ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 3 (1968)

I. KOPOCIŃSKA i B. KOPOCIŃSKI (Wrocław)

ROZKŁADY ODSTĘPÓW MIĘDZY ZMIANAMI STANU W SYSTEMIE $M/G/1$ ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

1. W modelach obsługi masowej zakłada się niekiedy, że proces zgłoszeń jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda_n = \lambda[n(t)]$ zależną od stanu systemu $n(t)$ w danym momencie t. Ściśle mówiąc jest to proces pojedynczy i bez następstw, a intensywność tego procesu jest definiowana jako granica

$$\lambda_n = \lim_{\tau\to 0} \omega(t, \tau|n)/\tau,$$

gdzie $\omega(t, \tau|n)$ oznacza prawdopodobieństwo co najmniej jednego zgłoszenia w przedziale czasowym $[t, t+\tau)$ pod warunkiem, że $n(t) = n$.

W modelu, który będziemy rozpatrywali w niniejszej pracy, przyjmujemy ponadto jednokanałową obsługę z dowolnym rozkładem czasu obsługi. Graniczne prawdopodobieństwa stanów tego systemu są znane w przypadku wykładniczego czasu obsługi (por. np. [3]), natomiast w przypadku dowolnego rozkładu czasu obsługi można badać system za pomocą włożonych łańcuchów Markowa [1].

W niniejszej pracy zajmiemy się rozkładem odstępów między zgłoszeniami jednostek do systemu oraz rozkładami odstępów między momentami zmiany stanu systemu. Łatwo udowodnić, że w systemach bez sprzężenia zwrotnego, tzn. gdy $\lambda_n = \lambda$, odstępy między zgłoszeniami jednostek do systemu są niezależne i o wykładniczym rozkładzie z parametrem λ, natomiast odstępy między momentami zmiany stanu zależą tylko od tego, czy na początku odstępu system jest pusty, czy nie.

Zauważmy, że gdyby proces $n(t)$ był niemalejący, tzn. gdyby czas obsługi był nieskończony, to odstępy między zgłoszeniami byłyby niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, przy czym n-ty odstęp miałby parametr λ_n zależny od stanu systemu w momencie przedostatniego zgłoszenia. Niestety w nietrywialnych modelach momenty zakończenia obsługi także zmieniają intensywność procesu zgłoszeń, czyniąc rozkłady odstępów między zgłoszeniami bardziej skomplikowanymi. Zarówno rozkłady odstępów między zgłoszeniami, jak i odstępów między zmianami stanu systemu zależą od stanu systemu w momencie początkowym i od czasu trwania obsługi jednostki znajdującej się w obsłudze. Ponieważ model $M/G/1$ ze sprzężeniem zwrotnym najłatwiej opisać przy użyciu włożonego łańcucha Markowa w momentach zakończenia obsługi, z praktycznego punktu widzenia wygodnie jest uzależnić rozkład odstępów między zmianami stanu systemu od stanu systemu w momencie zakończenia ostatniej obsługi.

2. Rozważmy sytuację powstałą w momencie zgłoszenia jednostki do systemu, gdy w systemie jest n jednostek (nie licząc aktualnie zgłaszającej się), a τ jest czasem, jaki upływa od rozpoczęcia obsługi jednostki aktualnie zajmującej kanał obsługowy. Niech $X(n,\tau)$ oznacza czas do najbliższej zmiany stanu oraz $D(n,\tau)$ czas do najbliższego zgłoszenia. Łatwo sprawdzić, że

$$X(n,\tau) = \min(S-\tau, Y_n) \quad \text{dla} \quad n > 0,$$

$$X(0,0) = Y_0,$$

gdzie S jest pełnym czasem obsługi jednostki, $S-\tau > 0$, natomiast Y_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ_n. Zmienną losową Y_n można interpretować jako czas do najbliższego zgłoszenia pod warunkiem, że proces zgłoszeń jest procesem Poissona z parametrem λ_n niezależnym od stanu systemu.

Rozważmy teraz dwa przypadki: 1° następne zgłoszenie nastąpi nie później niż w momencie dokończenia obsługi, 2° obsługa zostanie zakończona wcześniej. W pierwszym przypadku mamy

$$D(n,\tau) = X(n,\tau) = Y_n,$$

natomiast w drugim przypadku mamy $Y_n > S-\tau$ i wówczas

$$D(n,\tau) = S-\tau+D(n-1,0),$$

przy czym $S-\tau$ i $D(n-1,0)$ są niezależne.

Łatwo wyprowadzić wzór

$$P\big(D(n,\tau) < x\big) = \int_0^\infty P\big(D(n,\tau) < x \mid S-\tau = s\big)\, dG_\tau(s), \tag{1}$$

gdzie

$$G_\tau(s) = P(S-\tau < s \mid S-\tau > 0) = \frac{G(s+\tau)-G(\tau+0)}{1-G(\tau+0)}. \tag{2}$$

Warunkowe prawdopodobieństwo występujące pod całką we wzorze (1) można przekształcić jak następuje

$$P\big(D(n,\tau) < x \mid S-\tau = s\big) = P\big(D(n,\tau) < x,\ Y_n \leqslant S-\tau \mid S-\tau = s\big)+$$
$$+P\big(D(n,\tau) < x,\ Y_n > S-\tau \mid S-\tau = s\big) = P(Y_n < x,\ Y_n \leqslant s-\tau)+$$
$$+P\big(D(n-1,0)+s < x,\ Y_n > s\big) = F_n^{(1)}(x,s)+F_n^{(2)}(x,s),$$

gdzie

$$F_n^{(1)}(x,s) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda_n x} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant s, \\ 1-e^{-\lambda_n s} & \text{dla} \quad x > s, \end{cases} \tag{3}$$

$$F_n^{(2)}(x,s) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant s, \\ e^{-\lambda_n s}F_{D(n-1,0)}(x-s) & \text{dla} \quad x > s. \end{cases} \tag{4}$$

W szczególności ponieważ zmienna losowa $D(1,\tau)$ jest określona tylko dla $\tau = 0$, to

$$P\big(D(1,0) < x\big) = \int_0^\infty [F_1^{(1)}(x,s)+F_1^{(2)}(x,s)]\,dG(s),$$

gdzie

$$F_1^{(1)}(x,s) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda_1 x} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant s, \\ 1-e^{-\lambda_1 s} & \text{dla} \quad x > s, \end{cases} \tag{5}$$

$$F_1^{(2)}(x,s) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant s, \\ e^{-\lambda_1 s}(1-e^{-\lambda_0(x-s)}) & \text{dla} \quad x > s. \end{cases} \tag{6}$$

Zajmiemy się teraz obliczeniem oczekiwanej wartości zmiennej losowej $D(n,\tau)$. W tym celu zauważmy, że

$$ED(n,\tau) = E\min(S-\tau,\ Y_n)+P(Y_n > S-\tau)ED(n-1,0). \tag{7}$$

Obliczmy dla $S-\tau > 0$

$$P(Y_n > S-\tau) = \int_0^\infty\int_y^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n x}\,dx\,dG_\tau(y) = G_\tau^*(\lambda_n), \tag{8}$$

gdzie $G_\tau{}^*(\lambda)$ jest transformatą Laplace'a Stieltjesa funkcji $G_\tau(s)$.

Rozkład zmiennej losowej $\min(S-\tau,\ Y_n)$ jest następujący:

$$P\big(\min(S-\tau,\ Y_n) < x\big) = 1-e^{-\lambda_n x}\big(1-G_\tau(x)\big).$$

Stąd

$$E\min(S-\tau,\ Y_n) = \int_0^\infty e^{-\lambda_n x}\big(1-G_\tau(x)\big)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\big(1-G_\tau^*(\lambda_n)\big). \tag{9}$$

Korzystając ze wzorów (7), (8) i (9), mamy

$$ED(n,\tau) = \big(1-G_\tau^*(\lambda_n)\big)/\lambda_n + G_\tau^*(\lambda_n)ED(n-1,0), \qquad n = 1,2,\dots$$

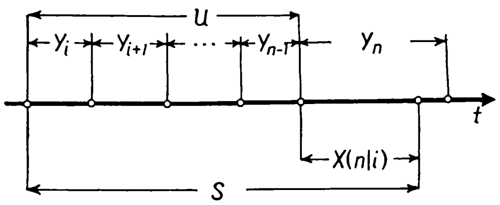
$$ED(0,0) = 1/\lambda_0.$$

Stąd

$$ED(n,0) = \big(1-G^*(\lambda_n)\big)/\lambda_n + G^*(\lambda_n)\big(1-G^*(\lambda_{n-1})\big)/\lambda_{n-1}+\dots+$$
$$+G^*(\lambda_n)G^*(\lambda_{n-1})\dots G^*(\lambda_2)\big(1-G^*(\lambda_1)\big)/\lambda_1 + G^*(\lambda_n)G^*(\lambda_{n-1})\dots G^*(\lambda_1)/\lambda_0.$$

Zauważmy na koniec, że jeśli $\lambda_n = \lambda$, to rozkład zmiennej losowej $D(1,0)$, a także rozkłady zmiennych losowych $D(n,\tau)$ są wykładnicze z parametrem λ.

3. Jak zauważyliśmy we wstępie, z praktycznego punktu widzenia wygodniej jest uzależnić rozkład odstępów między zmianami stanu systemu w momencie zakończenia ostatniej obsługi.



Rys. 1

Oznaczmy przez $X(n|i)$ czas pobytu w stanie n w czasie trwania jednej obsługi pod warunkiem, że na początku tej obsługi i jednostek znajduje się w systemie. Dla $n < i$ mamy $X(n|i) = 0$, ponieważ w czasie trwania obsługi stan systemu nie może zmaleć.

Łatwo sprawdzić, że dla $n > i$ (por. rys. 1)

$$X(n|n) = \min(Y_n, S) = X(n,0), \tag{10}$$

$$X(n|i) = \min\{Y_n, \max[S-(Y_i+Y_{i+1}+\dots+Y_{n-1}), 0]\}, \tag{11}$$

gdzie $Y_i, Y_{i+1}, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wykładniczym rozkładzie z parametrem $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots$.

Znajdziemy teraz rozkłady zmiennych losowych $X(n|i)$. Dla $i = n$

$$F_{X(n|n)}(x) = 1-e^{-\lambda_n x}\big(1-G(x)\big).$$

Dla $n > i$ gęstość zmiennej losowej $U = Y_i+Y_{i+1}+\dots+Y_{n-1}$ jest dla $0 < x < \infty$ następująca:

$$f_U(x) = \lambda_i\lambda_{i+1}\dots\lambda_{n-1}\iint\limits_{\Omega_{n-i-1}(x)} e^{-(\lambda_i y_0+\lambda_{i+1}y_1+\dots+\lambda_{n-1}y_{n-i-1})}dy_0 dy_1\dots dy_{n-i-2} =$$
$$= \lambda_{n-1}P\big(\xi(x) = n-i-1\,|\,i\big),$$

gdzie

$$\Omega_{n-i-1}(x) = \{(y_0, y_1, \dots, y_{n-i-1}):\ y_k \geqslant 0,\ y_0+y_1+\dots+y_{n-i-1} = x\}.$$

Wyrażenie $P\big(\xi(x) = n \mid i\big)$ oznacza (por. [1], wzór (11)) prawdopodobieństwo n zgłoszeń w czasie trwania obsługi o długości x, jeśli na początku obsługi i jednostek znajduje się w systemie.

Ustalmy $S = s$. Wówczas zmienna losowa $Z = \max(s-U, 0)$ ma dystrybuantę

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 1-F_U(s-x) \quad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant s, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x > s. \end{cases}$$

Stąd

$$F_{X(n|i,s)}(x) = 1-\big(1-F_{Y_n}(x)\big)\big(1-F_Z(x)\big) =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 1-e^{-\lambda_n x} F_U(s-x) \quad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant s, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x > s. \end{cases}$$

Tak więc

$$F_{X(n|i,s)}(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 1-\lambda_{n-1} e^{-\lambda_n x} \int\limits_0^{s-x} P\big(\xi(y) = n-i-1 \mid i\big) dy \quad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant s, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x > s. \end{cases}$$

Ponieważ

$$F_{X(n|i)}(x) = \int\limits_0^\infty F_{X(n|i,s)}(x) dG(s) =$$

$$= 1-\lambda_{n-1} e^{-\lambda_n x} \int\limits_0^\infty P\big(\xi(y) = n-i-1 \mid i\big)[1-G(x+y)] dy, \qquad \text{dla} \qquad x > 0,$$

to szukany rozkład został znaleziony.

Dla $n > i$ zmienna losowa $X(n \mid i)$ przyjmuje wartość zero z dodatnim prawdopodobieństwem. Ze wzoru (11) mamy

$$P\big(X(n \mid i) = 0\big) = P(S < Y_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_{n-1}).$$

Wyrażenie to można interpretować jako prawdopodobieństwo nieosiągnięcia stanu n w czasie obsługi, na początku której system był w stanie i. Rozkład zmiennej losowej $X(n \mid i)$ pod warunkiem, że $X(n \mid i) > 0$, ma postać

$$\tilde{F}_{X(n|i)}(x) = \frac{F_{X(n|i)}(x) - F_{X(n|i)}(0+)}{1-F_{X(n|i)}(0+)}.$$

Przejdziemy teraz do obliczenia oczekiwanej wartości zmiennej losowej $X(n|i)$. Oczywiście

$$EX(n|n) = \int_0^\infty e^{-\lambda_n x}\big(1-G(x)\big)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\big(1-G^*(\lambda_n)\big),$$

dla $n > i$ natomiast mamy

$$EX(n|i) = \int_0^\infty EX(n|i,s)\,dG(s),$$

gdzie

$$EX(n|i,s) = \int_0^\infty \big(1-F_{X(n|i,s)}(x)\big)dx =$$

$$= \int_0^s \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n x} \int_0^{s-x} P\big(\xi(y) = n-i-1|i\big)\,dy\,dx$$

i po scałkowaniu

(11) $$EX(n|i,s) = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\int_0^s P\big(\xi(y) = n-i-1|i\big)dy - \frac{1}{\lambda_n}P\big(\xi(s) = n-i|i\big).$$

W pracy [2] znaleziono wzór

(12) $$EX(n|i,s) = \sum_{k=0}^{\infty} M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n+k}; s)$$

gdzie

$$M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n+k}; s) =$$

$$= \lambda_i\lambda_{i+1}\ldots\lambda_{n+k-1} \iint\limits_{\Omega_{n+k-i}(s)} y_n e^{-(\lambda_i y_0 + \lambda_{i+1} y_1 + \ldots + \lambda_{n+k} y_{n+k-i})} dy_0\,dy_1\ldots dy_{n+k-i-1}.$$

Łatwo pokazać równoważność tego wzoru z poprzednim. Istotnie, dla $k > 0$ mamy

$$M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n+k}; s) =$$

$$= \lambda_n \int_0^s M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n; x) P\big(\xi(s-x) = k-1|n+1\big)dx.$$

Sumując te wzory dla $k = 1, 2, \ldots$, otrzymujemy

$$EX(n|i,s) - M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n; s) = \lambda_n \int_0^s M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n; x)\,dx.$$

Jednakże

$$\lambda_n \int_0^s M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n; x)\,dx =$$

$$= \lambda_n \int_0^s \int_0^x P(\xi(u) = n-i-1 \,|\, i)\lambda_{n-1}(x-u)e^{-\lambda_n(x-u)}\,du\,dx =$$

$$= \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \int_0^s P(\xi(u) = n-i-1 \,|\, i)\,du - \frac{1}{\lambda_n} P(\xi(x) = n-i \,|\, i) -$$

$$- M_n(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n; s)$$

co kończy dowód równoważności wzorów (11) i (12).

Przykład. W szczególnym przypadku, gdy $\lambda_i = \lambda$, $i = 0, 1, \ldots$, otrzymuje się model $M/G/1$ bez sprzężenia zwrotnego. Wówczas $P(\xi(x) = n \,|\, i) = (\lambda x)^n e^{-\lambda x}/n!$ oraz

$$F_{X(n|i,s)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x} \displaystyle\int_0^{s-x} \frac{(\lambda y)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} e^{-\lambda y}\,dy & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant s, \\ 1 & \text{dla} \quad x > s, \end{cases}$$

a stąd dla $x > 0$ otrzymujemy

$$F_{X(n|i)}(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x} \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^{n-i-1} e^{-\lambda y}}{(n-i-1)!} [1 - G(x+y)]\,dy.$$

Jeżeli dodatkowo założymy, że czas obsługi jest wykładniczy $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, to

$$F_{X(n|i)}(x) = 1 - \varrho^{n-i} e^{-(\lambda+\mu)x}, \qquad \varrho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Stąd widać, że prawdopodobieństwo osiągnięcia stanu n w czasie jednej obsługi, jeśli na początku tej obsługi był stan i, jest $1 - \varrho^{n-i}$, natomiast rozkład zmiennej losowej $X(n \,|\, i)$ pod warunkiem, że $X(n \,|\, i) > 0$, jest wykładniczy z parametrem $\lambda + \mu$.

Prace cytowane

[1] I. Kopocińska, *Imbedded Markov chains in two examples of queueing models*, Zastosow. Matem. 8 (1965), str. 29-36.

[2] I. Kopocińska, *On a M/G/1 queueing model with feedback*, Zastosow. Matem. 9 (1967), str. 161-171.

[3] G. E. H. Reuter, W. Ledermann, *On the differential equations for the probabilities of Markov processes with enumerably many states*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1953), str. 247-262.

Praca wpłynęła 2. 3. 1967

И. КОПОЦИНЬСКА и Б. КОПОЦИНЬСКИ (Вроцлав)

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТКОВ ВРЕМЕНИ МЕЖДУ ПЕРЕМЕНАМИ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ $M/G/1$ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

РЕЗЮМЕ

Пусть имеется система массового обслуживания с пуассоновским потоком требований, интенсивностью которого $\lambda_n = \lambda[n(t)]$ зависит от состояния системы $n(t)$, в момент времени t и с произвольным законом распределения $G(x)$ времени обслуживания в одном канале. В работе найдены распределения (а) длины промежутков между заявкой последовательных требований, (б) длины промежутков между переменами состояний процесса $n(t)$, а также математические ожидания этих распределений. Найденные распределения зависят от состояния системы в начальном моменте промежутка и от времени обслуживания требования, которое обслуживается в этом моменте.

I. KOPOCIŃSKA and B. KOPOCIŃSKI (Wrocław)

DISTRIBUTIONS OF INTERVALS BETWEEN STATE CHANGES IN A $M/G/1$ SYSTEM WITH FEEDBACK

SUMMARY

Assume a queueing model with a Poisson arrival stream of intensity $\lambda_n = \lambda[n(t)]$ dependent upon the state $n(t)$ of the system at moment t and with a single service channel having an arbitrary service time distribution $G(x)$. The paper gives the derivations of the following distributions: (a) the distribution of length of the intervals between arrivals, (b) the distribution of lenght of the intervals between state changes of the process $n(t)$, and also, the expected values of those distributions. The derived distributions depend upon the state of the system at the initial moment of the interval and of the service time of the individual being served at the initial moment of the interval.
