ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVI, 2 (1978)

Z. BUĆKO (Radom)

ÜBER BESTIMMTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DER THEORIE DER STOCHASTISCHEN PROZESSE

1. Einleitung. In der Theorie der stochastischen Prozesse, und besonders in der Theorie der Massenbedienung, erhält man endliche oder unendliche Differentialgleichungssysteme in der Form

$$P'_n(t) = u_{n-1}P_{n-1}(t)+w_nP_n(t)+v_{n+1}P_{n+1}(t), \tag{1}$$

wo u_n, w_n, v_n gegebene Funktionen mit diskretem Argument und $P_n(t)$ eine endliche oder unendliche unbekannte Folge realwertiger Funktionen, für $t \in \langle 0, \infty)$ bestimmt, sind. Man verlangt, dass die Funktion $P_n(t)$ — als Wahrscheinlichkeit dessen, dass sich im Moment t das System in bestimmten Bedingungen im Zustand n befindet — die Bedingung

$$\sum_n P_n(t) = 1 \tag{2}$$

und die Anfangsbedingungen

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & (n = i), \\ 0 & (n \neq i) \end{cases} \tag{3}$$

erfülle. Ausserdem wirft man bestimmte zusätzliche Bedingungen auf, die sich aus der Spezifik des gestellten Problems ergeben.

Die Gleichungstheorie der Form (1) ist ziemlich kompliziert und sogar im Falle linearer Funktionen u_n, w_n und v_n (und mit solchen haben wir es in der Praxis meistens zu tun) bedient sie sich eines sehr ausgebauten mathematischen Apparats.

Wir demonstrieren, gestützt auf stationäre Lösungen, elementare Methoden von Gleichungslösungen des Typs (1) mit linearen Koeffizienten gegen n. Wir werden also das — endliche oder unendliche — Gleichungssystem prüfen

$$P'_n(t) = (an+b)P_{n-1}(t)-(cn+d)P_n(t)+(fn+g)P_{n+1}(t), \tag{4}$$

wo a, b, c, d, f und g bestimmte Konstanten sind; dabei erfüllen die Funktionen $P_n(t)$ die Bedingungen (2) und (3) und bestimmte Zusatzbedingungen.

In vielen stochastischen Prozessen trifft eine sehr wichtige Eigenschaft auf, die darauf beruht, dass $P_n(t)$ bei $t \to \infty$ nach endlichen Grenzen p_n streben, wo p_n feste Zahlen sind, unabhängig vom Anfangszustande, in dem sich das System befand. Die Zahlen p_n haben die Bezeichnung *stationäre* [1] oder *Grenzlösungen* des Systems (4). Eine Konsequenz der Existenz von stationären Lösungen

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

ist

$$\lim_{t\to\infty} P_n'(t) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Es ergibt sich aus den Bedingungen (5) und (6), dass die diskreten Funktionen p_n die Differenzengleichung

$$(an+b)p_{n-1} - (cn+d)p_n + (fn+g)p_{n+1} = 0 \tag{7}$$

erfüllen.

Die Lösungsmethoden der Differenzengleichung (7) sind in der Fachliteratur umfangreich beschrieben. Deshalb werden wir die fertigen Lösungen der Gleichung (7) benutzen.

Satz 1. *Wenn die Gesamtlösung p_n der linearen Differenzengleichung*

$$(an+b)p_{n-1} - (cn+d)p_n + (fn+g)p_{n+1} = 0 \qquad (n > 0) \tag{8}$$

die Bedingung

$$(fn+g)p_{n+1} = (Fn+G)p_n \tag{9}$$

erfüllt, wo a, b, c, d, f, g, F und G bestimmte Konstanten sind, so besteht die Gesamtlösung der Differential-Differenzengleichung

$$P_n'(t) = (an+b)P_{n-1}(t) - (cn+d)P_n(t) + (fn+g)p_{n+1}(t) \qquad (n > 0) \tag{10}$$

aus Funktionen der Form

$$P_n(t) = p_n u(t)[x(t)]^n, \tag{11}$$

wo

$$u(t) = \begin{cases} B\left[1+(F-c)A\exp\left((2F-c)t\right)\right]^{(G-d)/(F-c)}\left[1-AF\exp\left((2F-c)t\right)\right]^{-G/F} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (F(2F-c)(F-c) \neq 0), \\ B(Ft-A-1)^{(d-G)/F}(Ft-A)^{-G/F} \qquad (c = 2F \neq 0), \\ B[1-A\exp(Ft)]^{-G/F}\exp[(Gc-Fd)AF^{-2}e^{Ft}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (F = c \neq 0), \\ B\left[\left(1+\exp(-ct)\right)\exp(ct)\right]^{(d-G)/Ac}\exp[(AG-d)t+AGc^{-1}\exp(-ct)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (F = 0), \\ B\exp\left[\left(AG-d+(d-G)A^{-1}\right)t\right] \qquad (F = c = 0), \end{cases} \tag{12}$$

$$(13)\quad x(t) = \begin{cases} [1+(F-c)A\exp((2F-c)t)][1-AF\exp((2F-c)t)]^{-1} & (c \neq 2F), \\ 1+(A-Ft)^{-1} & (c = 2F \neq 0), \\ A & (F = c = 0); \end{cases}$$

A und B sind beliebige Konstanten.

Beweis. Wir suchen die Lösung des Systems (10) in der Form des Produkts (11), wo p_n die Lösung der Gleichung (8) ist, die die Bedingung (9) erfüllt, dagegen sind $u(t)$ und $x(t)$ unbekannte von n unabhängige Funktionen der Veränderliche t. Indem wir die Funktion (11) in die Gleichung (10) einsetzen, erhalten wir die Abhängigkeit

$$p_n n x'(t)u(t) + p_n x(t)u'(t) = (an+b)p_{n-1}u(t) - (cn+d)p_n x(t)u(t) + (fn+g)p_{n+1}(x(t))^2 u(t).$$

Nach Berücksichtigung der Voraussetzungen (8) und (9) wird die letzte Gleichung die folgende Gestalt annehmen:

$$(14)\quad n[x'(t)-(c-F)+cx(t)-F(x(t))^2]+x(t)u'(t)(u(t))^{-1} = d-G-dx(t)+G(x(t))^2.$$

Aus der Gleichung (14) folgt, dass die Funktion (11) die Lösung des Systems (10) dann und nur dann sein kann, wenn $u(t)$ und $x(t)$ die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$(15)\quad x'(t) = F(x(t))^2 - cx(t) + c - F,$$

$$(16)\quad x(t)u'(t)(u(t))^{-1} = G(x(t))^2 - dx(t) + d - G$$

sind.

Ist $c \neq 2F$, dann nimmt die Gleichung (15) die Form

$$[(x-1)^{-1} - F(Fx+F-c)^{-1}]dx = (2F-c)dt$$

an. Daraus erhalten wir die allgemeine Lösung der Gleichung als

$$x(t) = [1+(F-c)A\exp((2F-c)t)][1-AF\exp((2F-c)t)]^{-1}, \quad A = \text{konstant}.$$

Für $c = 2F$ ist die allgemeine Lösung der Gleichung (15) die Funktion

$$x(t) = 1+(A-Ft)^{-1}.$$

Aus dem Gleichungssystem (15) und (16) erhalten wir die Abhängigkeit

$$Fu'(t)(u(t))^{-1} = Gx'(t)(x(t))^{-1} + (Gc-Fd)[1-(x(t))^{-1}].$$

Da für $F \neq c$ gilt

$$\int \left[1-\left(x(t)\right)^{-1}\right]dt = (F-c)^{-1}\ln\left|1+A(F-c)\exp\left((2F-c)t\right)\right|,$$

daher ist

$$F\ln|u(t)| = G\ln|x(t)|+(Gc-Fd)(F-c)^{-1}\ln\left|1+A(F-c)\exp\left((2F-c)t\right)\right|+$$
$$+F\ln|B|, \quad B = \text{konstant}.$$

Daraus ergibt sich (12) für $F \neq c,\ \frac{1}{2}c,\ 0$.

Ist $c = 2F \neq 0$, dann gilt

$$u(t) = B(Ft-A-1)^{(d-G)/F}(Ft-A)^{-G/F}.$$

Für $F = c \neq 0$ ist $1-x^{-1} = A\exp(Ft)$ und

$$Fu'u^{-1} = Gx'x^{-1}+(Gc-Fd)A\exp(Ft).$$

Daraus folgt

$$u(t) = B[1-A\exp(Ft)]^{-G/F}\exp[A(Gc-Fd)F^{-2}\exp(Ft)].$$

Es ist leicht zu prüfen, dass für $F = 0$, $c \neq 0$ gilt

$$u(t) = B[1+\exp(-ct)\exp(ct)]^{(d-G)/Ac}\exp[(AG-d)t-AGc^{-1}\exp(-ct)],$$

dagegen für $F = c = 0$ gilt

$$u(t) = B\exp\left[\left(AG-d+(d-c)A^{-1}\right)t\right],$$

was den Beweis schliesst.

Die Funktion (11) ist nur die allgemeine Lösung der Gleichung (10). In konkreten Problemen wählen wir die in der Konstruktion der Funktionen (12) und (13) figurierenden Konstanten A und B derart, dass die aufgeworfenen Bedingungen, die aus der Spezifik der gestellten Probleme hervorgehen, erfüllt sind. Wir gehen zur Betrachtung von konkreten Problemen aus der Theorie stochastischer Prozesse über.

2. System mit unbegrenzter Linienzahl. Wenn zum Massenbedienungssystem, das aus einer unbegrenzten Linienzahl besteht, der einfachste, unbeschränkte Strom von Meldungen mit der Intensität b herankommt, dagegen die Bedienungszeit einer Meldung der Poissonschen Verteilung mit der Intensität c unterliegt, dann erfüllt die Funktion $P_n(t)$, die die Wahrscheinlichkeit dessen ausdrückt, dass sich im Augenblick t im System genau n besetzte Linien befinden, die Differential-Differenzen-Gleichung

$$(17) \qquad P_n'(t) = bP_{n-1}(t)-(cn+b)P_n(t)+c(n+1)P_{n+1}(t) \qquad (n > 0)$$

mit der Anfangsbedingung

$$(18) \qquad P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad (n > 0)$$

und den Bedingungen

(19) $$P_0'(t) = -bP_0(t) + cP_1(t),$$

(20) $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1.$$

Wir werden die Lösung der Gleichung (17) angeben. Die stationäre Lösung der Gleichung (17) drückt sich durch die Formel ([1], S. 182)

(21) $$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{b}{c}\right)^n \exp\left(-\frac{b}{c}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

aus und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 1 (Zusammenhang mit (9)),

(22) $$c(n+1)p_{n+1} = bp_n,$$

wobei man setzt $F := 0$, $G := b$, $d := b$ und $c := c$. Aus (12) und (13) erhalten wir die Formeln

$$x(t) = 1 - A\exp(-ct),$$
$$u(t) = B\exp[b(A-1)t + Abc^{-1}\exp(-ct)].$$

Die Anfangsbedingung (18) wird für $A = 1$ und $B = 1$ erfüllt sein. Daraus folgt auf Grund der Formel (11), dass

$$P_n(t) = p_n[1-\exp(-ct)]^n \exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \quad (n \geqslant 1).$$

Es ist leicht zu prüfen, dass die aus der letzten Formel bestimmte Funktion $P_0(t)$ auch die Bedingung (19) und die letzte der Bedingungen (18) erfüllt. Bedingung (20) ist auch erfüllt.

Zusammenstellend können wir die Behauptung aussagen:

Satz 2. *Die Lösung des Differentialgleichungssystems* (17) *und* (19), *die die Bedingungen* (18) *und* (20) *erfüllt, ist die Funktion*

$$P_n(t) = p_n[1-\exp(-ct)]^n \exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo p_n eine durch die Formel (21) *bestimmte diskrete Funktion ist.*

3. System mit begrenzter Linienzahl. Wenn zum Massenbedienungssystem, das aus k Linien besteht, der einfachste unbegrenzte Strom von Meldungen mit der Intensität b herankommt, dagegen die Bedienungszeit einer Meldung der Exponentialverteilung mit der Intensität c unterliegt, so erfüllt die Funktion $P_n(t)$, die die Wahrscheinlichkeit dessen ausdrückt, dass sich im Moment t im System genau n besetzte Linien befinden, das endliche Gleichungssystem

$$(23)\qquad P'_n(t) = bP_{n-1}(t) - (cn+b)P_n(t) + c(n+1)P_{n+1}(t) \qquad (1 < n < k),$$

$$(24)\qquad P'_0(t) = -bP_0(t) + cP_1(t),$$

$$(25)\qquad P'_k(t) = bP_{k-1}(t) - ckP_k(t)$$

mit der Anfangsbedingung

$$(26)\qquad P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad (n > 0).$$

Ausserdem soll $P_n(t)$ als Wahrscheinlichkeit die Bedingung

$$(27)\qquad \sum_{n=0}^{k} P_n(t) = 1$$

erfüllen.

Die stationäre Lösung benutzend, geben wir die Integrale der Gleichungen (23)-(25) an.

Die stationäre Lösung

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t),$$

d. h. die Lösung der Differenzengleichung

$$(28)\qquad bp_{n-1} - (cn+b)p_n + c(n+1)p_{n+1} = 0 \quad (1 \leqslant n < k),$$

mit den Randbedingungen

$$(29)\qquad p_0 = cb^{-1}p_1,$$

$$(30)\qquad p_k = bck^{-1}p_{k-1},$$

drückt sich durch die Formel ([1], S. 162)

$$(31)\qquad p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{b}{c}\right)^n p_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

aus, wo

$$(32)\qquad p_0 = \left[\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!}\left(\frac{b}{c}\right)^m\right]^{-1}.$$

Die diskrete Funktion p_n erfüllt die Voraussetzungen (22) des Satzes 1. Ausserdem ist das System (23) für $1 \leqslant n < k$ mit dem System (17) identisch. Daraus folgt der Schluss: *die Lösung des Systems* (23) *ist eine Funktion der Form*

$$(33)\qquad P_n(t) = p_n[1-\exp(-ct)]^n \exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \quad (1 \leqslant n < k),$$

wo p_n durch die Formeln (31) *und* (32) *bestimmt ist.*

Die Funktion (33) erfüllt die zweite von den Bedingungen (26):

$$P_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n \quad (n > 0).$$

Die erhaltene Funktion (33) in die Gleichung (24) einsetzend, erhalten wir die Differentialgleichung

$$P_0'(t) = -bP_0(t)+cp_1[1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \tag{34}$$

die $P_0(t)$ ermitteln lässt. Das singuläre Integral der Gleichung (34), das die erste von den Bedingungen (26) erfüllt, ist die Funktion

(35)

$$P_0(t) = \exp(-bt)\left\{1+bp_0\int_0^t [1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]\exp(bt)dt\right\}.$$

Die Funktion $P_k(t)$ bestimmen wir aus der Bedingung (25) die zur folgenden linearen Differentialgleichung führt:

$$P_k'(t) = -ckP_k(t)+bp_{k-1}[1-\exp(-ct)]^{k-1}\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right].$$

Das singuläre Integral dieser Gleichung, das die Bedingungen

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k, \quad P_k(0) = 0$$

erfüllt, ist die Funktion

(36)

$$P_k(t)=p_k ck\exp(-ckt)\int_0^t [1-\exp(-ct)]^{k-1}\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]\exp(ckt)dt.$$

Man beweist noch, dass die durch die Formeln (35), (33) und (36) bestimmten Funktionen die Bedingung (27) erfüllen. Tatsächlich, aus (23), (24) und (25) folgt, dass die Funktion

$$F(t) = \sum_{m=0}^{k} P_m(t)$$

eine Ableitung identisch gleich Null hat, dabei $F(0) = 1$. Daher ist

$$\sum_{m=0}^{k} P_m(t) = F(t) = 1.$$

Unsere Betrachtungen können wir mit der folgenden Behauptung schliessen.

SATZ 3. *Die Lösung des Gleichungssystems* (23), (24) *und* (25), *die die Bedingungen* (26) *und* (27) *erfüllt, sind die Funktionen*

$$P_n(t) = \begin{cases} \exp(-bt)\left\{1 + bp_0 \int\limits_0^t [1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]\exp(bt)\,dt\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 0), \\ p_n[1-\exp(-ct)]^n \exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \quad (1 \leqslant n < k), \\ p_k ck \exp(-ckt) \int\limits_0^t [1-\exp(-ct)]^{k-1} \exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]\exp(ckt)\,dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = k), \end{cases}$$

wo p_k durch die Formeln (31) *und* (32) *bestimmt ist*; *dabei gilt die Gleichheit*

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

4. Wartezeitsystem. Wenn zum System, das aus k Bedienungslinien besteht, ein begrenzter Strom von Meldungen herankommt (d.h. im System können sich gleichzeitig höchstens m Meldungen befinden), unterliegt die Bedienungszeit einer Meldung der Exponentialverteilung mit der Intensität c und beträgt die Intensität des Meldungsstromes b, dann erfüllt die Funktion $P_n(t)$, die die Wahrscheinlichkeit dessen ausdrückt, dass sich im Moment t im System genau n Meldungen befinden, die Differentialgleichungen

$$P_n'(t) = (m-n+1)b\,P_{n-1}(t) - [(m-n)b + nc]P_n(t) + (n+1)cP_{n+1}(t) \qquad (0 < n < k), \tag{37}$$

$$P_n'(t) = (m-n+1)bP_{n-1}(t) - [(m-n)b + ck]P_n(t) + ckP_{n+1}(t) \qquad (k \leqslant n < m), \tag{38}$$

$$P_0'(t) = -bmP_0(t) + cP_1(t), \tag{39}$$

$$P_m'(t) = bP_{m-1}(t) - ckP_m(t); \tag{40}$$

dabei sollen die Bedingungen

$$P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad (n > 0), \tag{41}$$

$$\sum_{n=0}^{m} P_n(t) = 1 \tag{42}$$

erfüllt sein.

Mit Hilfe stationärer Lösungen geben wir Integrale des Differentialgleichungssystems (37)-(40) an.

Die stationären Lösungen

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P(t)$$

der Differentialgleichungen (37)-(40) drücken sich durch die folgenden Formeln ([1], S. 206) aus:

$$(43)\qquad p_n = \begin{cases} \dfrac{m!}{n!(m-n)!}\left(\dfrac{b}{c}\right)^n p_0 & (1 \leqslant n \leqslant k), \\ \dfrac{m!}{k^{n-k}k!(m-n)!}\left(\dfrac{b}{c}\right)^n p_0 & (k_0 < n \leqslant m), \end{cases}$$

wo

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{k} \frac{m!}{n!(m-n)!}\left(\frac{b}{c}\right)^n + \sum_{n=k+1}^{m} \frac{m!}{k^{n-k}k!(m-n)!}\left(\frac{b}{c}\right)^n\right]^{-1}.$$

Die Funktion (43) erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 1 (Formel (9)):

$$(n+1)cp_{n+1} = (m-n)bp_n \qquad (0 \leqslant n < k),$$

$$ckp_{n+1} = (m-n)bp_n \qquad (k \leqslant n < m);$$

dabei ist $F := -b$, $G: = bm$,

$$c := \begin{cases} c-b & (0 \leqslant n < k), \\ -b & (k \leqslant n < m), \end{cases}$$

$$d := \begin{cases} bm & (0 \leqslant n < k), \\ ck+bm & (k \leqslant n < m). \end{cases}$$

Aus (12) und (13) erhalten wir die Formeln

$$x(t) = \begin{cases} [1-Ac\exp(-(b+c)t)]\,[1+Ab\exp(-(b+c)t)]^{-1} & (0 < n < k), \\ [1-A\exp(-bt)]^{-1} & (k < n < m), \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} B[1+Ab\exp(-(b+c)t)]^m & (0 < n < k), \\ B[1-A\exp(-bt)]^m \exp[Ackb^{-1}\exp(-bt)] & (k < n < m). \end{cases}$$

Indem wir annehmen $A = C^{-1}$, $B = 1$, erhalten wir

$$P_n(t) = p_n[1-\exp(-(b+c)t)]^n\left[1+\frac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\right]^{m-n} \qquad (0 < n < k)$$

wobei

$$P_n(0) = 0 \ (n > 0), \qquad \lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n.$$

Indem wir die Differentialgleichung (39) lösen, in welcher ist

$$P_1(t) = p_1[1-\exp(-(b+c)t)]\left[1+\frac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\right]^{m-1}$$

mit der Anfangsbedingung $P_0(0) = 1$, erhalten wir

$$P_0(t) = \exp(-bmt)\left\{1 + bmp_0 \int_0^t \exp(bmt)[1-\exp(-(b+c)t)]\left[1 + \frac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\right]^{m-1} dt\right\}.$$

Damit die Bedingung

$$P_n(0) = 0 \ (n \geqslant k), \qquad \lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n \qquad (k \leqslant n < m)$$

erfüllt sei, nehme man $A = 1$ und $B = 1$. Demnach ist

$$P_n(t) = p_n[1-\exp(-bt)]^{m-n}\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)] \qquad (k < n < m).$$

Aus der Bedingung (40) bestimmen wir die Funktion

$$P_m(t) = p_m ck\exp(-ckt)\int_0^t \exp(ckt)[1-\exp(-bt)]\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)]\,dt.$$

Schliesslich führt die Bedingung (38) für $n = k$ zur Differentialgleichung

$$P_k'(t) = -[(m-k)b+ck]P_k(t) + p_k\left\{ck[1-\exp(-(b+c)t)]^{k-1}\left[1+\frac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\right]^{m-k+1} + (m-k)b[1-\exp(-bt)]^{m-k-1}\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)]\right\}$$

deren Lösung, die die Bedingungen

$$P_k(0) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$$

erfüllen soll, die folgende Funktion ist:

$$P_k(t) = p_k\exp[-((m-k)b+ck)t]\int_0^t \exp[(m-k)b+ck]t \times \left\{ck[1-\exp(-(b+c)t)]^{k-1}\left[1+\frac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\right]^{m-k+1} + (m-k)b[1-\exp(-bt)]^{m-k-1}\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)]\right\}dt.$$

Der Beweis, dass die Funktionen $P_n(t)$ die Bedingung (42) erfüllen, verläuft identisch wie für Satz 3.

Unsere Betrachtungen summieren wir mit der folgenden Behauptung:

Satz 4. *Die Lösung des Gleichungssystems* (37)-(40), *die die Bedingungen* (41) *und* (42) *erfüllt, sind die Funktionen*

$$(44)\qquad P_n(t)=\begin{cases} \exp(-bmt)\Big\{1+bmp_0\int\limits_0^t \exp(bmt)\,[1-\exp(-(b+c)t)]\times \\ \qquad\times\Big[1+\dfrac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\Big]^{m-1}dt\Big\} \qquad (n=0), \\ p_n[1-\exp(-(b+c)t)]^n\Big[1+\dfrac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\Big]^{m-n} \\ \qquad\qquad (0<n<k), \\ p_k\exp[-((m-k)b+ck)t]\int\limits_0^t \exp[(m-k)b+ck]t\Big\{ck[1- \\ -\exp(-(b+c)t)]^{k-1}\Big[1+\dfrac{b}{c}\exp(-(b+c)t)\Big]^{m-k+1}+ \\ +(m-k)b[1-\exp(-bt)]^{m-k-1}\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)]\Big\}dt \\ \qquad\qquad (n=k), \\ p_n[1-\exp(-bt)]^{m-n}\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)] \qquad (k<n<m), \\ ckp_m\exp(-ckt)\int\limits_0^t \exp(ckt)[1-\exp(-bt)]\times \\ \qquad\times\exp[ckb^{-1}\exp(-bt)]\,dt \qquad (n=m), \end{cases}$$

wo p_n *durch die Formel* (43) *bestimmt ist.*

5. Telefonisches Wartezeitsystem bei unbeschränktem Strom von Meldungen (Typ I). Wenn zum Massenbedienungssystem, das aus k Linien besteht, der einfachste unbeschränkte Strom von Meldungen mit der Intensität b herankommt, dagegen die Bedienungszeit einer Meldung der Exponentialverteilung mit der Intensität c unterliegt, dann erfüllt die Funktion $P_n(t)$, die die Wahrscheinlichkeit dessen ausdrückt, dass sich im Moment t in der Bedienung und im Warteraum zusammen n Meldungen befinden, die Differenzen-Differential-Gleichung

$$(45)\qquad P_n'(t) = bP_{n-1}(t)-(cn+b)P_n(t)+(n+1)c\,P_{n+1}(t) \qquad (1\leqslant n<k),$$

$$(46)\qquad P_n'(t) = bP_{n-1}(t)-(ck+b)P_n(t)+ckP_{n+1}(t) \qquad (n\geqslant k)$$

mit den Bedingungen

$$(47)\qquad P_0'(t) = -bP_0(t)+cP_1(t),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(P_n t) = 1, \tag{48}$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad (n > 0). \tag{49}$$

Wir geben die Lösungen der Gleichungssysteme (45), (46) und (47) unter Benutzung der bekannten ([1], S. 233) stationären Lösungen dieser Systeme an:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{b}{c}\right)^n p_0 & (1 \leqslant n \leqslant k), \\ \dfrac{1}{k!k^{n-k}}\left(\dfrac{b}{c}\right)^n p_0 & (n \geqslant k), \end{cases} \tag{50}$$

wo

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{b}{c}\right)^i + \frac{c}{(k-1)!(ck-b)}\left(\frac{b}{c}\right)^k\right]^{-1}. \quad (b < ck).$$

Die Funktion (50) erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 1 (Formel (9)):

$$\begin{aligned} (n+1)cp_{n+1} &= bp_n \quad (0 \leqslant n < k), \\ ckp_{n+1} &= bp_n \quad (n \geqslant k); \end{aligned}$$

dabei ist $F := 0$, $G := b$,

$$c := \begin{cases} c & (1 \leqslant n \leqslant k), \\ 0 & (n \geqslant k), \end{cases}$$

$$d := \begin{cases} b & (1 \leqslant n \leqslant k), \\ b + ck & (n \geqslant k). \end{cases}$$

Für $1 \leqslant n \leqslant k$ ist das System (45) dem System (17) gleich, deshalb gilt

$$P_n(t) = p_n[1-\exp(-ct)]^n \exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \quad (1 \leqslant n < k). \tag{51}$$

Die Funktion $P_0(t)$ ermitteln wir aus der Gleichung (47), die zur folgenden Differentialgleichung führt:

$$P_0'(t) = -bP_0(t) + bp_0[1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right].$$

Ihre Lösung, die die Bedingungen

$$P_0(0) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} P_0(t) = p_0$$

erfüllt, ist die Funktion

$$P_0(t) = \exp(-bt)\left\{1+bp_0\int_0^t \exp(bt)[1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]dt\right\}.$$

Für $n \geqslant k$ kann man mit Hilfe der Formeln (12) und (13) die nichttriviale Lösung der Gleichung (46), die die Bedingungen $P_n(0) = 0$ erfüllt, nicht ermitteln. Es zeigt sich, dass sich die Lösung durch eine mehr komplizierte Formel als die Formel (11) ausdrückt. In diesem Fall handeln wir folgenderweise. Aus (45), für $n = k-1$, erhalten wir die Funktion

$$P_k(t) = p_k[1-\exp(-ct)]^k\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]$$

und aus der Gleichung (46) die Funktion

$$P_{k+1}(t) = p_{k+1}[1-\exp(-ct)]^{k+1}\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right].$$

Wenn wir in (46) an Stelle von n den Wert $k+1$ einsetzen, erhalten wir

$$P_{k+2}(t) = p_{k+2}[1-\exp(-ct)]^{k+2}\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]+P_k(t)\frac{b}{ck}\exp(-ct).$$

Die erhaltenen Funktionen erfüllen die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} P_{k+i}(t) = p_{k+i} \quad (i = 0,\ 1, 2).$$

Allgemein, für $n \geqslant k+2$, bestimmen wir das Integral aus der diskreten Formel

$$P_{n+1}(t) = \frac{1}{ck}[P'_n(t)+(ck+b)P_n(t)-bP_{n-1}(t)] \quad (n > k+1).$$

So haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5. *Die Lösung des Gleichungssystems* (45), (46) *und* (47), *die die Bedingungen* (48) *und* (49) *erfüllt, sind die Funktionen*

$$P_n(t) = \begin{cases} \exp(-bt)\left\{1+bp_0\int_0^t \exp(bt)[1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]dt\right\} \\ \qquad\qquad\qquad (n = 0), \\ p_n[1-\exp(-ct)]^n\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \quad (1 \leqslant n \leqslant k+1), \\ p_n[1-\exp(-ct)]^n\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] + P_{n-2}(t)\exp(-ct)bc^{-1}k^{-2} \\ \qquad\qquad\qquad (n = k+2), \end{cases}$$

$$P_n(t) = \frac{1}{ck}\,[P'_{n-1}(t) + (ck+b)P_{n-1}(t) - bP_{n-2}(t)] \qquad (n > k+2),$$

wo p_n $(n = 0, 1, \ldots, k+2)$ *durch die Formel* (20) *bestimmt ist.*

6. Telefonisches Wartezeitsystem bei unbeschränktem Strom von Meldungen (Typ II). Wenn zum System, das aus k Linien und m Warteraumplätzen besteht, der einfachste Strom mit der Intensität b herankommt und die Bedienungszeit einer Meldung der Exponentialverteilung mit der Intensität c unterliegt, dann erfüllt die Funktion $P_n(t)$, die die Wahrscheinlichkeit dessen ausdrückt, dass sich im Moment t im System genau n Meldungen befinden, die Differentialgleichungen

$$(52)\qquad \begin{aligned} P'_0(t) &= -bP_0(t) + cP_1(t), \\ P'_n(t) &= bP_{n-1}(t) - (cn+b)P_n(t) + (n+1)cP_{n+1}(t) \qquad (1 \leqslant n < k), \\ P'_n(t) &= bP_{n-1}(t) - (ck+b)P_n(t) + ckP_{n+1}(t) \qquad (k \leqslant n < k+m), \\ P'_{k+m}(t) &= bP_{k+m-1}(t) - ckP_{k+m}(t) \end{aligned}$$

mit den Bedingungen

$$(53)\qquad P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \ (n > 0), \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1.$$

Da die erste, zweite und dritte Gleichung des Systems (52) mit den Gleichungen (47), (45) und (46) identisch sind, werden ihre Lösungen durch dieselben Formeln ausgedrückt (mit Ausnahme der Konstanten p_0), die diesmal die folgende Form hat:

$$(54)\qquad p_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{b}{c}\right)^n + \frac{1}{k!}\left(\frac{b}{c}\right)^k \left[1 - \left(\frac{b}{ck}\right)^{m+1}\right]\left(1 - \frac{b}{ck}\right)^{-1} \right\}^{-1}.$$

Unter Beachtung, dass die Differentialgleichung

$$P'_{k+m}(t) + ckP_{k+m}(t) = bP_{k+m-1}(t)$$

mit der Anfangsbedingung $P_{k+m}(0) = 0$, mit

$$P_{k+m}(t) = b\exp(-ckt)\int_0^t \exp(ckt)P_{k+m-1}(t)\,dt$$

gleichwertig ist, können wir den folgenden Satz formulieren:

SATZ 6. *Die Lösung des Gleichungssystems* (52), *die die Bedingungen* (53) *erfüllt, sind die Funktionen*

$$P_n(t) = \begin{cases} \exp(-bt)\left\{1+bp_0\int\limits_0^t \exp(bt)[1-\exp(-ct)]\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]dt\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n=0), \\ p_n[1-\exp(-ct)]^n\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right] \qquad (1 \leqslant n \leqslant k+1), \\ p_n[1-\exp(-ct)]^n\exp\left[\frac{b}{c}\exp(-ct)\right]+P_{n-2}(t)\exp(-ct)bc^{-1}k^{-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n=k+2), \\ \frac{1}{ck}P'_{n-1}(t)+(ck+b)P_{n-1}(t)-bP_{n-2}(t) \qquad (k+m>n>k+2), \end{cases}$$

$$P_{k+m}(t) = b\exp(-ckt)\int\limits_0^t \exp(ckt)P_{k+m-1}(t)\,dt,$$

wo p_n $(n = 0, 1, \ldots, k+2)$ ***durch die Formel*** (50) *und* (54) ***bestimmt ist.***

Literaturnachweis

[1] W. Rozenberg i A. Prochorow, *Teoria masowej obslugi*, PWT, Warszawa 1965.
[2] I. F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
26-600 RADOM

Eingegangen am 3. 8. 1976

Z. BUĆKO (Radom)

O PEWNYCH RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH WYSTĘPUJĄCYCH W TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

STRESZCZENIE

W teorii procesów stochastycznych, a w szczególności w teorii masowej obsługi, otrzymuje się skończone i nieskończone układy równań różniczkowych postaci (4) o współczynnikach liniowych względem n z warunkami (2) i (3) oraz dodatkowymi warunkami wynikającymi ze specyfiki zagadnienia.

W pracy podano, opierając się na stacjonarnych rozwiązaniach, konstrukcję efektywnych rozwiązań tych układów równań różniczkowych.
