ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XII, 3 (1971)

Д. Б. ГНЕДЕНКО (Москва)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛ ЭРЛАНГА

1. Классическая задача Эрланга об обслуживании с потерями получила развитие в ряде направлений благодаря работам Форте [1], Хинчина [2], Такача [4], Севастьянова [3] и др. В настоящей заметке также предлагается обобщение условий, в которых применимы известные формулы Эрланга для вероятностей состояний в системе обслуживания с потерями.

Во всех известных мне работах и поток требований, поступающих на обслуживание, и интенсивность обслуживания предполагаются стационарными, независящими от времени. Изучение же реальных процессов показывает, что, как правило, это предположение редко соответствует действительности.

Будем считать, что поступление требований и их обслуживание можно описать нестационарным процессом гибели и размножения.

2. Итак, предположим, что на n одинаковых приборов поступает неоднородный пуассоновский процесс требований с интенсивностью $\lambda(t)$. Интенсивность обслуживания $\nu(t)$ также является функцией t. Требование попавшее в систему обслуживания в момент, когда все приборы заняты, теряется. В случае же, когда в момент поступления требования имеется несколько свободных приборов, наудачу выбирается любой из них.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент t обслуживанием заняты k приборов ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Стандартным приёмом легко получить для $P_k(t)$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$P_0'(t) = -\lambda(t)P_0(t)+\nu(t)P_1(t),$$

$$(1)\qquad P_k'(t) = \lambda(t)P_{k-1}(t)-[\lambda(t)+k\nu(t)]P_k(t)+(k+1)\nu(t)P_{k+1}(t),$$

$$\text{когда}\quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$P_n'(t) = \lambda(t)P_{n-1}(t)-n\nu(t)P_n(t).$$

Кроме того при любом $t \geqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1.$$

Цель настоящей заметки состоит в доказательстве следующей теоремы:

Теорема. *Если функции* $\lambda(t)$ *и* $\nu(t)$ *таковы, что*

$$\int_0^\infty \nu(t)\,dt = \infty \tag{a}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\lambda(t)}{\nu(t)} = \varrho, \tag{b}$$

то существуют пределы

$$p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t) \tag{2}$$

и вычисляются по формулам Эрланга:

$$p_k = \frac{\varrho^k}{k!} \Big/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\varrho^i}{i!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

3. Для доказательства сформулированной теоремы в системе (1) введём новое время τ по формуле

$$\tau = \int_0^t \nu(z)\,dz.$$

Если $\overline{p}_k(\tau) = P_k(t)$, то в новых обозначениях система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \overline{p}_0'(\tau) &= -\varrho(\tau)\overline{p}_0(\tau) + \overline{p}_1(\tau), \\ \overline{p}_k'(\tau) &= \varrho(\tau)\overline{p}_{k-1}(\tau) - [\varrho(\tau)+k]\overline{p}_k(\tau) + (k+1)\overline{p}_{k+1}(\tau), \\ &\qquad\qquad \text{когда } 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \overline{p}_n'(\tau) &= \varrho(\tau)\overline{p}_{n-1}(\tau) - n\overline{p}_n(\tau), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varrho(\tau) = \lambda(t)/\nu(t)$.

По предположению $\varrho(\tau) = \varrho + \varepsilon(\tau)$, где $\lim\limits_{\tau\to\infty} \varepsilon(\tau) = 0$. Таким образом система (4) может быть записана иначе, а именно

$$\begin{aligned} \overline{p}_0'(\tau) &= -\varrho\overline{p}_0(\tau) + \overline{p}_1(\tau) - \varepsilon(\tau)\overline{p}_0(\tau), \\ \overline{p}_1'(\tau) &= \varrho\overline{p}_0(\tau) - (\varrho+1)\overline{p}_1(\tau) + 2\overline{p}_2(\tau) + \varepsilon(\tau)\big(\overline{p}_0(\tau) - \overline{p}_1(\tau)\big), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{p}_n'(\tau) &= \varrho\overline{p}_{n-1}(\tau) - n\overline{p}_n(\tau) + \varepsilon(\tau)\overline{p}_{n-1}(\tau). \end{aligned} \tag{5}$$

Станем рассматривать эту систему как неоднородную с правыми частями $f_k(\tau)$, где

$$f_0(\tau) = \varepsilon(\tau)\overline{p}_0(\tau), \quad f_1(\tau) = \varepsilon(\tau)\big(\overline{p}_0(\tau)-\overline{p}_1(\tau)\big), \quad \ldots, \quad f_n(\tau) = \varepsilon(\tau)\overline{p}_{n-1}(\tau).$$

Известно, что корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения системы (5) все различны и отрицательны.

В неоднородной системе дополнительные слагаемые выражаются через искомые функции $\overline{p}_k(\tau)$. Нам для дальнейшего важно только то, что $0 \leqslant \overline{p}_k(\tau) \leqslant 1$ при всех k.

Частное решение неоднородной системы имеет вид

$$\pi_k(\tau) = e^{r_k\tau}\int_0^\tau f_k(z)e^{-r_k z}dz.$$

Таким образом

$$\overline{p}_k(\tau) = A_k(\tau) + \pi_k(\tau),$$

где $A_k(\tau)$ является решением однородной системы.

Представим $\pi_k(\tau)$ в виде

$$\pi_k(\tau) = \frac{\int_0^\tau f_k(z)e^{-r_k z}dz}{e^{-r_k\tau}}.$$

Для нахождения предела $\pi_k(\tau)$ при $\tau \to \infty$ применяем правило Лопиталя

$$\lim_{\tau\to\infty} \pi_k(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{f_k(\tau)e^{-r_k\tau}}{-r_k e^{-r_k\tau}} = 0.$$

Из классических результатов Эрланга известно, что

$$\lim_{\tau\to\infty} A_k(\tau) = \frac{\varrho^k}{k!}\Big/\sum_{i=0}^{n}\frac{\varrho^i}{i!}.$$

И окончательно

$$p_k = \lim_{\tau\to\infty}\overline{p}_k(\tau) = \frac{\varrho^k}{k!}\Big/\sum_{i=0}^{n}\frac{\varrho^i}{i!}.$$

Тем самым теорема доказана.

Приведенная теорема может быть обобщена на ряд других интересных случаев. В частности, она будет верна для любой системы дифференциальных уравнений, в которой матрица коэффициентов такова, что корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части.

Цитированная литература

[1] R. Fortet, *Calcul des Probabilités*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1950.

[2] А. Я. Хинчин, *О формулах Эрланга в теории массового обслуживания*, Теория вероятностей и её применения 7 (1962), стр. 330-335.

[3] Б. А. Севастьянов, *Предельная теорема для марковских процессов и её приложение к телефонным системам с отказами*, там же, 2 (1957), стр. 106-116.

[4] L. Takács, *On a generalization of Erlang's formula*, Acta Mathematica Acad. Sci. Hung. 7 (1956), стр. 419-433.

Поступило в редакцию 13. 2. 1971

D. B. GNEDENKO (Moskwa)

O PEWNYM UOGÓLNIENIU WZORÓW ERLANGA

STRESZCZENIE

Autor rozpatruje system obsługi masowej z n kanałami, do którego wpływa niejednorodny w czasie poissonowski proces zgłoszeń o intensywności $\lambda(t)$. Również intensywność obsługi $\nu(t)$ w każdym kanale jest funkcją czasu t. Zakłada się stratę zgłoszeń napływających do systemu w chwili, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte.

Niech $P_k(t)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili t jest k zajętych kanałów obsługi ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). W pracy zostało udowodnione następujące

TWIERDZENIE. *Jeżeli funkcje* $\lambda(t)$ *i* $\nu(t)$ *spełniają warunki* (a) *i* (b), *to istnieją granice* (2), *które można obliczyć z wzorów Erlanga* (3).
