W. POGORZELSKI (Warszawa)

PRAWDOPODOBIEŃSTWO BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI

1. Zagadnienie bezpieczeństwa konstrukcji bez uwzględnienia czasu. Niech układ mechaniczny U będzie złożony z powiązanych wzajemnie części sprężystych

$$U_1, U_2, \ldots, U_m.$$

Na układ ten działają dane siły zewnętrzne. Po osiągnięciu stanu równowagi we wnętrzu układu powstaną naprężenia; obliczymy je rozwiązując pewne równania różniczkowe teorii sprężystości z uwzględnieniem warunków brzegowych i więzów, którym poddany jest układ. Naprężenia te odpowiadają punktom każdego układu i kierunkom w tych punktach.

Niech $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ oznaczają największe wartości bezwzględne naprężeń w każdej części $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Wartości te wyrażą się zawsze w postaci pewnych nieujemnych funkcyj n parametrów niezależnych $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$(1) \qquad \sigma_1 = F_1(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \ldots, \quad \sigma_m = F_m(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

gdzie parametry $q_1, q_2, \ldots, q_n$ określają cechy geometryczne układu, jak długości, kąty, momenty bezwładności, a nadto pewne cechy fizyczne układu, jak moduły Younga poszczególnych części lub współczynniki Lamégo. Do parametrów można też dołączyć tzw. współczynniki zamocowania i obciążenia. Funkcje (1) są określone w pewnym obszarze n-wymiarowym Ω punktów o współrzędnych prostokątnych $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Bezpieczeństwo bezwzględne konstrukcji (układu U) wyraża się warunkiem nieprzekraczania przez największe naprężenia $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ pewnych liczb dodatnich $R_1, R_2, \ldots, R_m$ odpowiadających tzw. granicy plastyczności materiałów, z których są zbudowane poszczególne części $U_1, U_2, \ldots, U_m$. W praktyce bezpieczeństwo konstrukcji wyrażamy zazwyczaj warunkiem nieprzekraczania przez naprężenia $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ pewnych części

$$\frac{R_1}{a_1}, \frac{R_2}{a_2}, \ldots, \frac{R_m}{a_m}$$

powyższych wartości granicznych; liczby $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dodatnie większe od jedności nazywają się *współczynnikami bezpieczeństwa* i mogą być dane z góry.

Warunek bezpieczeństwa konstrukcji wyraża się więc układem m nierówności

$$(2)\qquad F_1(q_1,q_2,\ldots,q_n)<\frac{R_1}{a_1},\quad \ldots,\quad F_m(q_1,q_2,\ldots,q_n)<\frac{R_m}{a_m},$$

które powinny spełniać jednocześnie wszystkie parametry układu q_1, $q_2,\ldots,q_n$.

Parametry układu $q_1,q_2,\ldots,q_n$, jak również granice plastyczności $R_1,R_2,\ldots,R_m$, są to liczby, które wskutek niedokładności produkcji przemysłowej są obciążone *odchyleniami przypadkowymi*. Wobec tego zmienne $q_1,q_2,\ldots,q_n,R_1,R_2,\ldots,R_m$ należy traktować jako *zmienne przypadkowe* (*losowe*), z których każda ma pewien ciągły rozkład prawdopodobieństwa. Zakładamy, że wszystkie te zmienne są *niezależne*.

Zagadnienie bezpieczeństwa konstrukcji sprowadza się więc do wyznaczenia prawdopodobieństwa, że nierówności (2) są spełnione.

Zagadnienie to postawił pierwszy W. Wierzbicki[1]). Autor wyraża żądane prawdopodobieństwo w postaci iloczynu prawdopodobieństw dla każdego z parametrów oddzielnie, co jest jednak niesłuszne, gdyż prawdopodobieństwo bezpieczeństwa wynika z zespołu nierówności (2), wymagających łącznego traktowania parametrów. W niniejszej pracy obliczymy prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji w sposób, który uważamy za poprawny. Nadto wyniki teorii zilustrujemy na przykładzie.

Jeśli $q_1,q_2,\ldots,q_n$ traktujemy jako współrzędne prostokątne punktów przestrzeni n-wymiarowej, to nierówności (2) dla ustalonych wartości $R_1,R_2,\ldots,R_m$ wyrażają warunek zawierania się punktu $q_1,q_2,\ldots,q_n$ w pewnym obszarze n-wymiarowym $\Omega_{R_1\ldots R_m}$ leżącym w obszarze Ω i ograniczonym powierzchniami o równaniach

$$(3)\qquad F_1(q_1,q_2,\ldots,q_n)=\frac{R_1}{a_1},\quad \ldots,\quad F_m(q_1,q_2,\ldots,q_n)=\frac{R_m}{a_m}.$$

Dla każdej ze zmiennych $q_1,q_2,\ldots,q_n$ przyjmujemy rozkład normalny, to znaczy zakładamy, że iloczyn

$$\frac{1}{s_\nu\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(q_\nu-q_\nu^0)^2}{2s_\nu^2}\right]dq_\nu\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)$$

wyraża prawdopodobieństwo zawierania się parametru q_ν w przedziale elementarnym $(q_\nu,q_\nu+dq_\nu)$, gdzie s_ν oznacza odchylenie średnie, a q_ν^0 — wartość oczekiwaną parametru q_ν. Prawdopodobieństwo zawierania się

---

[1]) W. Wierzbicki, *La sécurité des constructions comme un problème de probabilité*, Ann. de l'Ac. d. Sc. Techn. 7 (1946), p. 63-74.

punktu $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ w obszarze $\Omega_{R_1 \ldots R_m}$ wyraża się wtedy przez następującą całkę n-krotną rozciągniętą na ten obszar:

$$P(R_1, \ldots, R_m) = \tag{5}$$

$$= \int\int \ldots \int_{\Omega_{R_1 \ldots R_m}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n s_1 s_2 \ldots s_n} \exp\left[-\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2s_\nu^2}(q_\nu - q_\nu^0)^2\right] dq_1 dq_2 \ldots dq_n.$$

Powyższe prawdopodobieństwo jest funkcją zmiennych $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Założymy, że każda z tych zmiennych losowych ma też rozkład normalny, więc iloczyn

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m s_1' s_2' \ldots s_m'} \exp\left[-\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{2s_\nu'^2}(R_\nu - R_\nu^0)^2\right] dR_1 dR_2 \ldots dR_m$$

wyraża prawdopodobieństwo, że granice plastyczności leżą jednocześnie w przedziałach

$$(R_1, R_1 + dR_1), \ldots, (R_m, R_m + dR_m),$$

gdzie s_ν' jest odchyleniem średnim, a R_ν^0 — wartością oczekiwaną zmiennej R_ν. Jeśli zatem $R_1, R_2, \ldots, R_m$ są współrzędnymi prostokątnymi punktów przestrzeni m-wymiarowej i jeśli Λ oznacza obszar wypełniony wszystkimi punktami $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$, dla których równania (2) mogą być spełnione jednocześnie, to całka m-krotna

$$\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \tag{6}$$

$$= \int\int \ldots \int_{\Lambda} \frac{P(R_1, R_2, \ldots, R_m)}{(\sqrt{2\pi})^m s_1' s_2' \ldots s_m'} \exp\left[-\sum_{\nu=1}^{m} \frac{(R_\nu - R_\nu^0)^2}{2s_\nu'^2}\right] dR_1 \ldots dR_m$$

wyraża prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji przy przyjętych umownie wartościach współczynników bezpieczeństwa $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Podstawiając do wyrażenia (6) wartości $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, ..., $a_m = 1$, otrzymamy prawdopodobieństwo spełnienia nierówności

$$\sigma_1 < R_1, \quad \sigma_2 < R_2, \quad \ldots, \quad \sigma_m < R_m,$$

które możemy nazwać *prawdopodobieństwem bezwzględnym bezpieczeństwa konstrukcji*, jako niezależnym od umownych wartości współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

2. Zagadnienie bezpieczeństwa konstrukcji w czasie. Obliczone prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji odpowiada danej chwili, w której wartości oczekiwane parametrów

$$q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, R_1^0, R_2^0, \ldots, R_m^0$$

i ich odchylenia średnie

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, s'_1, s'_2, \ldots, s'_m$$

są określone z pewnością. Gdy konstrukcja pracuje, to wartości powyższe ulegają zmianie w czasie bądź dlatego, że zmieniają się wymiary geometryczne konstrukcji i słabnie powiązanie jej elementów, bądź dlatego, że zmieniają się właściwości fizyczne materiału (np. przez zmęczenie), lub wreszcie dlatego, że rozkład obciążeń ulega zmianie.

Jeśli wartości oczekiwane parametrów i ich odchylenia średnie są danymi określonymi funkcjami czasu t w przedziale od chwili początkowej $t=0$ działania konstrukcji do pewnej chwili $t=T$, to wzory (5) i (6) dają prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji jako funkcję czasu określoną w przedziale $(0,T)$ i pozwalają przewidzieć wartość tego prawdopodobieństwa dla każdej chwili t w przedziale $(0,T)$.

W rzeczywistości nie mamy jednak pewnych danych dotyczących zmiany w czasie wartości oczekiwanych

$$q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, R_1^0, R_2^0, \ldots, R_m^0 \tag{7}$$

i odchyleń średnich

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, s'_1, s'_2, \ldots, s'_m. \tag{7'}$$

Na podstawie obserwacji lub doświadczenia możemy uzyskać wartości (7) i (7') jako funkcje empiryczne

$$\begin{aligned} q_\nu^0 &= \psi_\nu(t, \delta_{1\nu}, \delta_{2\nu}, \ldots, \delta_{\lambda\nu}), \\ s_\nu &= \bar{\psi}_\nu(t, \bar{\delta}_{1\nu}, \bar{\delta}_{2\nu}, \ldots, \bar{\delta}_{\bar{\lambda}\nu}) \end{aligned} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\begin{aligned} R_a^0 &= \chi_a(t, \varepsilon_{1a}, \varepsilon_{2a}, \ldots, \varepsilon_{\varrho a}), \\ s'_a &= \bar{\chi}_a(t, \bar{\varepsilon}_{1a}, \bar{\varepsilon}_{2a}, \ldots, \bar{\varepsilon}_{\bar{\varrho}a}) \end{aligned} \quad (a = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

czasu t i parametrów

$$\delta_{1\nu}, \ldots, \delta_{\lambda\nu}, \bar{\delta}_{1\nu}, \ldots, \bar{\delta}_{\bar{\lambda}\nu}, \varepsilon_{1\nu}, \ldots, \varepsilon_{\varrho\nu}, \bar{\varepsilon}_{1\nu}, \ldots, \bar{\varepsilon}_{\bar{\varrho}\nu},$$

które nie mają wartości pewnych, lecz są zmiennymi losowymi podlegającymi np. rozkładowi normalnemu o gęstościach

$$\frac{1}{\sigma_{\mu\nu}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\delta_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}^0)^2}{2\sigma_{\mu\nu}^2}\right], \quad \frac{1}{\bar{\sigma}_{\bar{\mu}\nu}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{\delta}_{\bar{\mu}\nu}-\bar{\delta}_{\bar{\mu}\nu}^0)^2}{2\bar{\sigma}_{\bar{\mu}\nu}}\right]$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, \lambda;\ \nu = 1, 2, \ldots, n;\ \bar{\mu} = 1, 2, \ldots, \bar{\lambda}), \tag{9}$$
$$\frac{1}{\sigma'_{\beta a}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon_{\beta a}-\varepsilon_{\beta a}^0)^2}{2\sigma'^2_{\beta a}}\right], \quad \frac{1}{\sigma'_{\bar{\beta} a}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{\varepsilon}_{\bar{\beta} a}-\bar{\varepsilon}_{\bar{\beta} a}^0)^2}{2\sigma'^2_{\bar{\beta} a}}\right]$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots, \varrho;\ a = 1, 2, \ldots, m;\ \bar{\beta} = 1, 2, \ldots, \bar{\varrho}).$$

Nadto funkcje (8) dla chwili początkowej $t=0$ działania konstrukcji przybierają dane *wartości pewne*

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
&q_\nu^0(0)=\psi_\nu(0,\delta_{1\nu},\ldots,\delta_{\lambda\nu}),\\
&s_\nu^0(0)=\overline{\psi}_\nu(0,\overline{\delta}_{1\nu},\ldots,\overline{\delta}_{\bar{\lambda}\nu})
\end{aligned}\qquad (\nu=1,2,\ldots,n),
$$

$$
\begin{aligned}
&R_\alpha^0(0)=\chi_\alpha(0,\varepsilon_{1\alpha},\ldots,\varepsilon_{\varrho\alpha}),\\
&s'_\alpha(0)=\overline{\chi}_\alpha(0,\overline{\varepsilon}_{1\alpha},\ldots,\overline{\varepsilon}_{\bar{\varrho}\alpha})
\end{aligned}\qquad (\alpha=1,2,\ldots,m)
$$

dla wszelkich wartości zmiennych losowych $\delta_{\mu\nu},\overline{\delta}_{\mu\nu},\varepsilon_{\beta\alpha},\overline{\varepsilon}_{\beta\alpha}$. Zwróćmy teraz uwagę, że na zasadzie wzorów (5) i (6) prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji Π jest określoną funkcją

$$
(11) \qquad \Pi=\Psi(q_1^0,q_2^0,\ldots,q_n^0,s_1,\ldots,s_n;\ R_1^0,R_2^0,\ldots,R_m^0,s'_1,\ldots,s'_m)
$$

parametrów (7) i (7'). Podstawiając w wyrażeniu (11) funkcje czasu (8), mnożąc przez funkcje Gaussa (9) odpowiadające wszystkim zmiennym losowym $\delta_{\mu\nu},\overline{\delta}_{\mu\nu},\varepsilon_{\beta\alpha},\overline{\varepsilon}_{\beta\alpha}$ i całkując iloczyn po pełnym obszarze zmienności D_1,D_2,D_3,D_4 tych zmiennych, otrzymamy prawdopodobieństwo bezpieczeństwa konstrukcji dla dowolnej chwili t w przedziale $(0,T)$, uwzględniające niepewność współczynników we wzorach (8).

W wielu zastosowaniach można powyższe zagadnienie znacznie uprościć przyjmując dla funkcyj empirycznych czasu t wielomiany w postaci

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
&q_\nu^0=q_\nu^0(0)+\delta_{1\nu}t+\delta_{2\nu}t^2+\ldots+\delta_{\lambda\nu}t^\lambda &&(\nu=1,2,\ldots,n),\\
&R_\alpha^0=R_\alpha^0(0)+\varepsilon_{1\alpha}t+\varepsilon_{2\alpha}t^2+\ldots+\varepsilon_{\varrho\alpha}t^\varrho &&(\alpha=1,2,\ldots,m),
\end{aligned}
$$

lub ogólniej, wyrażenia liniowe względem parametrów $\delta_{\beta\nu},\varepsilon_{\beta\alpha}$ postaci

$$
(12') \qquad \begin{aligned}
&q_\nu^0=q_\nu^0(0)+\delta_{1\nu}f_{1\nu}(t)+\delta_{2\nu}f_{2\nu}(t)_\nu+\ldots+\delta_{\lambda\nu}f_{\lambda\nu}(t) &&(\nu=1,2,\ldots,n),\\
&R_\alpha^0=R_\alpha^0(0)+\varepsilon_{1\alpha}\varphi_{1\alpha}(t)+\varepsilon_{2\alpha}\varphi_{2\alpha}(t)+\ldots+\varepsilon_{\varrho\alpha}\varphi_{\varrho\alpha}(t) &&(\alpha=1,2,\ldots,m),
\end{aligned}
$$

gdzie $f_{\beta\nu}(t),\varphi_{\beta\alpha}(t)$ są danymi funkcjami czasu, a nadto zaniedbując niepewność funkcyj $s_\nu(t)$ i $s'_\alpha(t)$ lub wprost zakładając ich niezmienność w czasie.

Założymy więc, że tylko współczynniki $\delta_{1\nu},\ldots,\delta_{\lambda\nu}$ i $\varepsilon_{1\alpha},\ldots,\varepsilon_{\varrho\alpha}$ są zmiennymi losowymi, których wartości oczekiwane $\delta_{1\nu}^0,\ldots,\delta_{\lambda\nu}^0,\varepsilon_{1\alpha}^0,\ldots,\varepsilon_{\varrho\alpha}^0$ i odchylenia średnie otrzymano z obserwacji za pomocą rachunku wyrównania.

Przy pierwotnych założeniach prawdopodobieństwo parametru q_ν podlegało rozkładowi normalnemu o gęstości

$$
(13) \qquad \frac{1}{s_\nu\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(q_\nu-q_\nu^0)^2}{2s_\nu^2}\right] \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).
$$

Biorąc teraz pod uwagę wyrażenia (12), rozkłady normalne prawdopodobieństw (9) współczynników $\delta_{1\nu}, \delta_{2\nu}, \ldots, \delta_{\lambda\nu}$ i opierając się na znanym twierdzeniu o dodawaniu zmiennych losowych niezależnych o rozkładzie normalnym oraz twierdzeniu o rozkładzie funkcji liniowej zmiennych losowych, możemy twierdzić, iż prawdopodobieństwo, że w danej chwili t parametr q_ν leży w przedziale elementarnym $(q_\nu, q_\nu + dq_\nu)$ wyraża się w następujący sposób:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\left[s_\nu^2 + \sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} \sigma_{\mu\nu}^2 f_{\mu\nu}^2(t)\right]}} \exp\left(-\frac{(q_\nu - q_\nu^*)^2}{2\left[s_\nu^2 + \sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} \sigma_{\mu\nu}^2 f_{\mu\nu}^2(t)\right]}\right) dq_\nu \tag{14}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie

$$q_\nu^* = q_\nu^0(0) + \delta_{1\nu}^0 f_{1\nu}(t) + \delta_{2\nu}^0 f_{2\nu}(t) + \ldots + \delta_{\lambda\nu}^0 f_{\lambda\nu}(t). \tag{15}$$

Prawdopodobieństwo (14) uwzględnia zmianę w czasie wartości oczekiwanej q_ν^0 i niepewność współczynników $\delta_{1\nu}, \ldots, \delta_{\lambda\nu}$ we wzorach (12).

Postępując analogicznie, a więc uwzględniając zmianę w czasie wartości oczekiwanej R_a^0 według wzorów (12), niepewność współczynników $\varepsilon_{1a}, \ldots, \varepsilon_{\varrho a}$ i ich rozkłady normalne (9), możemy twierdzić, iż prawdopodobieństwo, że w danej chwili t parametr R_a leży w przedziale elementarnym $(R_a, R_a + dR_a)$, wyraża się w następujący sposób:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\left[s_a'^2 + \sum\limits_{\beta=1}^{\varrho} \sigma_{\beta a}'^2 \varphi_{\beta a}^2(t)\right]}} \exp\left[-\frac{(R_a - R_a^*)^2}{2\left[s_a'^2 + \sum\limits_{\beta=1}^{\varrho} \sigma_{\beta a}'^2 \varphi_{\beta a}^2(t)\right]}\right] dR_a \tag{16}$$

$$(a = 1, 2, \ldots, m),$$

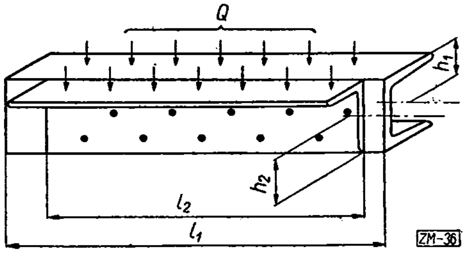
gdzie

$$R_a^* = R_a^0(0) + \varepsilon_{1a}^0 \varphi_{1a}(t) + \varepsilon_{2a}^0 \varphi_{2a}(t) + \ldots + \varepsilon_{\varrho a}^0 \varphi_{\varrho a}(t). \tag{17}$$

Ostateczne rozwiązanie zagadnienia, to znaczy prawdopodobieństwo bezpieczeństwa danej konstrukcji w dowolnej chwili t w przedziale $(0, T)$ uwzględniające niepewność zmiany w czasie wartości oczekiwanych $q_\nu^0(t)$ i $R_\nu^0(t)$ oraz daną zmianę czasową odchyleń średnich s_ν i s_ν', wyrazi się tymi samymi wzorami (5) i (6), co w poprzednim zagadnieniu, pod warunkiem, żeby zamiast q_ν^0 i R_ν^0 podstawić wyrażenia q_ν^* i R_ν^* określone przez wzory (15), (17) oraz zamiast s_ν^2 i $s_\nu'^2$ wyrażenia

$$s_\nu^2 + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \sigma_{\mu\nu}^2 f_{\mu\nu}^2(t), \qquad s_\nu'^2 + \sum_{\beta=1}^{\varrho} \sigma_{\beta\nu}'^2 \varphi_{\beta\nu}^2(t). \tag{17'}$$

3. Przykład[2]. Niech układ będzie złożony z dwóch belek poziomych o końcach bądź wmurowanych, bądź podpartych (rysunek 1). Długości tych belek niech będą l_1 i l_2, momenty bezwładności przekrojów poprzecznych — J_1 i J_2, moduły Younga — E_1 i E_2, odległości skrajnych włókien od osi obojętnych h_1 i h_2.



Rys. 1

Dana jest siła Q rozłożona równomiernie na całej długości zespołu tych belek; nadto zakładamy, iż belki są złączone w ten sposób, że ich strzałki ugięcia f są równe.

Mamy więc warunek

$$f=\frac{Q_1 l_1^3}{cE_1J_1}=\frac{Q_2 l_2^3}{cE_2J_2}, \qquad Q=Q_1+Q_2, \tag{18}$$

gdzie Q_1 i Q_2 są siłami działającymi na poszczególne belki; $c=384$ w przypadku belek o końcach wmurowanych, $c=76{,}8$ w przypadku belek podpartych swobodnie na końcach.

Z równań (18) otrzymujemy

$$Q_1=Q\frac{E_1J_1l_2^3}{E_1J_1l_2^3+E_2J_2l_1^3}, \qquad Q_2=Q\frac{E_2J_2l_1^3}{E_1J_1l_2^3+E_2J_2l_2^3}. \tag{19}$$

Dla największych naprężeń w każdej z belek mamy wzory

$$\sigma_1=\frac{Q_1l_1h_1\varkappa}{J_1}, \qquad \sigma_2=\frac{Q_2l_2h_2\varkappa}{J_2}, \tag{20}$$

gdzie $\varkappa=1/12$ w przypadku belek o końcach wmurowanych, natomiast $\varkappa=1/8$ w przypadku belek podpartych na końcach. Warunek bezpieczeństwa tej konstrukcji wyraża się nierównościami

$$\frac{QE_1h_1l_1l_2^3\varkappa}{E_1J_1l_2^3+E_2J_2l_1^3}<\frac{R_1}{\alpha_1}, \qquad \frac{QE_2h_2l_2l_1^3\varkappa}{E_1J_1l_2^3+E_2J_2l_1^3}<\frac{R_2}{\alpha_2}, \tag{21}$$

gdzie R_1 i R_2 są granicznymi wartościami naprężeń materiałów belek, α_1 i α_2 zaś odpowiednimi współczynnikami bezpieczeństwa. Założymy dla uproszczenia, że tylko E_1, E_2, R_1, R_2 są zmiennymi przypadkowymi, których wartości oczekiwane i odchylenia średnie nie zależą od czasu. $l_1=l_2=l$, h_1, h_2, J_1, J_2 są stałymi, których zmienność losową zaniedbujemy.

Ostatnie założenie jest usprawiedliwione, jeśli zwrócimy uwagę na to, że niepewność wyników doświadczeń dotyczy głównie wielkości fi-

[2]) Temat do tego przykładu zawdzięczam W. Moszyńskiemu.

zycznych E_1, E_2, R_1, R_2 wyrażających własności sprężyste materiału. Wielkość Q traktujemy w tym przykładzie jako daną stałą; najlepiej przyjąć tutaj kres górny spodziewanego obciążenia. Ponieważ wszystkie wielkości występujące w nierównościach (21) są dodatnie, więc przy powyższych założeniach upraszczających warunek bezpieczeństwa (21) jest równoważny z warunkiem wyrażonym nierównościami

$$(\beta_1 - R_1)E_1 < \frac{R_1 J_2}{J_1} E_2, \qquad (\beta_2 - R_2)E_2 < \frac{R_2 J_1}{J_2} E_1, \tag{22}$$

gdzie

$$\beta_1 = \frac{Q h_1 l a_1 \varkappa}{J_1}, \qquad \beta_2 = \frac{Q h_2 l a_2 \varkappa}{J_2}. \tag{23}$$

Nierówności (22) przy ustalonych wartościach parametrów (R_1, R_2) określają na płaszczyźnie o współrzędnych prostokątnych (E_1, E_2) pewien obszar $\Omega_{R_1 R_2}$, którego kształt poznamy badając położenie dwóch prostych o równaniach

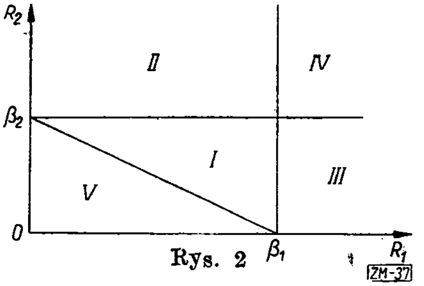
$$(24) \quad \begin{aligned} &(\beta_1 - R_1)E_1 = \frac{R_1 J_2}{J_1} E_2 \qquad \text{(prosta } D_1\text{)}, \\ &(\beta_2 - R_2)E_2 = \frac{R_2 J_1}{J_2} E_1 \qquad \text{(prosta } D_2\text{)}. \end{aligned}$$

Należy tu rozróżnić pięć przypadków, zależnych od położenia punktu o współrzędnych prostokątnych (R_1, R_2) w pięciu częściach pierwszej ćwiartki ($R_1 > 0$, $R_2 > 0$).

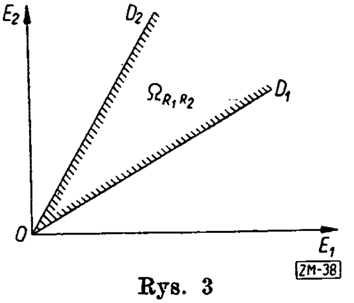
Przypadek 1.

$$R_1 < \beta_1, \qquad R_2 < \beta_2, \qquad \frac{R_1}{\beta_1} + \frac{R_2}{\beta_2} - 1 > 0.$$

Punkt (R_1, R_2) leży w obszarze I na rysunku 2



Rys. 2



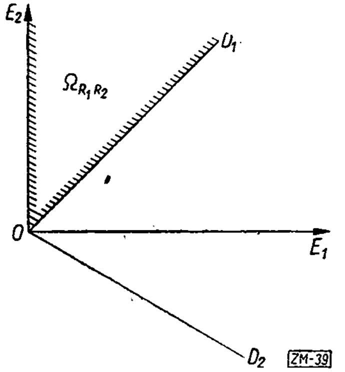
Rys. 3

Wtedy współczynniki kątowe prostych D_1 i D_2 są dodatnie, przy czym prosta D_2 ma większy współczynnik kątowy od prostej D_1. Obszar $\Omega_{R_1 R_2}$ jest więc w danym przypadku częścią ćwiartki pierwszej leżącą między prostymi D_1 i D_2 (rysunek 3).

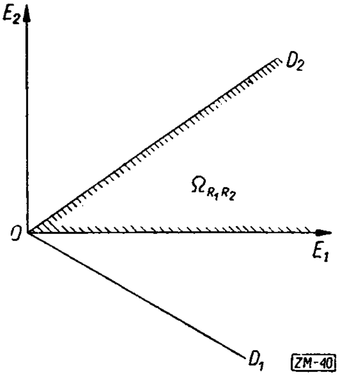
Przypadek 2.

$$0 < R_1 < \beta_1, \qquad R_2 > \beta_2 \qquad \text{(obszar II, rys. 4).}$$

Wtedy tylko prosta D_1 ma współczynnik kątowy >0 i obszar $\Omega_{R_1R_2}$ jest ograniczony w pierwszej ćwiartce półprostą OD_1 i półprostą OE_2



Rys. 4



Rys. 5

Przypadek 3.

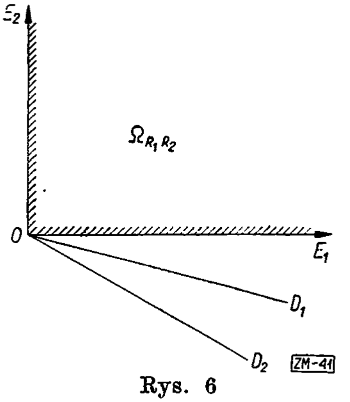
$$R_1 > \beta_1, \qquad 0 < R_2 < \beta_2 \qquad \text{(obszar III).}$$

Wtedy tylko prosta D_2 ma współczynnik kątowy dodatni i obszar $\Omega_{R_1R_2}$ jest ograniczony półprostymi OE_1 i OD_2 (rysunek 5).

Przypadek 4.

$$R_1 > \beta_1, \qquad R_2 > \beta_2 \qquad \text{(obszar IV).}$$

Wtedy obie proste D_1 i D_2 mają współczynniki kątowe ujemne i cała pierwsza ćwiartka E_1OE_2 jest obszarem $\Omega_{R_1R_2}$ (rysunek 6).



Rys. 6

Przypadek 5.

$$R_1 > 0, \qquad R_2 > 0, \qquad \frac{R_1}{\beta_1} + \frac{R_2}{\beta_2} - 1 < 0 \qquad \text{(obszar V).}$$

Wtedy półprosta OD_1 leży powyżej półprostej OD_2 w ćwiartce pierwszej i spełnienie zespołu nierówności (22) jest niemożliwe, gdyż wyrażają one, że punkt (E_1, E_2) leży wyżej od półprostej OD_1 i niżej od półprostej OD_2. Bezpieczeństwo konstrukcji jest więc w tym przypadku niemożliwe.

Odpowiadające pierwszym czterem przypadkom prawdopodobieństwa względne $P(R_1, R_2)$ są następujące:

(25.I) $P_{\mathrm{I}}(R_1, R_2) =$

$$= \iint\limits_{\Omega_{R_1R_2}} \frac{1}{2\pi s_1 s_2} \exp\left(-\frac{(E_1-E_1^0)^2}{2s_1^2} - \frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_1 dE_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi s_1 s_2} \int\limits_0^{\infty} \left[\int\limits_{\frac{\beta_2 - R_2}{R_2 J_1} J_2 E_2}^{\frac{R_1 J_2}{\beta_1 - R_1} \cdot \frac{E_2}{J_1}} \exp\left(-\frac{(E_1-E_2^0)^2}{2s_1^2}\right) dE_1 \right] \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2 =$$

$$= \frac{1}{s_2\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \left\{ \Phi\left[\frac{R_1 J_2}{(\beta_1 - R_1) J_1} \cdot \frac{E_2}{s_1} - \frac{E_1^0}{s_1}\right] - \Phi\left[\frac{\beta_2 - R_2}{R_2 J_1} \cdot J_2 \cdot \frac{E_2}{s_1} - \frac{E_1^0}{s_1}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2,$$

(25.II) $P_{\mathrm{II}}(R_1, R_2) =$

$$= \frac{1}{2\pi s_1 s_2} \int\limits_0^{\infty} \left[\int\limits_0^{\frac{R_1 J_2}{\beta_1 - R_1} \cdot \frac{E_2}{J_1}} \exp\left(-\frac{(E_1-E_1^0)^2}{2s_1^2}\right) dE_1 \right] \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2 =$$

$$= \frac{1}{s_2\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \left\{ \Phi\left[\frac{R_1 J_2}{\beta_1 - R_1} \cdot \frac{E_2}{J_1 s_1} - \frac{E_1^0}{s_1}\right] - \Phi\left(-\frac{E_1^0}{s_1}\right)\right\} \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2.$$

(25.III) $P_{\mathrm{III}}(R_1, R_2) =$

$$= \frac{1}{2\pi s_1 s_2} \int\limits_0^{\infty} \left[\int\limits_{\frac{\beta_2 - R_2}{R_2 J_1} E_2 J_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{(E_1-E_1^0)^2}{2s_1^2}\right) dE_1 \right] \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2 =$$

$$= \frac{1}{s_2\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \left\{ 1 - \Phi\left[\frac{\beta_2 - R_2}{R_2 J_1} \cdot \frac{E_2 J_2}{s_1} - \frac{E_1^0}{s_1}\right]\right\} \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2,$$

(25.IV) $P_{\mathrm{IV}}(R_1, R_2) =$

$$= \frac{1}{2\pi s_1 s_2} \int\limits_0^{\infty} \left[\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(E_1-E_1^0)^2}{2s_1^2}\right) dE_1 \right] \exp\left(-\frac{(E_2-E_2^0)^2}{2s_2^2}\right) dE_2 =$$

$$= \Phi\left(\frac{E_1^0}{s_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{E_2^0}{s_2}\right).$$

W powyższych wzorach oznaczono przez Φ funkcję Laplace'a

$$\Phi(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{T} e^{-t^2/2} dt; \tag{26}$$

E_1^0 i E_2^0 oznaczają wartości oczekiwane zmiennych E_1 i E_2, a s_1 i s_2 ich odchylenia średnie.

Mnożąc powyższe cztery prawdopodobieństwa przez funkcje Gaussa zmiennych R_1 i R_2 i całkując podwójnie w czterech odpowiednich obszarach (na rys. 1) otrzymamy cztery składniki $\Pi_{\mathrm{I}}, \Pi_{\mathrm{II}}, \Pi_{\mathrm{III}}, \Pi_{\mathrm{IV}}$, których sumą

$$\Pi(a_1, a_2) = \Pi_{\mathrm{I}} + \Pi_{\mathrm{II}} + \Pi_{\mathrm{III}} + \Pi_{\mathrm{IV}}$$

jest żądane prawdopodobieństwo bezpieczeństwa układu dwóch belek.

Otrzymamy mianowicie:

(27)

$$\Pi_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\pi s_1' s_2'} \int_0^{\beta_2} \left[\int_{\frac{\beta_1}{\beta_2}(\beta_2 - R_2)}^{\beta_1} P_{\mathrm{I}}(R_1, R_2) \exp\left(- \frac{(R_1 - R_1^0)^2}{2s_1'^2} \right) dR_1 \right] \exp\left(- \frac{(R_2 - R_2^0)^2}{2s_2'^2} \right) dR_2,$$

$$\Pi_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2\pi s_1' s_2'} \int_{\beta_2}^{\infty} \left[\int_0^{\beta_1} P_{\mathrm{II}}(R_1, R_2) \exp\left(- \frac{(R_1 - R_1^0)^2}{2s_1^2} \right) dR_1 \right] \exp\left(- \frac{(R_2 - R_2^0)^2}{2s_2'^2} \right) dR_2,$$

$$\Pi_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2\pi s_1' s_2'} \int_0^{\beta_2} \left[\int_{\beta_1}^{\infty} P_{\mathrm{III}}(R_1, R_2) \exp\left(- \frac{(R_1 - R_1^0)^2}{2s_1'^2} \right) dR_1 \right] \exp\left(- \frac{(R_2 - R_2^0)^2}{2s_2'^2} \right) dR_2,$$

$$\Pi_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2\pi s_1' s_2'} \int_{\beta_2}^{\infty} \left[\int_{\beta_1}^{\infty} P_{\mathrm{IV}}(R_1, R_2) \exp\left(- \frac{(R_1 - R_1^0)^2}{2s_1'^2} \right) dR_1 \right] \exp\left(- \frac{(R_2 - R_2^0)^2}{2s_2'^2} \right) dR_2 =$$

$$= \Phi\left(\frac{E_1^0}{s_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{E_2^0}{s_2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\beta_1 - R_1^0}{s_1'}\right)\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{\beta_2 - R_2^0}{s_2'}\right)\right].$$

Tylko w ostanim (czwartym) przypadku składnik prawdopodobieństwa rozszczepia się na iloczyn czterech czynników odpowiadających czterem zmiennym E_1, E_2, R_1, R_2; składnik ten nie jest główny, a nawet, jak wykażemy niżej, można go zaniedbać, gdy obciążenie Q jest dostatecznie duże. Rachunek liczbowy powyższych wyrażeń, które wydają się dość zawiłe, upraszcza się znacznie dzięki temu, że dystrybuanta Φ szybko dąży do jedności dla $T \to \infty$, i szybko dąży do zera dla $T \to -\infty$. Na przykład już dla $T = 4$ mamy $\Phi(T) = 0{,}999988$.

Wobec tego wzory powyższe uprościmy podstawiając dla funkcji pod znakiem całki

$$(28)\qquad \Phi(T)=\begin{cases} 0, & \text{gdy}\quad T<-\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}T, & \text{gdy}\quad -\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\leqslant T\leqslant\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}, \\ 1, & \text{gdy}\quad T>\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}. \end{cases}$$

Takie uproszczenie wydaje się uzasadnione, gdyż we wzorach powyższych funkcja Φ jest mnożona wielokrotnie przez czynniki mniejsze od jedności, wobec czego błąd wyniku ulega znacznej redukcji. Okoliczność ta występuje wyraźnie przy obliczeniach.

Powyższa teoria ma większe znaczenie wtedy, gdy naprężenia w układzie są bliskie wartości granicznych i intuicji ufać nie można. Otóż stosunki E_1^0/s_1, E_2^0/s_2 mają wartość około 20, odchylenia średnie s_1', s_2' zaś wynoszą około 10% wartości R_1 i R_2; jeśli więc obciążenie Q jest dostatecznie duże, to różnice β_1-R_1 i β_2-R_2 przekraczają kilkakrotnie wartości s_1', s_2' i wyrazy $\Pi_{\mathrm{IV}}, \Pi_{\mathrm{II}}, \Pi_{\mathrm{III}}$ można pominąć. Przy dostatecznie dużym obciążeniu Q wyrazem głównym jest więc Π_{I}. Obliczmy go przy założeniu upraszczającym

$$E_1^0=E_2^0,\qquad J_1=J_2,\qquad R_1^0=R_2^0,$$

$$s_1=s_2=s,\qquad s_1'=s_2'=s',\qquad h_1=h_2,\qquad a_1=a_2=1.$$

Wtedy

$$\beta_1=\beta_2=\beta.$$

Według wzoru (25.I) mamy teraz

$$P_{\mathrm{I}}(R_1,R_2)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left[\Phi\left(\frac{E_2}{s(\frac{\beta}{R_1}-1)}-\frac{E^0}{s}\right)-\Phi\left[\left(\frac{\beta}{R_2}-1\right)\frac{E_2}{s}-\frac{E^0}{s}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(E_2-E^0)^2}{2s^2}\right)dE_2.$$

Prawdopodobieństwo P_{I} jest wobec tego różnicą dwóch całek $P_{\mathrm{I}}=P_{\mathrm{I}}'-P_{\mathrm{I}}''$, z których pierwszą wyrażamy w następujący sposób:

$$(29)\qquad P_{\mathrm{I}}'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-E^0/s}^{\infty}\Phi\left(\frac{E^0+s\tau}{s(\frac{\beta}{R_1}-1)}-\frac{E^0}{s}\right)e^{-\tau^2/2}d\tau,$$

gdzie $E_2-E^0=s\tau$.

Aby zastosować teraz uproszczenie (28), wyznaczmy taką wartość τ_0, żeby było

$$\frac{E^0+s\tau_0}{s(\frac{\beta}{R_1}-1)}-\frac{E^0}{s}=\mp\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Odpowiednie dwie wartości τ są następujące:

$$(30)\quad \tau_0'=\left(\frac{\beta}{R_1}-1\right)\left(\frac{E^0}{s}-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)-\frac{E^0}{s},\qquad \tau_0''=\left(\frac{\beta}{R_1}-1\right)\left(\frac{E^0}{s}+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)-\frac{E^0}{s},$$

gdzie $\tau_0''-\tau_0'=\left(\frac{\beta}{R_1}-1\right)\sqrt{2\pi}$. Zgodnie z (28) jest

$$P_{\mathrm{I}}'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\tau_0'}^{\tau_0''}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{E^0+s\tau}{s(\frac{\beta}{R_1}-1)}-\frac{E^0}{s}\right]+\frac{1}{2}\right\}e^{-\tau^2/2}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\tau_0''}^{\infty}e^{-\tau^2/2}d\tau.$$

Stąd wynika, że

$$(31)\quad \begin{aligned} P_{\mathrm{I}}'(R_1)&=1-\frac{1}{2}\left[\Phi(\tau_0')+\Phi(\tau_0'')\right]+\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{E^0}{s}\cdot\frac{2R_1-\beta}{\beta-R_1}\left[\Phi(\tau_0'')-\Phi(\tau_0')\right]+\frac{R_1}{2\pi(\beta-R_1)}\left(e^{-\tau_0'^2/2}-e^{-\tau''^2/2}\right).\end{aligned}$$

Postępując analogicznie otrzymujemy dla drugiego dodajnika P_{I}'' wyrażenie

$$(32)\quad \begin{aligned} P_{\mathrm{I}}''(R_2)&=1-\frac{1}{2}\left[\Phi(t_0')+\Phi(t_0'')\right]+\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{E^0}{s}\cdot\frac{\beta-2R_2}{R_2}\left[\Phi(t_0'')-\Phi(t_0')\right]+\frac{\beta-R_2}{2\pi R_2}\left[e^{-t_0'^2/2}-e^{-t_0''^2/2}\right],\end{aligned}$$

gdzie

$$(33)\quad t_0'=\frac{R_2}{\beta-R_2}\left(\frac{E^0}{s}-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)-\frac{E^0}{s},\qquad t_0''=\frac{R_2}{\beta-R_2}\left(\frac{E^0}{s}+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)-\frac{E^0}{s}.$$

W dalszym ciągu otrzymujemy

$$\Pi_{\mathrm{I}}=\Pi_{\mathrm{I}}'-\Pi_{\mathrm{II}}'',$$

gdzie

$$
\Pi_{\mathrm{I}}' = \frac{1}{s'\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta} \left[\Phi\left(\frac{\beta - R^0}{s'}\right) - \Phi\left(\frac{\beta - R_1 - R^0}{s'}\right) \right] P_{\mathrm{I}}'(R_1) \exp\left(-\frac{(R_1 - R^0)^2}{2s'^2}\right) dR_1,
$$

(34)

$$
\Pi_{\mathrm{I}}'' = \frac{1}{s'\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta} \left[\Phi\left(\frac{\beta - R^0}{s'}\right) - \Phi\left(\frac{\beta - R_2 - R^0}{s'}\right) \right] P_{\mathrm{I}}''(R_2) \exp\left(-\frac{(R_2 - R^0)^2}{2s'^2}\right) dR_2 .
$$

Weźmy przykład liczbowy; niech będzie

$$
(35) \qquad \beta = 4000 \frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{cm}^2}, \qquad R^0 = 2600 \frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{cm}^2}, \qquad s' = 260 \frac{\mathrm{kG}}{\mathrm{cm}^2}, \qquad \frac{R^0}{s} = 20.
$$

Ponieważ siły Q_1 i Q_2 wahają się dokoła $Q/2$, więc według wzorów (20) i (23) największe naprężenia w danym przykładzie wahają się koło wartości $\beta/2 = 2000$ kG/cm².

Całki (34) obliczamy w zwykły sposób, dzieląc przedział całkowania na części; wystarczy zająć się rachunkiem w przedziale

$$
1500 < R < 2500,
$$

gdyż poniżej wartości 1500 wartości funkcji podcałkowej są znikome, a powyżej wartości 2500 czynnik P' jest znikomy, czynnik P'' bardzo bliski jedności, wartość $\Phi[(\beta - R - R^0)/s']$ bardzo mała, wartość $\Phi[(\beta - R^0)/s]$ bardzo bliska jedności i odpowiednia część całki Π_{I} sprowadza się do zwykłej całki Gaussa.

Rachunek przybliżony całek (34) oparty na wyrażeniach (30), (31), (32) i (33) doprowadził do wartości $\Pi = 0{,}990$ prawdopodobieństwa bezwzględnego ($\alpha = 1$) bezpieczeństwa konstrukcji w przypadku (35) przy pominięciu wyrazów Π_{II}, Π_{III} i Π_{IV}.

Oszacowania błędu nie przeprowadzono, przypuszczamy jednak, że nie przekracza on paru jednostek na trzecim miejscu po przecinku.

Praca wpłynęła 14. 3. 1953 r.

В. ПОГОЖЕЛЬСКИЙ (Варшава)

ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОПАСНОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

РЕЗЮМЕ

Автор занимается определением вероятности безопасности упругой системы U состоящей из упругих взаимно связанных частей $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Максимальные абсолютные значения напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ в этих частях являются функциями

$$
\sigma_\nu = F_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)
$$

n параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определяющих геометрические соотношения и упругие свойства частей $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Автор предполагает, что параметры $q_1, q_2, \ldots, q_n$, которых значения получаются экспериментальным путем, являются случайными величинами подчиненными распределению Гаусса.

Условия безопасности системы определяются неравенствами (2), где предельные напряжения $R_1, R_2, \ldots, R_m$ считаются случайными величинами также подчиненными распределению Гаусса.

Неравенства (2), с постоянными значениями параметров $R_1, R_2, \ldots, R_m$, определяют некоторую область $\Omega_{R_1 R_2 \ldots R_m}$ в n-мерном пространстве точек $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Вероятность $P(R_1; R_2, \ldots, R_m)$ явления, что точка $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ находится в области $\Omega_{R_1 R_2 \ldots R_m}$, определяется формулой (5). Умножая вероятность P на функции Гаусса, соответсвующие параметрам $R_1, R_2, \ldots, R_m$, и интегрируя по области Λ, содержащей все те точки $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$, в которых условия (2) выполняемы, получаем формулу (6). Формула эта определяет вероятность $\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ безопасности при данных коэффициентах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Полагая $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$ получаем абсолютную вероятность безопасности системы.

В следующей части автор занимается определением вероятности безопасности активной системы U в произвольном моменте времени t интервала $(0, T)$. Для этого автор предполагает, что математические ожидания q_ν^0 и R_a^0 параметров q_ν и R_a являются случайными функциями (8) времени t, зависящими от случайных параметров $\delta_{1\nu}, \delta_{2\nu}, \ldots, \delta_{\lambda\nu}$ и $\varepsilon_{1a}, \varepsilon_{2\lambda}, \ldots, \varepsilon_{\varrho a}$ подчиненных закону Гаусса (9). Затем автор заменяет функции (8) более простыми функциями (полиномами) (12) и пользуясь свойствами распределения Гаусса приходит к выводу, что искомая вероятность безопасности активной системы в произвольном моменте времени t определяется теми-же формулами (5) и (6), с тем, что величины q_ν^0 и R_ν^0 надо заменить величинами q_ν^* и R_ν^* определенными формулами (15) и (17), а величины s_ν и s_ν' — выражением (17′).

В последней части автор применяет теорию к задаче двух горизонтальных соединенных стержней находящихся под влиянием силы Q равномерно распределенной. Условие безопасности определяется неравенствами (21). Для определения вероятности безопасности рассматриваются пять областей (черт. 1) в плоскости переменных R_1 и R_2. Этим областям соответсвуют области $\Omega_{R_1 R_2}$ в плоскости переменных (E_1, E_2) (черт. 2,3,4,5). Вероятности $P(R_1, R_2)$ соответствующие этим областям определяются формулами (25), а искомые вероятности $\Pi(a_1, a_2) = \Pi_{\mathrm{I}} + \Pi_{\mathrm{II}} + \Pi_{\mathrm{III}} + \Pi_{\mathrm{IV}}$ — формулами (27).

Приближенные значения вероятности Π определяются формулами (34). Автор приводит численный пример (35) и получает для вероятности значение $\Pi = 0{,}990$.

W. POGORZELSKI (Warszawa)

PROBABILITY OF THE SAFETY OF A CONSTRUCTION

SUMMARY

The author is concerned with determining the probability of the safety of a system U, consisting of elastic parts $U_1, U_2, \ldots, U_n$, joined to one another. The greatest absolute value of the stresses $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ arising in those parts are functions

$$\sigma_\nu = F_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

of n parameters $q_1, q_2, \ldots, q_n$, determining the geometrical dimensions and elastic properties of the system.

In view of the inaccuracy of industrial production the author regards the parameters $q_1, q_2, \ldots, q_n$ as random variables subject to Gauss' law.

The condition of the safety of a construction is expressed by inequalities (2) where the limit values $R_1, R_2, \ldots, R_m$ are also regarded as random variables subject to Gauss' law.

Inequalities (2), for fixed parameters $R_1, R_2, \ldots, R_m$, determine a certain domain $\Omega_{R_1 R_2 \ldots R_m}$ in an n-dimensional space of the points $(q_1, \ldots, q_n)$. The probability $P(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ of the point with the rectangular coordinates $q_1, q_2, \ldots, q_n$ lying in the domain $\Omega_{R_1 R_2 \ldots R_m}$ is expressed by formula (5). Multiplying the probability P by Gauss' functions corresponding to the parameters $R_1, R_2, \ldots, R_m$, and integrating in the domain Λ containing all points $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ for which the inequalities (2) are satisfied, we obtain formula (6). This formula expresses the probability $\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ of safety when we accept the coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Substituting $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$ we obtain the absolute probability of the safety of a construction.

In the second part of this paper the author deals with determining the probability of the safety of a construction under working conditions, at an arbitrary moment t in the interval $(0, T)$. He assumes that the expected values q^0 and R^0 of the parameters q_ν, R_a are functions (8) of the time t, but they are uncertain, *i. e.* dependent on the parameters $\delta_{1\nu}, \delta_{2\nu}, \ldots, \delta_{\lambda\nu}$ and $\varepsilon_{1a}, \varepsilon_{2a}, \ldots, \varepsilon_{\varrho a}$ which are random variables subject to Gauss' law (9). The author then adopts for functions (8) a simpler expression (12) in the form of polynomials, and, basing himself on the properties of Gauss' distribution, infers that the sought probability of a construction under working conditions at an arbitrary time t will be determined by the same formulae (5) and (6) as those appearing in the first part of the paper, on condition that the expressions q_ν^* and R_ν^*, determined by formulae (15) and (17), are substituted for the values q_ν^0 and R_ν^0, and the expressions (17') substituted for the values s_ν and s'_ν.

In the final part of his paper the author gives the application of the theory to the case of two joined horizontal beams, uniformly loaded along their whole lengths. The condition of safety is expressed by inequalities (21). In order to determine the probability of safety we consider four domains in fig. 1 in the plane of the variables R_1 and R_2. To these domains correspond the domains $\Omega_{R_1 R_2}$ in the plane of the variables (E_1, E_2), shown in fig. 2, 3, 4, 5. The probabilities $P(R_1 R_2)$ corresponding to these domains are determined by formulae (27).

The approximate value of the probability Π is given by formulae (34). The author introduces a numerical example and obtains the value $\Pi = 0{,}990$ for the probability.