ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVII, 1 (1980)

М. ПЕЖХАЛА (Вроцлав)

# МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ БИНЕ-КОШИ

**1. Введение.** В различных отраслях техники многие задачи сводятся к рассмотрению определителя и алгебраических дополнений матрицы $M = I+PQ$, где $I$ — единичная матрица $m$-го порядка, а $P$ и $Q$ — матрицы соответственно порядков $(m, n)$ и $(n, m)$ $(m \leqslant n)$. В статье приводятся формулы для определителя и алгебраических дополнений этой матрицы.

**2. Определитель матрицы $M$.**

Теорема 1. *Если $I$ единичная матрица $m$-го порядка, а $P$ и $Q$ — матрицы соответственно порядков $(m, n)$ и $(n, m)$ $(m \leqslant n)$, то*

$$\det(I+PQ) = 1+\sum (\textit{произведений соответствующих миноров всех порядков матриц } P \textit{ и } Q),$$

*где суммирование выполняется по всем минорам данного порядка.*

*Миноры, относящиеся к этой теореме, это определители порядков 1 до $m$, так как матрица $P$ имеет порядок $(m, n)$.*

*Если выбраны столбцы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и строки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ матрицы $P$, принадлежащие минору $k$-го порядка этой матрицы, то соответствующий минор матрицы $Q$ состоит из строк $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ этой матрицы.*

Доказательство. Определитель суммы $C = A+B$ двух квадратных матриц $m$-го порядка можно выразить [2] соотношением

$$\det(A+B) = \det A+\sum \Delta(1)+\sum \Delta(2)+\ldots+\sum \Delta(m-1)+\det B, \tag{1}$$

где $\Delta(s)$ — определитель, полученный замещением $s$ столбцов определителя первой матрицы соответствующими столбцами второй матрицы. Знаки сумм означают, что суммируются определители для всевозможных сочетаний $s$ замещаемых столбцов.

Применяя формулу (1) для вычисления определителя матрицы $M = I+PQ$, имеем

$$\det(I+PQ) = 1+\det(PQ)+\sum \Delta(1)+\sum \Delta(2)+\ldots+\sum \Delta(m-1).$$

Воспользовавшись формулой Бине-Коши, получим

$\det(PQ) = \sum$ (произведений соответствующих миноров максимального порядка $m$ матриц $P$ и $Q$).

Исследуем теперь определитель $\Delta(1)$. Находим, что данная $\Delta(1)$ имеет вид

$$\Delta(1) = \det \begin{bmatrix} PQ_{1,1} & PQ_{1,2} & \dots & PQ_{1,i-1} & 0 & PQ_{1,i+1} & \dots & PQ_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ PQ_{i-1,1} & PQ_{i-1,2} & \dots & PQ_{i-1,i-1} & 0 & PQ_{i-1,i+1} & \dots & PQ_{i-1,m} \\ PQ_{i,1} & PQ_{i,2} & \dots & PQ_{i,i-1} & 1 & PQ_{i,i+1} & \dots & PQ_{i,m} \\ PQ_{i+1,1} & PQ_{i+1,2} & \dots & PQ_{i+1,i-1} & 0 & PQ_{i+1,i+1} & \dots & PQ_{i+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ PQ_{m,1} & PQ_{m,2} & \dots & PQ_{m,i-1} & 0 & PQ_{m,i+1} & \dots & PQ_{m,m} \end{bmatrix},$$

где элемент $PQ_{i,j}$ равен сумме произведений элементов $i$-й строки матрицы $P$ на соответствующие элементы $j$-го столбца матрицы $Q$. Используя разложение Лапласа получим выражение для определителя $\Delta(1)$ вычеркиванием строки $i$ и $i$-го столбца матрицы $W = PQ$ и вычислением определителя полученной таким образом матрицы. Ввиду того, что $W = PQ$, вычеркивание строки $i$ в матрице $W$ эквивалентно вычеркиванию строки $i$ в матрице $P$. Аналогично, вычеркивание столбца $i$ в матрице $W$ эквивалентно вычеркиванию $i$-го столбца в матрице $Q$.

На основе формулы Бине-Коши находим, что

$\Delta(1) = \sum$ (произведений соответствующих миноров порядка $m-1$ матрицы $P$ с вычеркнутой $i$-й строкой и матрицы $Q$ с вычеркнутым $i$-м столбцом).

Продолжая этот процесс на все $i$, получим

$\sum \Delta(1) = \sum$ (произведений соответствующих миноров порядка $m-1$ матриц $P$ и $Q$).

Аналогично можно доказать, что

$\sum \Delta(2) = \sum$ (произведений соответствующих миноров порядка $m-2$ матриц $P$ и $Q$),

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\sum \Delta(m-1) = \sum$ (произведений соответствующих миноров порядка 1 матриц $P$ и $Q$).

Пример 1. Пусть

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Применяя теорему 1, находим, что

$$\det(I+PQ) = 1+1\cdot 2+0\cdot 1+(-3)\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-1)+$$
$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=$$
$$= 1+2+1+1\cdot 2+6\cdot(-2)+3\cdot(-1) = -9.$$

Полученный результат можно проверить, составив определитель произведения $PQ$ и вычислив определитель $M = I+PQ$ непосредственно.

### 3. Алгебраическое дополнение элементов расположенных на главной диагонали матрицы $M = I+PQ$.

Теорема 2. *Алгебраическое дополнение $\Delta_{i,i}$ элемента $(i, i)$ матрицы $M = I+PQ$ равно*

$$\Delta_{i,i} = 1+\sum \text{(произведений соответствующих миноров всех порядков матриц } P_{-i,0} \text{ и } Q_{0,-i}),$$

*где $P_{-i,0}$ — матрица, полученная вычеркиванием строки $i$ в матрице $P$, а $Q_{0,-i}$ — матрица, полученная вычеркиванием столдца $i$ в матрице $Q$.*

*Суммирование выполняется по всем минорам данного порядка. Миноры, относящиеся к этой теореме, это определители порядков* 1 *до* $m-1$, *так как матрица $P$ имеет порядок* $(m, n)$.

*Если выбраны столбцы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и строки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ матрицы $P_{-i,0}$, принадлежащие минору $k$-го порядка этой матрицы, то соответствующий минор матрицы $Q_{0,-i}$ состоит из строк $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ этой матрицы.*

Доказательство. Алгебраическое дополнение, соответствующее элементу, который находится в положении $(i, i)$, получается вычеркиванием строки $i$ и $i$-го столбца матрицы $M$ и вычислением определителя полученной таким образом матрицы. Так как $M = I+PQ$, вычеркивание строки $i$ в матрице $M$ эквивалентно вычеркиванию строки $i$ в матрицах $I$ и $P$. Аналогично, вычеркивание столбца $i$ в матрице $M$ эквивалентно вычеркиванию $i$-го столбца в матрицах $I$ и $Q$. Таким образом, алгебраическое дополнение элемента $(i, i)$ выражается уравнением

$$\Delta_{i,i} = \det(I_{-i,-i}+P_{-i,0}Q_{0,-i}).$$

Эта теорема получается непосредственно из теоремы 1.

Пример 2. Применяя теорему 2, находим, что алгебраические дополнения матриц $P$ и $Q$, данных в примере 1, равны

$$\Delta_{1,1} = 1+2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-1) = 2,$$
$$\Delta_{2,2} = 1+1\cdot 2+0\cdot 1+(-3)\cdot 0 = 3.$$

**4. Асимметричные алгебраические дополнения матрицы $M = I+PQ$.**

Теорема 3. *Алгебраическое дополнение $\Delta_{i,j}$ элемента $(i,j)$ матрицы $M = I+PQ$ равно*

$$\Delta_{i,j} = -\Big[\sum \text{(произведений гибридных миноров всех порядков матрицы } P_{-i,0} \text{ и соответствующих им гибридных миноров матрицы } Q_{0,-j})\Big],$$

*где $P_{-i,0}$ — матрица, полученная вычеркиванием строки $i$ в матрице $P$, а $Q_{0,-j}$ — матрица, полученная вычеркиванием столбца $j$ в матрице $Q$.*

*Суммирование выполняется по всем гибридным минорам данного порядка. Миноры, относящиеся к этой теореме, это определители порядков* 1 *до* $m-1$, *так как матрица $P$ имеет порядок $(m,n)$.*

Для доказательства теоремы 3 нам пригодятся следующие предварительные сведения.

Определение 1. *Гибридным минором $k$-го порядка* матрицы $P_{-i,0}$ называется минор, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) первая строка принадлежащия гибридному минору матрицы $P_{-i,0}$ является $j$-й строкой матрицы $P$ (где индекс $j$ обозначает номер вычеркнутого столбца в матрице $Q$);

(2) все остальные строки принадлежащие гибридному минору образуют строки матрицы $P$ (за исключением строк $i$-й и $j$-й) в таком же порядке, как в матрице $P$;

(3) столбцы принадлежащие гибридному минору имеют такой же порядок, как в матрице $P$.

Определение 2. Если выбраны строки $j, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ и столбцы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ матрицы $P_{-i,0}$, принадлежащие гибридному минору $k$-го порядка этой матрицы, то соответствующий гибридный минор матрицы $Q_{0,-j}$ состоит из строк $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и столбцов $i, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ матрицы $Q_{0,-j}$, где индекс $i$ обозначает номер вычеркнутой строки в матрице $P_{-i,0}$).

Лемма 1. *Пусть $I$ единичная матрица порядка $m$, а $I_0$ — квадратная матрица порядка $m-1$, имеющая вид*

$$I_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

*Если $I_{-i,-j}$ матрица, полученная после вычеркивания строки $i$ и столбца $j$ $(i \neq j)$ в матрице $I$, то для получения из $I_{-i,-j}$ матрицы $I_0$ нужно $\delta = i+j-3$ перестановок строк и столбцов.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

(1) $i<j$. В этом случае матрицу $I_{-i,-j}$ представляет рис. 1.

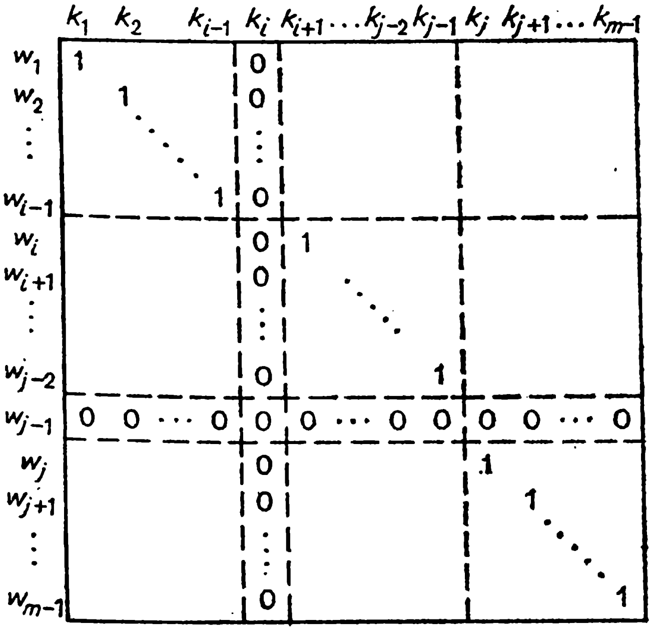


Рис. 1

Из рис. 1 непосредственно видно, что для того, чтобы получить матрицу $I_0$, нужно $j-2$ перестановок строк и $i-1$ перестановок столбцов, из чего получаем $\delta = i+j-3$.

(2) $i>j$. В этом случае матрицу $I_{-i,-j}$ представляет рис. 2.

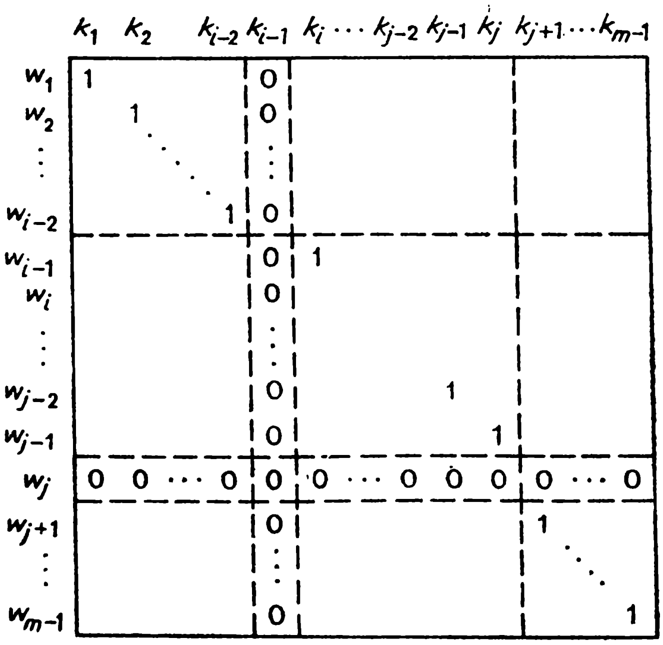


Рис. 2

Тоже из рис. 2 видно, что в этом случае нужно $j-1$ перестановок строк и $i-2$ перестановок столбцов, откуда получаем $\delta = i+j-3$.

Следствие 1. *В матрице $I_0$, полученной из матрицы $I_{-i,-j}$, имеем следующий порядок строк и столбцов:*

(2a) $$w_j, w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_m,$$

(2b) $$k_i, k_1, k_2, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_m,$$

*где номера строк и столбцов относятся к номерам в матрице $I$.*

Следствие 1 вытекает непосредственно из конструкции матрицы $I_0$ (рис. 1 и 2).

Доказательство теоремы 3. Алгебраическое дополнение элемента, находящегося в положении $(i, j)$, выражается уравнением

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{-i,-j},$$

где $M_{-i,-j}$ матрица, полученная после вычеркивания строки $i$ и столбца $j$ в матрице $M$.

Помня, что из матрицы $I_{-i,-j}$ можно получить матрицу $I_0$ (лемма 1) после $\delta = i+j-3$ перестановок строк и столбцов, можем написать

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j-\delta} \det(I_0 + P^*_{-i,0} Q^*_{0,-j}) = -\det(I_0 + P^*_{-i,0} Q^*_{0,-j}),$$

где $P^*_{-i,0}$ и $Q^*_{0,-j}$ матрицы $P_{-i,0}$ и $Q_{0,-j}$ после соответствующих, как в матрице $I_0$, перестановок строк и столбцов.

Так как в матрице $I_0$ имеем порядок строк (2a) и порядок столбцов (2b), легко доказать, что строки матрицы $P^*_{-i,0}$ имеют порядок (2a), ее столбцы — такой же порядок, как в матрице $P_{-i,0}$, и что столбцы матрицы $Q^*_{0,-j}$ имеют порядок (2b), а ее строки — такой же порядок, как в матрице $Q_{0,-j}$.

Применяя для вычисления определителя матрицы $(I_0 + P^*_{-i,0} Q^*_{0,-j})$ формулу для вычисления определителя суммы двух квадратных матриц порядка $m-1$ [2], имеем

$$\det(I_0 + P^*_{-i,0} Q^*_{0,-j}) = \det(P^*_{-i,0} Q^*_{0,-j}) + \sum \Delta(1) + \sum \Delta(2) + \ldots + \sum \Delta(m-1),$$

где $\Delta(s)$ определитель, полученный замещением $s$ столбцов определителя матрицы $P^*_{-i,0}$ соответствующими столбцами матрицы $Q^*_{0,-j}$. Знаки сумм обозначают, что суммируются определители для всевозможных сочетаний $s$ замещаемых столбцов.

Воспользовавшись формулой Бине-Коши, получим, что

$\det(P^*_{-i,0} Q^*_{0,-j}) = \sum$ (произведений гибридных миноров порядка $m-1$ матрицы $P_{-i,0}$ и соответствующих им гибридных миноров порядка $m-1$ матрицы $Q_{0,-j}$).

Продолжая, как и в теореме 1, процесс вычисления на остальные определители, получим теорему 3.

Пример 3. Пусть

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-3\\2&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

Исследуем теперь алгебраическое дополнение элемента $(2,3)$. Тогда

$$P^*_{-2,0}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-3\end{bmatrix},\quad Q^*_{0,-3}=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

Применяя теорему 3, находим, что

$$\Delta_{2,3}=-\left\{0\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1\\1&-3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\-1&0\end{vmatrix}+\right.$$
$$\left.+\begin{vmatrix}1&-1\\0&-3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}\right\}=-(1+1+2+2-3)=-3.$$

Аналогично можно вычислить все остальные асимметричные алгебраические дополнения матрицы $M=I+PQ$.

**5. Применения.** Процесс вычисления [1] уравнений нелинейных электронных схем сводится, между прочим, к обращению следующих матриц:

$$M_1^{-1}=(I+\Pi_{cc}C_N\Pi^t_{cc}S_T)^{-1},$$
$$M_2^{-1}=(I+\Pi^t_{LL}L_T\Pi_{LL}\Gamma_N)^{-1},$$
$$M_3^{-1}=(I+G_N\Pi^t_{RG}R_T\Pi_{RG})^{-1},$$
$$M_4^{-1}=(I+R_T\Pi_{RG}G_N\Pi^t_{RG})^{-1},$$

где $C_N$, $S_T$, $L_T$, $G_N$, $R_T$, $\Gamma_N$ — диагональные матрицы элементов схемы; $\Pi_{cc}$, $\Pi_{LL}$, $\Pi_{RG}$ — субматрицы взаимосвязи пар субвекторов всех возможных типов ветвей (элементы этих матриц могут принимать значения 0 или $\pm 1$); $\Pi^t_{cc}$, $\Pi^t_{LL}$, $\Pi^t_{RG}$ — транспонированные матрицы $\Pi_{cc}$, $\Pi_{LL}$, $\Pi_{RG}$.

Так как матрицы $C_N$ и $S_T$ диагональные, находим для матрицы $M_1=I+\Pi_{cc}C_N\Pi^t_{cc}S_T$, на основе теоремы 1, что

$$(3)\quad \Delta=1+\sum(\text{миноров всех порядков матрицы } \Pi_{cc})^2\,\frac{c'_{j_1,j_1}\dots c'_{j_k,j_k}}{c_{i_1,i_1}\dots c_{i_k,i_k}},$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — номера столбцов матрицы $\Pi_{cc}$, принадлежащие минору $k$-го порядка; $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера строк матрицы $\Pi_{cc}$, принадлежащие минору $k$-го порядка; $c'_{j_a, j_a}$ — элемент матрицы $C_N$; $1/c_{i_a, i_a}$ — элемент матрицы $S_T$.

Алгебраическое дополнение $\Delta_{i,i}$ элемента, расположенного в клетке $(i, i)$, находим на основе теоремы 2. Имеем

(4)

$$\Delta_{i,i} = 1 + \sum (\text{миноров всех порядков матрицы } \Pi_{cc_{-i,0}})^2 \frac{c'_{j_1,j_1} \ldots c'_{j_k,j_k}}{c_{i_1,i_1} \ldots c_{i_k,i_k}},$$

где $\Pi_{cc_{-i,0}}$ — матрица, полученная вычеркиванием строки $i$ в матрице $\Pi_{cc}$; $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — номера столбцов матрицы $\Pi_{cc}$, принадлежащие минору $k$-го порядка матрицы $\Pi_{cc_{-i,0}}$; $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера строк матрицы $\Pi_{cc}$, принадлежащие минору $k$-го порядка матрицы $\Pi_{cc_{-i,0}}$.

На основе теоремы 3, алгебраическое дополнение элемента $(i, j)$ матрицы $M_1$ имеет вид

(5) $$\Delta_{i,j} = -\sum (\text{произведений гибридных миноров всех порядков матрицы } \Pi_{cc_{-i,0}} \text{ и соответствующих им гибридных миноров матрицы } \Pi^t_{cc_{0,-j}}) \frac{c'_{j_1,j_1} \ldots c'_{j_k,j_k}}{c_{i_1,i_1} \ldots c_{i_k,i_k}},$$

где $\Pi^t_{cc_{0,-j}}$ — матрица, полученная вычеркиванием столбца $j$ в матрице $\Pi^t_{cc}$; $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — номера столбцов матрицы $\Pi_{cc}$, принадлежащие гибридному минору $k$-го порядка матрицы $\Pi_{cc_{-i,0}}$; $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера столбцов матрицы $\Pi_{cc}$, принадлежащие гибридному минору $k$-го порядка матрицы $\Pi^t_{cc_{0,-j}}$.

Пример 4. Для схемы, показанной на рис. 3, матрицы $C_N$, $S_T$, $\Pi_{cc}$ имеют вид

$$C_N = \begin{bmatrix} c'_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c'_{3,3} \end{bmatrix}, \quad S_T = \begin{bmatrix} 1/c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \Pi_{cc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

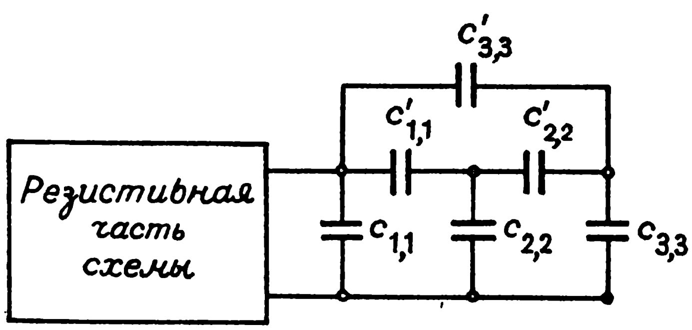


Рис. 3

Применяя формулу (3), получаем

$$\Delta = 1 + (-1)^2 \frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}} + (1)^2 \frac{c'_{1,1}}{c_{2,2}} + (-1)^2 \frac{c'_{2,2}}{c_{2,2}} + (1)^2 \frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}} + (-1)^2 \frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} +$$

$$+ (1)^2 \frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{2,2}} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{3,3}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{2,2}c_{3,3}} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{2,2}c_{3,3}} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{2,2}c_{3,3}} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}c_{3,3}} =$$

$$= 1 + \frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}} + \frac{c'_{1,1}}{c_{2,2}} + \frac{c'_{2,2}}{c_{2,2}} + \frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}} + \frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} + \frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}} + \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{2,2}} + \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{3,3}} +$$

$$+ \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{2,2}c_{3,3}} + \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}} + \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} + \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{2,2}c_{3,3}} + \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}} +$$

$$+ \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} + \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{2,2}c_{3,3}}.$$

Для схемы с рис. 3 имеем

$$\Pi_{c,c_{-2,0}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основе формулы (4) вычисляют

$$\Delta_{2,2} = 1 + (-1)^2 \frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}} + (1)^2 \frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}} + (-1)^2 \frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} + (1)^2 \frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{3,3}} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} =$$

$$= 1 + \frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}} + \frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}} + \frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} + \frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}} + \frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{3,3}} + \frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}} + \frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}}.$$

Так как

$$\Pi^t_{cc_{0,-3}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

на основе формулы (5) имеем

$$\Delta_{2,3}=-\left[0\cdot 1\frac{c'_{1,1}}{c_{2,2}}+1\cdot(-1)\frac{c'_{2,2}}{c_{2,2}}+1\cdot 0\frac{c'_{3,3}}{c_{2,2}}+\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}\frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{2,2}}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}\frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}}+\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}\frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}}\right]=$$

$$=\frac{c'_{2,2}}{c_{2,2}}+\frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{2,2}}+\frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}}+\frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{2,2}}.$$

В классическом методе

$$M_1=\begin{bmatrix}1+\frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}}+\frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} & -\frac{c'_{1,1}}{c_{2,2}} & -\frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}}\\ -\frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}} & 1+\frac{c'_{1,1}}{c_{2,2}}+\frac{c'_{2,2}}{c_{2,2}} & -\frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}}\\ -\frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} & -\frac{c'_{2,2}}{c_{2,2}} & 1+\frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}}+\frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}}\end{bmatrix}.$$

При вычислениях определителя и алгебраических дополнений появляется теперь много пар слагаемых, одинаковых по величине и обратных по знаку, которые взаимно уничтожаются и в окончательное решение не входят. Например,

$$\Delta_{2,2}=\begin{vmatrix}1+\frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}}+\frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} & -\frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}}\\ -\frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}} & 1+\frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}}+\frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}}\end{vmatrix}=1+\frac{c'_{2,2}}{c_{3,3}}+\frac{c'_{3,3}}{c_{3,3}}+\frac{c'_{1,1}}{c_{1,1}}+\frac{c'_{1,1}c'_{2,2}}{c_{1,1}c_{3,3}}+$$

$$+\frac{c'_{1,1}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}}+\frac{c'_{3,3}}{c_{1,1}}+\frac{c'_{2,2}c'_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}}+\frac{c'^2_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}}-\frac{c'^2_{3,3}}{c_{1,1}c_{3,3}}.$$

Отмеченным недостатком не обладают вычисления, основанные на предлагаемом методе, что позволяет быстрее вычислять определитель и алгебраические дополнения. Кроме того, эти вычисления выполняются непосредственно из матрицы $\Pi_{cc}$ (элементы этой матрицы могут принимать только значения 0 или $\mp 1$) без вычисления матрицы $M_1$, что позваляет существенно сократить объем требуемой памяти.

Таким же образом получаются формулы для матриц $M_2$, $M_3$ и $M_4$.

**6. Заключение.** Полученные в работе теоремы очень полезные, если матрицы $P$ и $Q$ относятся к классу больших, разреженных матриц, отличающихся преобладающим числом нулевых компонентов. В этом случае, алгоритмы, основанные на предлагаемом методе, позваляют существенно сократить объем требуемой машинной памяти (не нужен процесс вычисления и запоминания матрицы $M$).

В различных практических задачах, напр. при вычислениях уравнений нелинейных электронных схем, предлагаемые формулы позвалают также повысить эффективность вычислительных процедур. В классическом методе при вычислениях появляется много пар слагаемых, одинаковых по величине и обратных по знаку, которые взаимно уничтожаются и в окончательное решение не входят. Отмеченным недостатком не обладают алгоритмы, основанные на предлагаемом методе.

**Цитированная литература**

[1] А. И. Петренко и А. И. Кондратенко, *Математическая модель нелинейных электронных схем*, Proc. 2nd Internat. Symp. Network Theory, Herceg Novi, Yugoslavia, July 3-7, 1972.

[2] В. П. Сигорский, *Математический аппарат инженера*, Киев 1975.

ИНСТИТУТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ И АКУСТИКИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВРОЦЛАВ
50-370 ВРОЦЛАВ

*Поступило в редакцию 26. 8. 1977;*
*переработанная версия 31. 1. 1978*

---

M. PIERZCHAŁA (Wrocław)

## MODYFIKACJA TWIERDZENIA BINETA-CAUCHY'EGO

### STRESZCZENIE

Wiele różnych problemów technicznych można sprowadzić do obliczenia odwrotności macierzy $M = I + PQ$, gdzie $I$ jest macierzą jednostkową o wymiarze $m$, $P$ i $Q$ zaś macierzami o wymiarach odpowiednio $(m, n)$ i $(n, m)$ $(m \leqslant n)$.

W pracy wyprowadzono wzory, pozwalające obliczyć wyznacznik i dopełnienia algebraiczne tej macierzy. Opisano również jedno z możliwych zastosowań — proces formułowania równań nieliniowych układów elektronicznych. W tym przypadku algorytmy — oparte na danych wzorach — pozwalają znacznie skrócić czas obliczeń i zmniejszyć wielkość wymaganego obszaru pamięci maszyny cyfrowej.

---