z_2) = \binom{n_2}{z_2} x_2^{z_2}(1-x_2)^{n_2-z_2}.$$

Jeśli $x_1=0$, to wyrazy dwumianowe $p(x_1, n_1, z_1)$ dla $z_1 \neq 0$ są równe zeru, a dla $z_1=0$ są równe jedności, wobec czego wzór (1) przybiera postać

$$(7)\qquad p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A \mid \langle 0, x_2\rangle\} = \sum_{A, z_1=0} p(x_2, n_2, z_2).$$

W interpretacji geometrycznej sumowanie obejmuje te punkty obszaru przyjęć, które są skrajnymi lewymi punktami przestrzeni próbek.

Jeśli $x_1=1$, to wyrazy dwumianowe $p(x_1, n_1, z_1)$ dla $z_1 \neq n_1$ są równe zeru, a dla $z_1=n_1$ są równe jedności, wobec czego wzór (1) przybiera postać

$$(8)\qquad p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A \mid \langle 1, x_2\rangle\} = \sum_{A, z_1=n_1} p(x_2, n_2, z_2).$$

W interpretacji geometrycznej sumowanie obejmuje te punkty obszaru przyjęć, które są skrajnymi prawymi punktami przestrzeni próbek.

Jeśli $x_2=0$, to wyrazy dwumianowe $p(x_2, n_2, z_2)$ dla $z_2 \neq 0$ są równe zeru, zaś dla $z_2=0$ są równe jedności, wobec czego wzór (1) przybiera postać

$$(9)\qquad p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A \mid \langle x_1, 0\rangle\} = \sum_{A, z_2=0} p(x_1, n_1, z_1).$$

W interpretacji geometrycznej sumowanie obejmuje te punkty obszaru przyjęć, które są skrajnymi dolnymi punktami przestrzeni próbek.

Jeśli $x_2=1$, to wyrazy dwumianowe $p(x_2, n_2, z_2)$ dla $z_2 \neq n_2$ są równe zeru, a dla $z_2=n_2$ są równe jedności, wobec czego wzór (1) przybiera postać

$$(10)\qquad p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A \mid \langle x_1, 1\rangle\} = \sum_{A, z_2=n_2} p(x_1, n_1, z_1).$$

W interpretacji geometrycznej sumowanie obejmuje te punkty pola przyjęć, które są skrajnymi górnymi punktami przestrzeni próbek.

Rozpatrzymy bliżej przypadek $x_1=0$. Jeśli obszar przyjęć nie zawiera w ogóle par $\langle 0, z_2\rangle$, to $p\{\langle r_1, r_2\rangle \epsilon A \mid \langle 0, x_2\rangle\} = 0$ i powierzchnia charakterystyczna styka się z płaszczyzną o równaniu $x_1=0$ wzdłuż prostej.

Jeśli obszar przyjęć zawiera wszyskie pary od $\langle 0,0\rangle$ do $\langle 0,m_2\rangle$, to

$$(11)\qquad p\{\langle r_1,r_2\rangle\in A\,|\langle 0,x_2\rangle\}=\sum_{z_2=0}^{m}\binom{n_2}{z_2}x_2^{z_2}(1-x_2)^{n_2-z_2}.$$

Jest to równanie krzywej, która w języku statystycznej kontroli jakości nazywa się charakterystyką pojedynczego planu odbiorczego, zazwyczaj oznaczanego symbolem $m_2//n_2$.

Jeśli obszar przyjęć zawiera wszystkie pary od $\langle 0,0\rangle$ do $\langle 0,n_2\rangle$, to

$$p\{\langle r_1,r_2\rangle\in A\,|\langle 0,x_2\rangle\}=1,$$

co można uważać za charakterystykę planu $n_2//n_2$.

Jeśli pole przyjęć zawiera wszystkie pary od $\langle 0,n_2-m_2\rangle$ do $\langle 0,n_2\rangle$, to

$$(12)\qquad p\{\langle r_1,r_2\rangle\in A\,|\langle 0,x_2\rangle\}=\sum_{z_2=n_2-m_2}^{n_2}\binom{n_2}{z_2}x_2^{z_2}(1-x_2)^{n_2-z_2}=$$

$$=\sum_{z_2=0}^{m_2}\binom{n_2}{z_2}(1-x_2)^{z_2}x_2^{n_2-z_2}.$$

Zatem śladem powierzchni charakterystycznej na płaszczyźnie o równaniu $x_1=0$ jest krzywa, którą można uważać za charakterystykę planu pojedynczego $n_2\|z_2$ zależnie od argumentu $1-x_2$.

Analogiczne wyniki daje analiza śladów powierzchni charakterystycznej na pozostałych trzech płaszczyznach granicznych. Rzędne tych linii można zawsze przedstawić jako funkcje liniowe rzędnych charakterystyk planów pojedynczych.

4. Przykłady zastosowań

PRZYKŁAD 1. Są dwa baseny do konserwacji jaj. Najpierw załadowano pierwszy, a nieco później drugi. W toku kontroli pobrano z każdego basenu po 10 jaj. W pierwszej próbce znaleziono 7 jaj dobrych, a w drugiej 9. Uzasadnione jest przypuszcznie, że frakcja jaj dobrych w pierwszym basenie, jako wcześniej załadowanym, jest mniejsza niż w drugim. Czy wyniki kontroli potwierdzają to przypuszczenie?

PRZYKŁAD 2. Dwie grupy chorych, z których każda liczy 10 osób, poddano leczeniu dwoma pokrewnymi środkami, pierwszą środkiem A, drugą — B. W pierwszej grupie wyraźna poprawa nastąpiła u 5 chorych, w drugiej zaś u 8. Środek B wyprodukowano przy użyciu metody mającej na celu uzyskanie wyższej zawartości składnika aktywnego niż w środku A, wobec czego przypuszcza się, że powinien on być lepszy od środka A co najmniej o 20%. Czy przytoczone wyniki kuracji potwierdzają to przypuszczenie?

Przykład 3. Przez okres 6 tygodni stawiano prognozy meteorologiczne dwiema różnymi metodami, metodą M i metodą N. Prognozy stawiane na podstawie metody M, uwzględniającej większą liczbę parametrów, okazały się trafne w 31 dniach, a metodą N — w 25 dniach. Czy można twierdzić, że metoda M jest lepsza co najmniej o 10%?

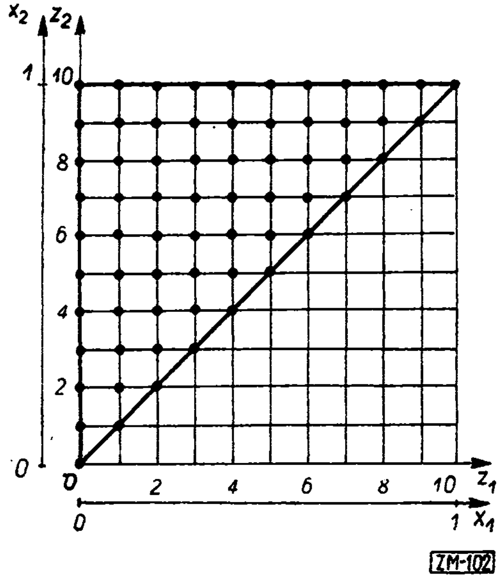
Przykład 4. Miarą jakości pocisków pewnego typu jest jednorodność ich produkcji, określana liczbą trafień przy stałych warunkach strzelania. Porównaniu podlegają pociski wyprodukowane dwiema różnymi metodami technologicznymi, metodą X i metodą Y. Na 25 strzałów danych pociskami każdego rodzaju uderzyło w cel 16 produkowanych metodą X i 19 produkowanych metodą Y. Czy można twierdzić, że jakość produkcji obu rodzajów nie różni się od siebie więcej niż o 10%?

5. Numeryczne rozwiązania dwóch przykładów

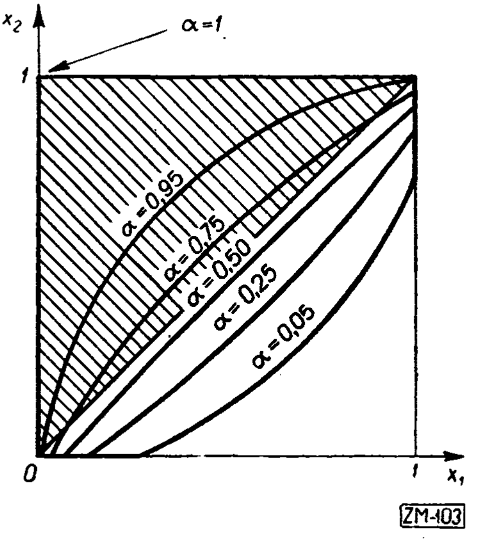
Rozwiązanie przykładu 1. Jeśli znajdujące się w basenie jaja będziemy uważali za populacje generalne, jaja dobre zaś za sztuki wyróżnione, to rozwiązanie postawionego zagadnienia sprowadza się do weryfikacji hipotezy, że $w_1<w_2$. Czynność weryfikacji należy zacząć od znalezienia optymalnego obszaru przyjęć dla założonych liczności próbek.

W tym celu w kwadracie podstawowym przestrzeni populacji wykreślamy obszar hipotezy $w_1<w_2$, a następnie przestrzeń próbek. Zaliczamy prowizorycznie do obszaru przyjęć te pary $\langle z_1, z_2\rangle$, które na tym wykresie znajdą się wewnątrz obszaru hipotezy lub na granicy tego obszaru (rys. 1). Obliczamy rzędne powierzchni charakterystycznej oraz wyznaczamy obszar pewności W dla przyjętej wartości poziomu istotności. Zakładamy tu, że $\alpha=0{,}05$. Na rysunku 2 pokazano obszary pewności dla kilku wartości α w celu zorientowania o kształcie powierzchni charakterystycznej. Na rysunku 2 widać, że obszar hipotezy jest znacznie mniejszy od obszaru pewności dla $\alpha=0{,}05$. Zmniejszamy wobec tego „na oko” obszar przyjęć do zakresu pokazanego na rysunku 3 i ponownie określamy obszar pewności. Jak widać na rysunku 4, obszar ten leży już wewnątrz obszaru hipotezy, ale różnica między nimi jest jeszcze dość znaczna.

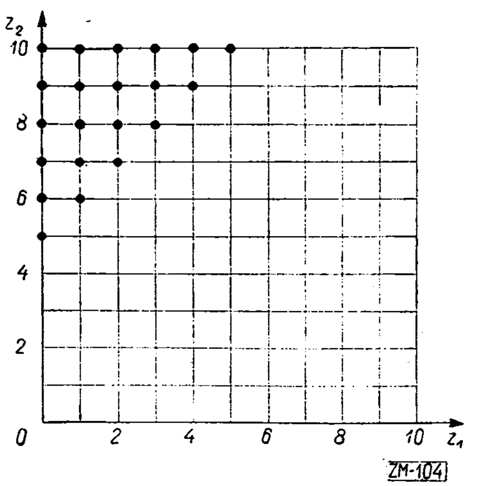
Wobec tego zwiększamy obszar przyjęć o 6 par do zakresu pokazanego na rysunku 5 i raz jeszcze wyznaczamy obszar pewności (rys. 6). Można przekonać się drogą prób, że wszelkim obszarom przyjęć, zawierającym chociażby o jedną parę więcej, niż obszar przyjęć z rysunku 5, odpowiadają pewności nie mieszczące się w obszarze hipotezy. Z tego wynika, iż obszar przyjęć na rysunku 5 jest optymalny dla hipotezy, że $w_1<w_2$.



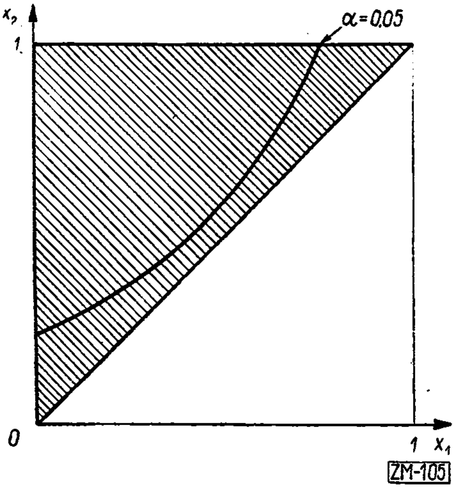
Rys. 1. Wykres obszaru przyjęć znajdującego się wewnątrz i na obwodzie obszaru hipotezy $w_1 < w_2$ dla $n_1 = n_2 = 10$



Rys. 2. Wykresy obszarów pewności dla obszaru przyjęć z rysunku 1 oraz hipotezy (zakreskowane)



Rys. 3. Wykres obszaru przyjęć skorygowanego w stosunku do obszaru z rysunku 1



Rys. 4. Wykres obszaru pewności dla obszaru przyjęć z rysunku 3; obszar hipotezy zakreskowany

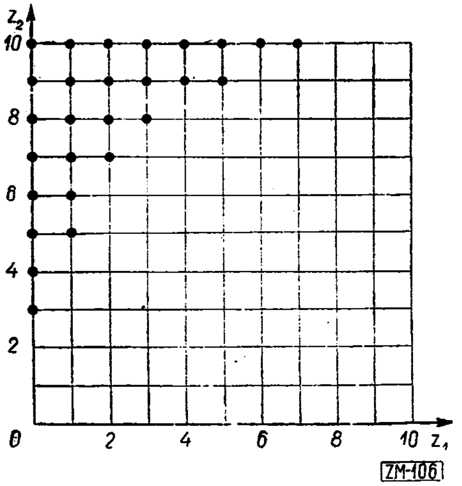
Znaleziony obszar przyjęć możemy opisać za pomocą następującej tablicy:

TABLICA 1

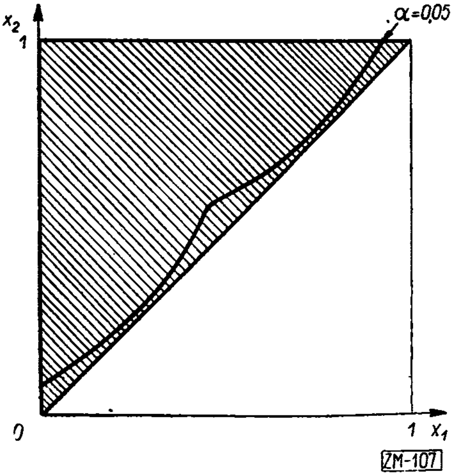
Liczby sztuk wyróżnionych w próbkach dziesięciosztukowych nie zaprzeczające hipotezie, że $w_1 < w_2$

r_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_2 — co najmniej	3	5	7	8	9	9	10	10	—	—	—

Korzystanie z takiej tablicy jest zapewne dla wielu praktyków łatwiejsze niż z wykresu na rysunku 5. W rozważanym przykładzie założyliśmy, że $r_1 = 7$, $r_2 = 9$. Ta para liczb nie mieści się w tablicy 1, z czego wynika, że wyniki kontroli nie potwierdzają przypuszczenia, jakoby frakcja jaj dobrych w pierwszym basenie była mniejsza niż w drugim.



Rys. 5. Wykres obszaru przyjęć optymalnego dla hipotezy $w_1 < w_2$

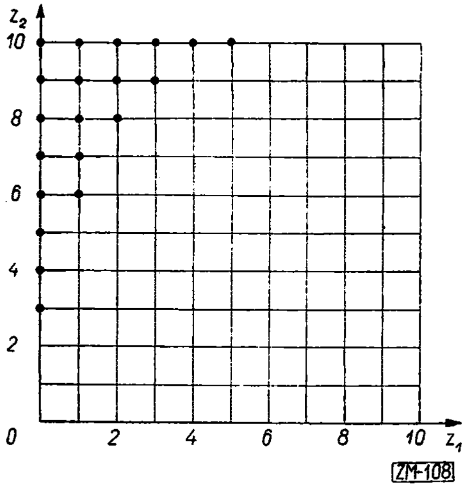


Rys. 6. Wykres obszaru pewności dla obszaru przyjęć z rysunku 5; obszar hipotezy zakreskowany

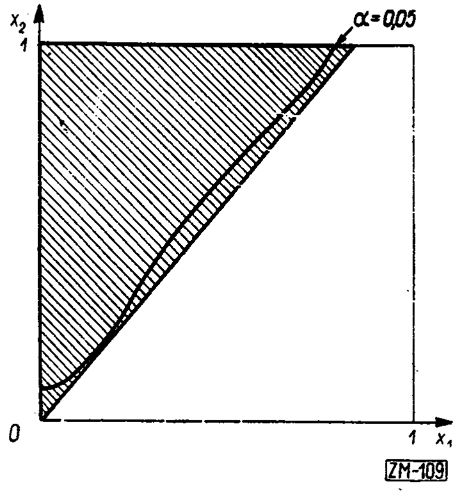
R o z w i ą z a n i e   p r z y k ł a d u 2. Przykład ten jest opisany językiem praktyka, nie matematyka, wobec czego rozwiązywanie należy zacząć od sformułowania posługującego się terminologią matematyczną. Nie jest jasne, co znaczy potoczny zwrot „środek *B* jest lepszy od środka *A* co najmniej o 20%”. Przyjmujemy następującą interpretację: Środek *B* jest lepszy od środka *A* co najmniej o 20%, jeśli frakcja w_2 osób wyleczonych środkiem *B* będzie co najmniej o 20% większa od frakcji w_1 osób wyleczonych środkiem *A*, przy czym ustala się poziom istotności 0,05.

Zatem rozwiązanie przykładu 2 sprowadza się do rozwiązania zagadnienia następującego:

Z dwóch bardzo wielkich populacyj generalnych o frakcjach sztuk wyróżnionych wynoszących odpowiednio w_1 i w_2 pobrano losowo próbki po 10 sztuk. Zweryfikować hipotezę, że $w_2 \geqslant 1{,}2 w_1$.



Rys. 7. Wykres optymalnego obszaru przyjęć dla hipotezy $w_1 < 1{,}2 w_2$



Rys. 8. Wykres obszaru pewności dla obszaru przyjęć z rysunku 7; obszar hipotezy zakreskowany

Znaleziony drogą prób optymalny obszar przyjęć dla tej hipotezy jest pokazany na rysunku 7, odpowiedni zaś obszar pewności dla poziomu istotności równego 0,05 jest pokazany na rysunku 8. Tablica 2 opisuje znaleziony obszar przyjęć.

TABLICA 2

Liczby sztuk wyróżnionych w próbkach dziesięciosztukowych nie zaprzeczające hipotezie, że $w_2 \geqslant 1{,}2\, w_1$

r_1	0	1	2	3	4	5
r_2 — co najmniej	3	6	8	9	10	10

Podane w przykładzie liczby chorych, u których nastąpiła wyraźna poprawa, mieszczą się w granicach podanych w tablicy 2, wobec czego nie ma podstaw do odrzucenia przypuszczenia, że środek *B* jest lepszy od środka *A* co najmniej o 20%.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 23. 7. 1953 r.

Ч. РАЙСКИЙ (Варшава)

О ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНО СОВОКУПНОСТЕЙ СОСТОЯЩИХ ИЗ ШТУК ОТМЕЧЕННЫХ АЛЬТЕРНАТИВНО

РЕЗЮМЕ

Даны две генеральные совокупности, каждая из которых содержит некоторые неивестное число штук отмеченных определенным способом. Обозначим через w_1 и w_2 проценты этих штук соответственно в первой и другой совокупности, через n_1 и n_2 — численность выборок, через r_1 и r_2 — число отмеченных штук найденных в выборках.

Пользуясь теорией оценок и проверки гипотез Неймана-Пирсона, устанавливается метод проверки — при наличии данных n_1, n_2, r_1, r_2 — разных гипотез о w_1 и w_2, в частности гипотезы, что $w_1 \geqslant kw_2$, где k — наперед определенная постоянная.

C. RAJSKI (Warszawa)

ON THE VERIFICATION OF HYPOTHESES CONCERNING TWO POPULATIONS CONSISTING OF ITEMS MARKED BY ATTRIBUTES

SUMMARY

There are two general populations each of which contains an unknown number of items marked in a definite manner. Let w_1 and w_2 denote, respectively, the fractions of those pieces in the first and in the second populations, n_1 and n_2 — the sizes of the samples, r_1 nad r_2 — the numbers of marked pieces found in the samples.

Basing ourselves on the Neyman-Pearson theory of the estimation and verification of hypotheses, we give a method of the verification, founded on the knowledge of n_1, n_2, r_1, r_2, of different hypotheses concerning w_1 and w_2, in particular of the hypothesis that $w_1 \geqslant kw_2$, where k is a given constant.