ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XIV, 4 (1975)

Х.-Й. РОССБЕРГ и Г. СИГЕЛЬ (Лейпциг)

НОВЫЙ МЕТОД К ИЗУЧЕНИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI/G/1$ С „РАЗОГРЕВОМ"

1. Введение. Рассмотрим сначала известную модель $GI/G/1$ теории массового обслуживания. Требования поступают в моменты $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$, величины $a_n = t_{n+1} - t_n$ независимы в совокупности и обладают одной и той же функцией распределения (ф.р.)

$$A(x) = \mathrm{P}\{a_n < x\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Длительности обслуживания требований тоже независимые в совокупности случайные величины (с.в.) β_n с ф.р.

$$B(x) = \mathrm{P}\{\beta_n < x\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Будем обозначать через W ф.р. времени ожидания в стационарном режиме. Она единственное решение интегрального уравнения типа Винера-Хопфа

$$aU(x) + W(x) = W * K(x) + a\varepsilon_0(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1.1}$$

где $a = W(+0) > 0$, ε_0 распределение, сосредоточенное в нуле и U ф.р., концентрированная на $(-\infty, 0)$. Пусть I время бездеятельности; тогда $\mathrm{P}\{-I < x\} = U(x)$ [7]. Уравнение (1.1) тесно связано с известной факторизацией разности $\varepsilon_0(x) - K(x)$. Обозначая характеристические функции (х.ф.) ф.р. $K, U, C, \ldots$ в дальнейшем кратко через $K^*, U^*, C^*, \ldots$, эта факторизация принимает вид

$$1 - K^* = (1 - U^*)(1 - H^*). \tag{1.2}$$

Если $W(x)$ существует, тогда H^* является х.ф. несобственной ф.р. (см. [10], гл. 12), т.е. $H^*(0) < 1$.

Мы будем изучать следующую разновидность этой модели: Если в момент поступления вызова система оказалась свободной, прибор приступает к обслуживанию поступившего вызова только через случайное время разогрева γ с ф.р. C. При этом нам не нужно знать ф.р. A и B. Будет достаточно предполагать, что ф.р.

$$P\{\beta_i - a_i < x\} = K(x)$$

известна. Об этой модели доложено в [6].

Мы интересуемся стационарной ф.р. ожидания $W(x)$ в модели с разогревом. По поводу условий существования мы отсылаем читателя к работам [11] и особенно к [7], где рассмотрены самые общие условия. $W'(x)$ является единственным решением уравнения

$$\beta U'(x) + W'(x) = W' * K(x) + \beta C(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.3}$$

где $\beta = W' * K(+0)$ и U' имеет значение аналогичное U в основной модели.

Впрочем решения W и W' уравнений (1.1) и (1.3), соответственно, единственно определяются этими уравнениями, если они рассматриваются только для всех $x \geqslant 0$. Это следует непосредственно из [7]. Только при аналитическом исследовании при помощи интегральных преобразований требуется рассмотрение уравнений, которые остаются в силе для всех x. К счастью в них появляются вспомогательные функции $U(x)$ и $U'(x)$, имеющие в наших моделях наглядное значение.

В [7] (см. также [9]) один из авторов доказал, что ф.р. $W'(x)$ можно представить в виде

$$W' = W * G, \tag{1.4}$$

где G тоже ф.р. с наглядным значением, $G(0) = 0$ и G единственное решение интегрального уравнения

$$\delta U'(x) + G(x) = G * U(x) + \delta C(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.5}$$

где $\delta = G * U(+0)$.

В работах [1] и [3] уравнение (1.3) исследовалось при помощи общей теории неоднородных уравнений типа Винера-Хопфа и при помощи задачи Римана, соответственно. Во всех примерах этих авторов мы узнаем представление (1.4) или, точнее, его отображение при помощи х.ф.

Наша цель — решить (1.3) более легким образом, используя представление (1.4) и уравнение (1.5). В (1.4) мы можем предполагать, что W известно, потому что имеется хорошо разработанная теория об основной модели $GI/G/1$. Особенно все случаи, в которых рациональные функции играют роль, изучались элегантным образом в [4] и [5]. Поэтому перед нами стоит только задача исследования компоненты G свертки (1.4) при помощи (1.5). Это тоже неоднородное уравнение типа Винера-Хопфа, но ядро его имеет особенное качество $U(+0) = 1$. Оно разрешает нам в доказательстве теоремы 2.1 почти непосредственно написать решение; при этом мы не используем общей теории решения (см. замечание к теореме 2). Явные формулы получаем, если $U^*(t)$ или $C^*(t)$ являются рациональными.

Отметим, что без ограничения общности можно предполагать, что $C(+0) = 0$. Именно из (1.5) следует $C(+0)\delta = G(+0)$, т.е., когда $C(+0) > 0$, мы можем положить

$$C(x) = C(+0)\varepsilon_0(x) + \big(1 - C(+0)\big)C_+(x),$$
$$G(x) = \delta C(+0)\varepsilon_0(x) + \big(1 - \delta C(+0)\big)G_+(x),$$

при чем C_+ и G_+ некоторые ф.р., где $C_+(+0) = 0$ и $G_+(+0) = 0$. Мы подставим эти представления в уравнение (1.5), которым мы пользуемся только в случае $x \geqslant 0$. Положив

$$\delta_+ = \delta\frac{1 - C(+0)}{1 - \delta C(+0)},$$

мы получаем

$$\delta_+ + G_+(x) = G_+ * U(x) + \delta_+ C_+(x) \qquad (x \geqslant 0),$$

т.е. опять интегральное уравнение вида (1.5).

2. Общее вычисление х.ф. G^* упрощенным методом. Мы выводим интегральную формулу типа Коши для G^*. Пусть при этом

$$\mathfrak{H}_+ = \{z = t + iy : y > 0\}, \qquad \mathfrak{H}_- = \{z : y < 0\}.$$

Лемма 2.1. *Если* $G(+0) = 0$, *то*

$$G^*(z) = \frac{1}{2\pi i} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^*(t)}{t - z}\,dt \qquad (z \in \mathfrak{H}_+). \tag{2.1}$$

Доказательство. Функция G^* аналитическая (а.) в области $\mathfrak{H}_+$ и также непрерывная на действительной оси. Пусть $\mathfrak{C}_R$ полукруг с центром в O с радиусом R, лежащий в $\mathfrak{H}_+$. Тогда для достаточно большого R и $z \in \mathfrak{H}_+$ мы получаем

$$G^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{-R}^{R} \frac{G^*(t)}{t - z}\,dt + \int_{\mathfrak{C}_R} \frac{G^*(s)}{s - z}\,ds\Big].$$

Так как $G^*(Re^{i\varphi}) \to 0$ $(R \to \infty)$ равномерно при $|\varphi - \pi/2| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi/2)$, то из этого следует наше утверждение.

Лемма 2.2. *Если*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ |K^*(t)| < 1, \tag{2.2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} K(x)\,dx < \infty, \tag{2.3}$$

то

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-U'^*(t)}{1-U^*(t)} - \Delta\right)\frac{dt}{t-z} = 0 \qquad (z\in\mathfrak{H}_+), \tag{2.4}$$

где $\Delta = U'(0)/U(0)$ (¹).

Доказательство. Отразим контур из леммы 2.1 от действительной оси и образуем контурный интеграл от функции

$$\left(\frac{1-U'^*(s)}{1-U^*(s)} - \Delta\right)\frac{1}{s-z}. \tag{2.5}$$

Из (2.3) следует, что существуют первые моменты от U и U'. Поэтому подинтегральная функция (2.5) является непрерывной при $s=0$. Из $z\in\mathfrak{H}_+$ вытекает, что интеграл равен нулю. В связи с (1.2) и (2.2) мы получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|U^*(t)| < 1.$$

Поэтому с подинтегральной функции (2.5) получаем

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{0}(\cdot)\,d\varphi\right| < \eta,$$

где $s = re^{i\varphi}$ и $\eta > 0$ достаточно малая величина. Таким образом мы можем доказать лемму 2.2 также как и лемму 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.2), (2.3) *и* $C(+0) = 0$. *Тогда*

$$G^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\delta VP \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{C^*(t)-1}{1-U^*(t)} + \Delta\right)\frac{dt}{t-z}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Уравнение (1.5) эквивалентно соотношению

$$G^*(t) = \delta\,\frac{C^*(t)-U'^*(t)}{1-U^*(t)} \tag{2.7}$$

(¹) Здесь ф.р. — непрерывная слева.

или

$$\delta^{-1}G^*(t) = \frac{C^*(t)-1}{1-U^*(t)} + \Delta + \left(-\Delta + \frac{1-U'^*(t)}{1-U^*(t)}\right).$$

С помощью лемм 2.1 и 2.2 получаем (2.6).

Замечание. Применяя наш метод к (1.3), получим

$$W^*(z) = a + \frac{1}{2\pi i}\, VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W^*(t)-a}{t-z}\,dt,$$

где

$$W^*(t) = a + \frac{1-U^*(t)}{1-K^*(t)}.$$

Эта формула является неудовлетворительной, так как в этом случае мы хотим выразить W^* только при помощи K^*, а не при помощи K^* и U^*, где U^* зависит от K^*.

Для различных важных частных случаев мы можем воспользоваться следующей теоремой. Здесь напомним о определении аналитической х.ф. (а.х.ф.). Функция $f(z)$— а.х.ф., если $f(z)$ является аналитической в круге $|z| < r$ для некоторого $r > 0$. В этом случае f также аналитическо в полосе

$$\Gamma = \{z : |y| < r,\ z = t+iy\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.2) *и* (2.3) *и пусть* $C^*(z)$ *а.х.ф. с областью регулярности* $\mathfrak{H}_{\lambda_1} = \{z : y > -\lambda_1\}$ $(\lambda_1 > 0)$. *Тогда для* $z \in \mathfrak{H}_- \cap \mathfrak{H}_{\lambda_1}$ *имеем*

$$G^*(z) = \delta\left(\frac{C^*(z)-1}{1-U^*(z)} + \Delta\right) + \frac{\delta}{2\pi i}\, VP \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{C^*(t)-1}{1-U^*(t)} + \Delta\right)\frac{dt}{t-z}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала (2.7). Поскольку C^* а.х.ф., мы видим, что G^* является а.х.ф. и области регулярности функций G^* и C^* равны (см. также [2]). Аналогично (2.1) и (2.4) для $0 < \lambda < \lambda_1$ имеем

$$G^*(z) = \frac{1}{2\pi i} VP \int_{-\infty-i\lambda}^{\infty-i\lambda} \frac{G^*(s)}{s-z}\,ds \qquad (z \in \mathfrak{H}_\lambda) \tag{2.9}$$

и

$$VP \int_{-\infty-i\lambda}^{\infty-i\lambda} \left(\frac{1-U'^*(t)}{1-U^*(t)} - \Delta\right)\frac{ds}{s-z} = 0 \qquad (z \in \mathfrak{H}_\lambda \cap \mathfrak{H}_-), \tag{2.10}$$

соответственно.

Теперь мы можем воспользоваться (2.7) в области $\mathfrak{H}_\lambda \cap \mathfrak{H}_-$. Из (2.9) находим

$$G^*(z) = \frac{\delta}{2\pi i} VP \int_{-\infty-i\lambda}^{\infty-i\lambda} \frac{C^*(s) - U'^*(s)}{1 - U^*(s)} \frac{ds}{s-z} \qquad (z \in \mathfrak{H}_\lambda).$$

Теперь из (2.10) следует

$$G^*(z) = \frac{\delta}{2\pi i} VP \int_{-\infty-i\lambda}^{\infty-i\lambda} \left(\frac{C^*(s) - 1}{1 - U^*(s)} + \Delta \right) \frac{ds}{s-z}.$$

В силу формулы Коши для замкнутого контура из $\mathfrak{H}_\lambda \cap \mathfrak{H}_-$ имеем уравнение (2.8).

3. Рациональные специальные случаи для U^* и C^*, соответственно. Вычислим интегралы (2.6) и (2.8) в некоторых простых случаях. Пусть $K^*(z) = K^*_-(z) + K^*_+(z)$, где K^*_- и K^*_+ являются аналитическими в $\mathfrak{H}_-$ и $\mathfrak{H}_+$, соответственно. Кроме того, пусть K^*_- — рациональная ф.р. с полюсами $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathfrak{H}_+$. В силу (1.2) U^* рационально и все полюсы функции K^* совпадают с полюсом K^*_- в $\mathfrak{H}_+$ (см. [5]). Поэтому имеем

$$(3.1) \qquad \begin{gathered} 1 - U^*(z) = izm_U \frac{P_1(z)}{P_2(z)}, \\ P_1(z) = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{z}{\pi_j}\right), \qquad P_2(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{r_j}\right), \\ \pi_j \in \mathfrak{H}_+ \ (j = 1, 2, \ldots, n-1), \ r_j \in \mathfrak{H}_+ \ (j = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered}$$

где π_j являются нулями $1 - K^*(z)$ и $1 - U^*(z)$ в $\mathfrak{H}_+$ (см. [5] или (1.2)). Для упрощения рассуждений предположим, что все нули π_j являются однократными.

Теорема 3.1. *Пусть K^*_- рациональна. Тогда при любых $z \in \mathfrak{H}_+$ имеем*

$$(3.2) \qquad G^*(z) = \delta \left[\Delta_1 + \frac{1 - C^*(z)}{iz|m_U|} \frac{\prod_{j=1}^{n} (1 - z/r_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} (1 - z/\pi_j)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{U_j}{(1 - z/\pi_j)} \right],$$

где $\Delta_1 = \big(U'(0) + 1\big)/2U(0)$ и $U_j/(1 - z/\pi_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ — вычет функции

$$\frac{C^*(s) - 1}{1 - U^*(s)} \frac{1}{s-z}$$

в точке $s = \pi_j$.

Замечание. Для $|m_U|$ мы также можем использовать $|m_U| = |m_K| a$, где $a = W(+0)$.

Доказательство. Если K^*_- рационально, то очевидно следует (2.2) и (2.3). В силу (2.6) имеем

$$G^*(z) = \frac{\delta}{2\pi i} VP \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{C^*(t)-1}{1-U^*(t)} + \frac{1}{U(0)} \right) \frac{1}{t-z} dt + \frac{\delta}{2} \frac{U'(0)-1}{U(0)}.$$

Принимая во внимание (3.1) и по теореме о вычетах получим, следовательно, что контурный интеграл по $\mathfrak{C}_R$ (где $\mathfrak{C}_R$ — полукруг с радиусом R) стремится к нулю при $R \to \infty$, и для всех $z \in \mathfrak{H}_+ \setminus \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}\}$ имеет место

$$G^*(z) = \delta\Delta_1 + \delta \frac{C^*(z)-1}{1-U^*(z)} + \delta \sum_{j>1}^{n-1} \frac{U_j}{1-z/\pi_j}. \tag{3.3}$$

Это равенство эквивалентно нашему утверждению.

Замечание. Из (3.2) и (1.5) мы получаем представление для $U'^*(z)$ в виде

$$U'^*(z) = f(C^*, U_j, \pi_j, r_j, |m_U|, \Delta_1).$$

Теперь мы можем найти интересную формулу для $G^*(z)$. Применяя теорему 2.2, получим представление для $G^*(z)$, если $C^*(z)$ рационально. Используя соотношения

$$C^*(z) - 1 = \frac{C_1(z)}{C_2(z)} m_C iz, \tag{3.4}$$

$$C_1(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{p_j}\right), \qquad C_2(z) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{q_j}\right)^{d_j},$$

мы сформулируем следующую теорему:

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (2.2) *и* (2.3) *и пусть* C^* *рационально; используя* p_j *и* q_j *из* (3.4), *получаем*

$$G^*(z) = \delta \left(\Delta_2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{(1-z/q_j)^{d_j}} \right), \tag{3.5}$$

где $C_j/(1-z/q_j)^{d_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *вычет функции*

$$\frac{C^*(s)-1}{1-U^*(s)} \frac{1}{s-z}$$

в точке $s = q_j$.

Доказательство. Из (2.8) следует

$$G^*(z) = \frac{\delta}{2\pi i} VP \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{C^*(t)-1}{1-U^*(t)} + \frac{1}{U(0)}\right)\frac{1}{t-z}\,dt - \frac{\delta}{2}\left(\Delta - \frac{1}{U(0)}\right) + $$

$$+ \delta\Delta + \delta\frac{C^*(z)-1}{1-U^*(z)} \qquad (z \in \mathfrak{H}_- \setminus \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}).$$

Если $\Delta_2 = \big(U'(0)-1\big)/2U(0)$, то по теореме о вычетах получим

$$G^*(z) = \delta\left(\Delta_2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{(1-z/q_j)^{d_j}}\right),$$

где $C_j/(1-z/q_j)^{d_j}$ — вычет функции

$$\frac{C^*(s)-1}{1-U^*(s)}\,\frac{1'}{s-z}$$

в точке $s = q_k$.

Замечания. 1. Полагая (1.5) и (3.5), находим представление для $U'^*(z)$ в виде

$$U'^*(z) = f\big(U^*(z), C_j, q_i, p_j, m_C, \Delta_2\big).$$

2. При известном $K^*(z)$ функция $U^*(z)$, вообще говоря, неизвестна. Но в различных специальных случаях $U^*(z)$ является известным (см. пример в теореме 3.1). Если $K^*_+(z)$ (или $B^*(z)$) рационально, то $H^*(z)$ обладает тем же свойством. В частности, в модели $GI/M/1$ с параметром λ имеет место

$$U^*(z) = K(0)\big(K^*_-(z) + \lambda |m_{K_-}| \hat{K}^*_-(z)\big),$$

где

$$\hat{K}^*_-(z) = \frac{K^*_-(z)-1}{iz|m_{K_-}|}$$

(см. [10], XII, § 4).

4. Примеры.

1. Пусть

$$K^*_-(z) = K(0)\frac{\lambda}{\lambda + iz} \qquad (\lambda > 0)$$

(очевидно, это K^*_- мы получим для модели $M/G/1$). Отсюда (см. [5], стр. 137) следует

$$1 - U^*(z) = \frac{iz(m_U)}{1 - z/i\lambda} \qquad (|m_U| = 1/\lambda).$$

$U(x)$ — непрерывно. Поэтому $U(0) = 1$ и $U'(0) = 1$. Из (3.2) следует

$$G^*(z) = \delta\big(C^*(z) + \lambda C_1^*(z) m_C\big),$$

$$C_1^*(z) = \frac{C^*(z)-1}{izm_C}, \qquad \delta = (1+\lambda m_C)^{-1}.$$

Кроме того получим

$$U'^*(z) = \frac{\lambda}{\lambda+iz}, \qquad \text{т.е. } U'^*(z) = U^*(z).$$

2. Пусть

$$K_-^*(z) = K(0)\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k+iz}, \qquad 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n, \quad \sum_{k=1}^{n} b_k = 1.$$

В этом случае U' и U — непрерывны, т.е. $\Delta_1 = 1$. Применяя [5] к нулям $i\xi_1, i\xi_2, \ldots, i\xi_m$ функции $K(0) - K_-^*(z)$, получим

$$0 < \xi_1 < \lambda_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < \lambda_m.$$

С помощью

$$1 - K^*(z) = \big(K(0) - K_-^*(z)\big) + 1 - K(0) - K_+^*(z)$$

для корней $i\zeta_1, i\zeta_2, \ldots, i\zeta_m$ функции $1 - K^*(z)$ получим

$$0 < \zeta_1 < \lambda_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_m < \lambda_m.$$

Тогда

$$G^*(z) = \delta\Bigg\{1 + \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{z}{i\lambda_j}\right)\left(\frac{1-C^*(z)}{iz|m_U|}\right)\prod_{j=2}^{m}\left(1-\frac{z}{i\zeta_j}\right) + $$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1-C^*(i\lambda_k)}{\lambda_k|m_U|}\left[\prod_{j=2}^{m}\left(1-\frac{\lambda_k}{\zeta_j}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\left(\frac{1-z/i\lambda_j}{1-\lambda_k/\lambda_j}\right)\right]\Bigg\}.$$

3. Пусть

$$C^*(z) = \frac{\lambda}{\lambda - iz} \qquad (\lambda > 0).$$

В силу непрерывности C следует $\Delta_2 = 0$. Из $m_C = 1/\lambda$ легко видеть, что $iqm_C = 1$. Наконец, получаем

$$G^*(z) = \frac{\lambda}{\lambda - iz} \qquad (\delta = [1 - U^*(-i\lambda)]).$$

4. Пусть

$$C^*(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iz}\right)^r.$$

Здесь, как и раньше, имеем $\Delta_2 = 0$. Кроме того

$$C^*(z)-1 = \frac{izm_C}{[1-z/(-i\lambda)]^r}\prod_{j=2}^{r}\left(1-\frac{z}{(-i\lambda)(1-z_j)}\right),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_r$ — единичные корни степени r. В силу

$$iqm_C = i(-i\lambda)\frac{r}{\lambda} = r$$

следует

$$G^*(z) = \frac{\delta r\prod_{j=2}^{r}[1-1/(1-z_j)]}{|1-U^*(-i\lambda)|\,|1+z/i\lambda|^r}, \qquad \delta = \frac{1-U^*(-i\lambda)}{r\prod_{j=2}^{r}[1-1/(1-z_j)]}.$$

5. Пусть

$$C^*(z) = \sum_{l=1}^{m} a_l\frac{\lambda_l}{\lambda_l-iz},$$

$$\sum_{l=1}^{m} a_l = 1,\ a_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m.$$

Снова имеем $\Delta_2 = 0$. Для нулей $-i\eta_1$, $-i\eta_2, \ldots, -i\eta_m$ функции $1-C^*(z)$ в $\mathfrak{H}_-$ имеет место (см. [5])

$$\eta_1 < \lambda_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_m < \lambda_m, \qquad \eta_1 = 0.$$

Таким образом

$$G^*(z) = \delta\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{\lambda_k-iz}C_k,$$

где

$$C_k = \frac{\lambda_k m_C\prod_{j=2}^{m}(1-\lambda_k/\eta_j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_k/\lambda_j)[1-U^*(-\lambda_k)]},$$

$$m_C = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{\lambda_k}, \qquad \delta = \left(\sum_{k=1}^{m}C_k\right)^{-1}.$$

По индукции имеем $C_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Цитированная литература

[1] И. Гергей, *Однолинейная система обслуживания с „разогревом"*, Вычислительные методы и программирование 9 (1967), стр. 99-107.

[2] M. Dewess, *Erhaltungssätze im Modell GI/G/1 mit verzögertem Bedienungsbeginn*, Math. Operationsforsch. Statistik 6 (1975), стр. 427-436.

[3] П. Г. Петров, *Распределение времени ожидания в стационарном режиме для одной системы обслуживания с „разогревом"*, Вычислительные методы и программирование 9 (1967), стр. 117-130.

[4] H.-J. Rossberg, *Eine neue Methode zur Behandlung der Lindleyschen Integralgleichung und ihrer Verallgemeinerung durch Finch*, Elektr. Informationsverarbeitung und Kybernetik 3 (1967), стр. 215-238.

[5] — *Ausbeutung einer bekannten Wiener-Hopf-Faktorisierung beim Wartemodell G/G/1 und einer mit ihm zusammenhängenden Irrfahrt*, Math. Operationsforsch. Statistik 2 (1971), стр. 129-146.

[6] — und G. Siegel, *The GI/G/1 model with warming-up time*, Zastosow. Matem. 14 (1974), стр. 17-26.

[7] G. Siegel, *Verallgemeinerung einer Irrfahrt im R^1 und deren Bedeutung für Bedienungssysteme mit verzögertem Bedienungsbeginn*, Math. Operationsforsch. Statistik 5 (1974), стр. 465-486.

[8] — *The stationary waiting time and other variables in single-server queues with specialities at the beginning of a busy period*, Zastosow. Matem. 13 (1973), стр. 465-479.

[9] — *Über zwei Wartemodelle mit Besonderheiten beim Beginn einer Besetztperiode*, Диссертация, Лейпциг 1973.

[10] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения*, Москва 1967.

[11] P. D. Finch, *A probability limit theorem with application to a generalization of queueing theory*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959), стр. 317-325.

Поступило в редакцию 15. 2. 1974

H.-J. ROSSBERG i G. SIEGEL (Leipzig)

NOWA METODA OKREŚLENIA ROZKŁADU CZASU OCZEKIWANIA W WARUNKACH STACJONARNOŚCI DLA SYSTEMU OBSŁUGI MASOWEJ *GI/G/1* Z „ROZGRZEWANIEM"

STRESZCZENIE

W pracy podaje się ogólny wzór na stacjonarny rozkład czasu oczekiwania dla systemu obsługi masowej $GI/G/1$ z rozgrzewaniem. Stosuje się metodę uproszczoną, nie korzystającą z ogólnej teorii niejednorodnych równań całkowych typu Wienera-Hopfa.