

J. OBALSKI (Warszawa)

O PEWNOŚCI WYNIKÓW SPRAWDZANIA NARZĘDZI MIERNICZYCH

Spis stosowanych symboli

- a — błąd systematyczny (wskazań) narzędzia mierniczego.
- $m = \frac{I_n - I_p}{I_n}$ — błąd (wskazań) narzędzia mierniczego, gdzie I_n — wskazanie nominalne, I_p — wskazanie poprawne.
- $\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n}$ — średnia arytmetyczna błędów w serii n pomiarów.
- n — liczba pomiarów.
- $M = \bar{m}n = \sum_{i=1}^n m_i$ — suma algebraiczna błędów w n pomiarach.
- a — wartość oczekiwana błędów systematycznych na zbiorze narzędzi mierniczych.
- q — granica błędów dopuszczalnych przez przepisy legalizacyjne.
- k — liczba stopni swobody.
- σ_0 — odchylenie średnie błędów systematycznych na zbiorze narzędzi mierniczych.
- σ_1 — odchylenie średnie błędów przypadkowych poszczególnego narzędzia mierniczego.
- s — odchylenie średnie poszczególnego wskazania (na podstawie n pomiarów).
- s_m — odchylenie średnie średniej arytmetycznej wskazań (na podstawie n pomiarów).
- $P(|x| \leq q)$ — prawdopodobieństwo, że bezwzględna wartość błędu systematycznego jest nie większa od granicy błędów dopuszczalnych.
- $S(t, k)$ — gęstość rozkładu Studenta zmiennej t przy k stopniach swobody.

- $\Phi(t)$ — funkcja Laplace'a zmiennej t .
 $\varepsilon = ts_m$ — t -krotne odchylenie średnie średniej arytmetycznej wskazań (na podstawie n pomiarów).

Uwaga. W toku pracy operuje się wyłącznie błędami względnymi.

1. Przedmiot zagadnienia. Praca niniejsza dotyczy sprawdzania przez urzędy miar narzędzi mierniczych wytwarzanych masowo lub w wielkich seriach; dotyczy ona wszelkich narzędzi mierniczych, ale dla większej jasności będziemy mówili przykładowo o jednym ich rodzaju, a mianowicie o wodomierzach. Najpierw podamy kilka wiadomości technicznych.

Wodomierze są przyrządami do mierzenia objętości przepływającej przez nie wody. Najczęściej spotykaną konstrukcję stanowią wodomierze skrzydełkowe, w których strumień przepływającej wody obraca lekki kilkołopatkowy wirnik; prędkość kątowna tego obrotu jest w dużym przybliżeniu proporcjonalna do natężenia przepływu (objętości przepływu w jednostce czasu), a więc liczba obrotów wirnika w ciągu pewnego czasu jest w dużym przybliżeniu proporcjonalna do objętości wody, która przepłynęła w tym czasie. Tę objętość odczytuje się bezpośrednio na wskazującej tarczy liczydła.

Wodomierze składają się z wielu elementów całkowicie znormalizowanych (przynajmniej w zakresie jednej wytwórni); wszystkie zasadnicze wymiary są stolerowane. Wskutek drobnych odchyłeń wymiarowych (w granicach tolerancji), różnic w położeniu organu regulacyjnego, niejednorodności materiałów itd., poszczególne wodomierze różnią się nieco od siebie, co się ujawnia w różności systematycznych błędów wskazań poszczególnych egzemplarzy. Wobec tego, że na błąd wskazań składa się wiele elementarnych błędów mniej więcej równego rzędu, można się spodziewać na mocy centralnego twierdzenia granicznego, że rozkład tych błędów w zbiorowości wodomierzy będzie normalny lub bardzo bliski normalnego.

Ponadto każdy wodomierz (podobnie jak wszystkie rodzaje narzędzi mierniczych) wykazuje rozrzut wskazań ujawniający się przy wielokrotnym sprawdzaniu jego dokładności; wynika to z wielu przypadkowych źródeł błędów przy pomiarze, jak drobne przesunięcia (w granicach koniecznego luzu) osi wirnika, zmienne opory tarcia w elementach ruchomych, przypadkowe błędy odczytywania

wskazań itd. W ten sposób wodomierz z błędem systematycznym x wykaze przy sprawdzeniu jego dokładności błąd m , przy czym na ogół $m \neq x$.

Również rozkład błędów m można uważać za normalny.

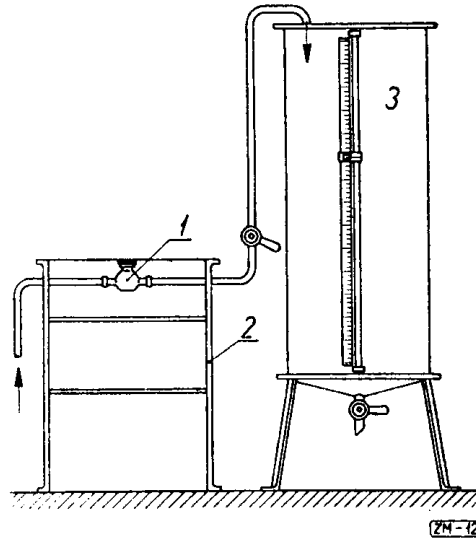
Po zmontowaniu wodomierza personel fabryczny sprawdza jego dokładność na urządzeniu, którego schemat przedstawia rys. 1. Woda przepływa przez wodomierz 1, umieszczony na stole mierniczym 2 i przedostaje się do zbiornika mierniczego 3 wywzorcowanego z dużą dokładnością przez Urząd Miar. Błąd wskazań zbiornika będziemy uważali za równy zeru. Jeżeli po pewnym czasie wskazanie wodomierza zmieni się o V_n , a wskazanie zbiornika o V_p , to za błąd wskazań wodomierza przy pojedynczym sprawdzeniu przyjmuje się

$$m = \frac{V_n - V_p}{V_n}.$$

Główny Urząd Miar ustalił dla wodomierzy skrzydełkowych (w pewnym obszarze natężeń przepływu) 2% jako górną granicę błędu $|m|$. Nazywamy tę górną granicę *błędem dopuszczalnym* i oznaczamy ją w ogólnym przypadku przez q . Jeżeli robotnik stwierdzi, że wartość $|m|$ przewyższa pewną wartość q_1 mniejszą od q ¹⁾, to powinien zmienić położenie specjalnej łopatki regulacyjnej.

Wodomierze sprawdza się dla trzech różnych natężeń przepływu. Aby wodomierz mógł być zalegalizowany, trzeba, żeby błąd wskazań przy żadnym z trzech natężeń nie przekroczył dopuszczalnego błędu q . W dalszym ciągu będziemy mówili o sprawdzaniu tylko przy jednym natężeniu przepływu. Będziemy rozpatrywali zbiór wodomierzy już po wyregulowaniu.

¹⁾ Przyjmuje się $q_1 < q$, a nie $q_1 = q$, aby zwiększyć stopień pewności, że przy późniejszym sprawdzeniu wodomierz nie będzie zdyskwalifikowany.



Rys. 1. Schemat urządzenia do sprawdzania wodomierzy.

Wskutek regulacji rozkład błędów ulegnie zmianie, jednakże odstępstwo to w praktyce będzie nieznaczące i w dalszym ciągu będziemy uważali rozkład ten za normalny. Załóżmy, że jego odchylenie średnie wynosi σ_0 . Robotnik stara się uregulować wodomierze tak, żeby błąd ich wskazań wynosił a . Inaczej mówiąc, wartość oczekiwana $E(x)$ błędów x jest a ²⁾.

Na sprawdzeniu wodomierza po regulacji kończą się czynności produkcyjne. Wodomierz wyregulowany, z błędem systematycznym x , przechodzi do rąk legalizatora Urzędu Miar, który na tym samym lub podobnym urządzeniu mierniczym ponownie sprawdza dokładność. Jeżeli przy tym sprawdzeniu wypadła $|m| \leq q$, uznaje się wodomierz za dokładny, a gdy $|m| > q$, zwraca się do poprawki. Wyjątek stanowią przypadki, gdy otrzymamy błąd bliski q . Sposób postępowania w tych przypadkach omówimy w ust. 3 (str. 113).

Niech odchylenie średnie błędów m określonego wodomierza o błędzie systematycznym x wynosi σ_1 ; wartość oczekiwana $E(m)$ będzie oczywiście x . Zakładamy, że σ_1 jest stałe dla wszystkich wodomierzy i że rozkład błędów m jest normalny.

σ_0 możemy wyznaczyć sprawdzając znaczną liczbę wodomierzy; σ_1 znajdziemy sprawdzając wielokrotnie ten sam wodomierz.

Wartości σ_0 i σ_1 można uważać za stałe dopóty, dopóki są spełnione warunki równowagi statystycznej, tzn. dopóki będzie się stosować wciąż te same tolerancje, materiały, metody obróbki, sposoby regulacji, sprawdzania itd.

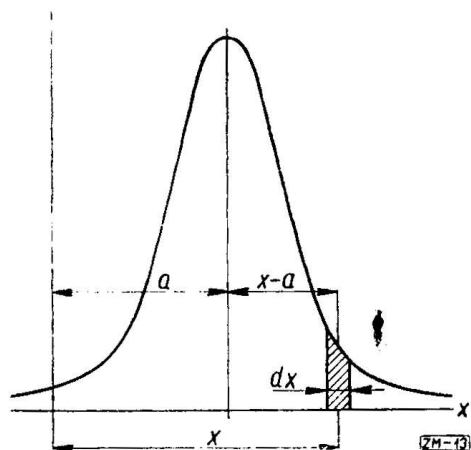
Mimo otrzymania przy sprawdzaniu wodomierza błędów wskazań $|m| \leq q$, nie wiemy na pewno — wobec wspomnianej zmienności wskazań, czy istotnie granica dopuszczalnych błędów nie jest przekroczona, zwłaszcza jeżeli $|m|$ jest bliskie q .

W związku z tym występuje zagadnienie następujące: Wartości σ_0 i σ_1 przyjmujemy za znane z doświadczenia, a wartości a i q zakładamy, opierając się przy pierwszej z nich na krzywej błędów wodomierza, a przy drugiej — na postanowieniu przepisów legalizacyjnych. Sprawdzaliśmy dokładność wodomierza dla pewnego

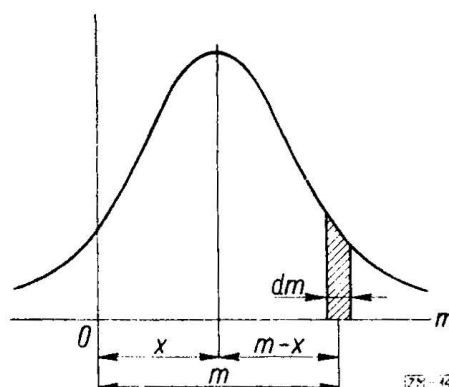
²⁾ Gdyby przepis o dokładności odnosił się tylko do jednego natężenia przepływu, to najkorzystniej byłoby regulować wodomierze tak, żeby a było równe 0. Do przyjmowania a nierównego zeru zmusza konieczność utrzymania błędów w granicach dopuszczalnych dla trzech różnych natężeń przepływu.

nateżenia przepływu i otrzymaliśmy błąd wskazań m ; zapytujemy, jakie jest prawdopodobieństwo $P_m(|x| \leq q)$, że błąd systematyczny x leży w przedziale $\langle -q, q \rangle$?

2. Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu obliczone na podstawie jednego pomiaru. Wprowadźmy następujące oznaczenia (rys. 2):



Rys. 2a. Rozkład normalny (a, σ_0) błędów systematycznych x partii narzędzi mierniczych.



Rys. 2b. Rozkład normalny (x, σ_1) błędów przypadkowych narzędzia mierniczego o błędzie systematycznym x .

$p(m)$ — gęstość rozkładu błędu m ;

$p(x)$ — gęstość rozkładu błędu x ; rozkład ten uważa się za normalny o parametrach (a, σ_0) ; rys. 2a,

$p_x(m)$ — gęstość rozkładu błędu m , jeżeli wiadomo, że błąd systematyczny danego narzędzia jest x ; rozkład ten uważa się za normalny o parametrach (x, σ_1) , rys. 2b;

$p_m(x)$ — gęstość rozkładu *a posteriori* błędu x , jeżeli wiadomo, że przy pomiarze otrzymano błąd m .

Na mocy twierdzenia o iloczynie prawdopodobieństw

$$(1) \quad p_m(x) = \frac{p(x)p_x(m)}{p(m)}$$

Po podstawieniu

$$p(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)p_x(m)dx$$

wzór (1) przyjmuje postać zwaną *wzorem Bayesa*³⁾. Z definicji

$$(2) \quad \tilde{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}\right],$$

$$(3) \quad p_x(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(m-x)^2}{2\sigma_1^2}\right].$$

Zmienna losowa m jest sumą dwóch zmiennych losowych o rozkładach normalnych: $m-x$ z parametrami $(0, \sigma_1)$ oraz x z parametrami (a, σ_0) . A więc rozkład m jest normalny z parametrami $(a, \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2})$, czyli

$$(4) \quad p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(a-m)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}\right].$$

Podstawiamy do wzoru (1) wartość $p(m)$ z (4) oraz wartości $\tilde{p}(x)$ i $p_x(m)$ z (2) i (3). Po uproszczeniach otrzymamy

$$(5) \quad p_m(x) = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sigma_1} \exp\left[\frac{(a-m)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)} - \frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(m-x)^2}{2\sigma_1^2}\right].$$

Wyrażenie $P_m(|x| \leq q)$, którego wartość nas interesuje, jest całką z $p_m(x)$ względem x od $-q$ do q . A zatem

$$(6) \quad P_m(|x| \leq q) = \int_{-q}^q p_m(x) dx = \\ = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sigma_1} \exp\left[\frac{(a-m)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}\right] \int_{-q}^q \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(m-x)^2}{2\sigma_1^2}\right] dx.$$

Podstawienie

$$(7) \quad x = \frac{m\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} + \frac{\sigma_0\sigma_1}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}} t$$

przeprowadza wzór (6) w

³⁾ Zwraca się uwagę, że wobec znanego z założenia rozkładu *a priori* nie będziemy korzystali z tzw. postulatu Bayesa o równomiernym rozkładzie *a priori*.

$$(8) \quad P_m(|x| \leq \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt,$$

gdzie

$$(9) \quad t_1 = -\frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}{\sigma_0 \sigma_1} \left(q + \frac{m\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \right),$$

$$(10) \quad t_2 = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}{\sigma_0 \sigma_1} \left(q - \frac{m\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \right).$$

Wzór (8) można napisać także w postaci

$$(11) \quad P_m(|x| \leq q) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

gdzie Φ oznacza funkcję Laplace'a

$$(12) \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt.$$

Podamy kilka przykładów liczbowych.

1. Niech będzie $\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $q = 0,2\%$, $a = 0$, $m = 0,1\%$. Podstawiając te wartości do wzorów (9) i (10) otrzymamy $t_1 = -0,983$, $t_2 = 0,683$. Z tablic wartości Φ mamy $\Phi(t_1) = -0,3373$, $\Phi(t_2) = 0,2528$. Zatem według wzoru (11) $P = 0,59$.

2. Gdybyśmy przy tych samych pozostałych danych otrzymali $m = 0,4\%$, a więc błąd większy od dopuszczalnego, to wypadłoby $P = 0,52$ czyli jeszcze ciągle dość duże prawdopodobieństwo, że błąd systematyczny narzędzia leży w granicach dozwolonych.

3. Przy dalszym wzroście m następuje jednak szybkie zmniejszenie P , a więc np. dla $m = 1,0\%$ jest $P = 0,24$.

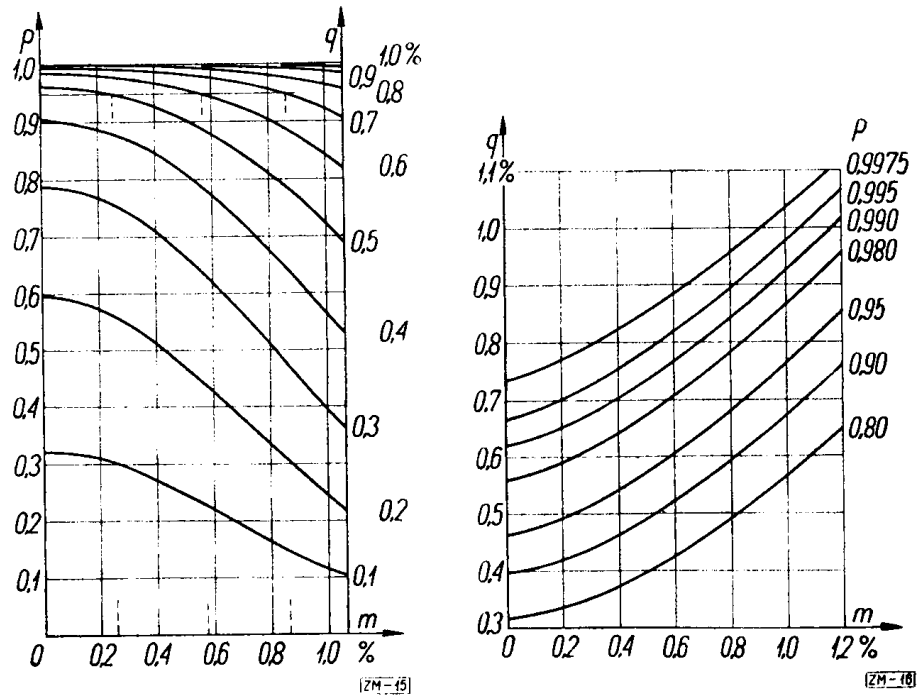
4. Gdyby granice dopuszczalnych błędów uległy rozszerzeniu, to nastąpiłby wzrost P . Np. przy pierwotnych danych ($m = 0,1\%$), lecz $q = 0,4\%$, wypada już $P = 0,90$, a nawet dla $m = 0,4\%$ jest jeszcze $P = 0,85$.

5. Gdy granice dopuszczalnych błędów są bardzo szerokie w porównaniu z σ_0 i σ_1 , to nawet przy dużej wartości otrzymanego błędu m jest duże prawdopodobieństwo, że nie będą one przekroczone.

Tak więc, np. dla $\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $q = 1,0\%$, $m = 1,2\%$ wypada $t_1 = -5,97$, $t_2 = 2,37$, skąd $P = 0,99$ (nawet dla $m = 2,0\%$ jeszcze jest $P = 0,88$).

Widać stąd, że gdy odchylenia średnie σ_0 i σ_1 są znane i małe wobec dopuszczalnych błędów q , to sprawdzanie narzędzi jest w ogóle niemal że zbędne, chyba tylko z obawy, że niesprawdzenie wpłynie na mniej staranne regulowanie i wykonanie narzędzi, a więc na wzrost σ_0 i σ_1 .

Rysunek 3 przedstawia wykres w układzie współrzędnych (m, P) dla $\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $a = 0$ i dla ciągu wartości q , a rysunek 4 — w układzie (m, q) dla ciągu wartości P . Z wykresu tego możemy



Rys. 3 i 4. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu q dla wyniku m jednorazowego pomiaru ($\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $a = 0$).

łatwo odczytać, że dla $q = 0,5\%$ musi być $|m| \leq 0,25\%$, aby było $P \geq 0,95$. Dla $q = 0,6\%$ musi być $|m| \leq 0,58\%$, a dla $q = 0,7\%$ musi być $|m| \leq 0,86\%$.

Wartości σ_0 i σ_1 są na ogół dość bliskie sobie. Dla uproszczenia obliczeń orientacyjnych można więc przyjąć, że $\sigma_0 = \sigma_1$. Wtedy wzory (9) i (10) upraszczają się:

$$(13) \quad t_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_1} [(2q+a)+m], \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_1} [(2q-a)-m].$$

3. Kryterium wystarczalności jednorazowego pomiaru. Powstaje pytanie, w jakich przypadkach wynik jednorazowego pomiaru wystarcza do oceny dokładności narzędzia. Praktyka laboratoryjna, m. in. w urzędach miar, stosuje zasadę, że gdy błąd narzędzia otrzymany przy pomiarze jest dość odległy od granic błędów dopuszczalnych, to jednorazowy pomiar uznaje się za dostateczny.

Dla wodomierzy⁴⁾ przyjmuje się np. następującą zasadę postępowania: jeżeli przy pierwszym pomiarze wypadnie

- (a) $|m| \leq 0,9q$, to wodomierz zostaje zalegalizowany;
- (b) $0,9q < m < 1,1q$, to pomiar zostaje powtórzony;
- (c) $|m| \geq 1,1q$, to wodomierz uznaje się za niegodny legalizacji.

Jeżeli dochodzi do drugiego stopnia sprawdzenia (przypadek b) i wyniki obu pomiarów są m_1 i m_2 , to oblicza się $\bar{m} = (m_1 + m_2)/2$; wodomierz legalizuje się, gdy $|\bar{m}| \leq q$, a uznaje za niegodny legalizacji, gdy $|\bar{m}| > q$.

Ten sposób postępowania, oparty na przyjęciu dowolnych współczynników 0,9 i 1,1 bez uwzględnienia rozrzutu wskazań wodomierzy, nie wydaje się dostatecznie uzasadniony.

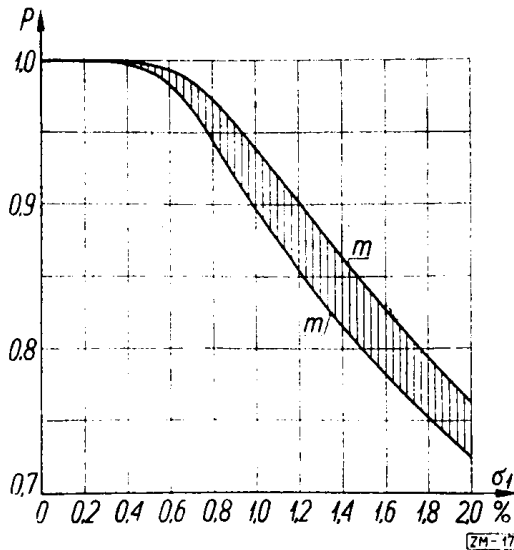
Widzieliśmy na przykładach, że nawet dość znaczna odległość otrzymanego błędu od granic błędów dopuszczalnych może nie być dostateczną podstawą do uważania, że granice te nie są przekroczone; z drugiej strony pojęcie „dość odległy“ nie jest wystarczająco sprecyzowane i w przeważającej liczbie przypadków sprawa ta jest pozostawiona swobodnej ocenie laboranta. Natomiast poprawne ujęcie tego zagadnienia powinno opierać się bądź na wyznaczeniu prawdopodobieństwa P według wzoru (12), że przy danym wyniku sprawdzenia m błąd systematyczny x nie przekroczy granicznych wartości dopuszczalnych $\pm q$, bądź na wyznaczeniu wartości błędu $|m|$, dla której prawdopodobieństwo, że błąd systematyczny x nie przekracza wartości dopuszczalnej $\pm q$, jest równe założonej wartości P . Takie rozwiązanie przy masowych sprawdzaniach jest praktycznie możliwe, skoro tylko uda się wyznaczyć wartości a , σ_0 i σ_1 . Poza tym należy jeszcze ustalić wartość P . Ta ostatnia zależy od znaczenia pomiarów. Jeżeli chodzi o pomiary odpowiedzialne,

⁴⁾ Instrukcja legalizacyjna dla przepływomierzy wodnych zamkniętych (wodomierzy). Wykonywanie legalizacji. 11. III. 49. Przepisy obowiązujące w miernictwie, poz. 5.722/1.3.

jak np. przy sprawdzaniu narzędzi mierniczych przez urzędy miar, gdy zależy na tym, żeby nie zalegalizować narzędzia z błędem przekraczającym dozwolone granice, to wartość P musi być wysoka, np. 0,995. Innymi słowy: gdyby wszystkie wyniki jednorazowych pomiarów wielkiej liczby narzędzi dały wynik o tym stopniu pewności, to 0,5% narzędzi zalegalizowanoby pomimo zbyt wielkiego błędu.

Przy $P=0,995$ wykres na rysunku 4 wskazuje, że dla $q=0,8\%$ musi być $|m|\leq 0,54\%$, aby można było się oprzeć na wyniku jednorazowego pomiaru; dla $q=1,0\%$ musi być $|m|\leq 1,05\%$, dla $q=0,5\%$ nawet wynik $m=0$ nie dałby dostatecznej gwarancji, iż błąd narzędzia zawiera się w granicach dopuszczalnych.

Na rysunku 4a podano przykładowo konsekwencje cytowanego przepisu legalizacyjnego przy zmiennej wartości odchylenia średnich



Rys. 4a. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu $q=2\%$ dla wodomierzy, które wykazały błędy $m=1,8\%$ lub $m'=2,2\%$ ($a=0$; $\sigma_0=\sigma_1$).

σ_0 i σ_1 . Przyjęto zgodnie z wymaganiami przepisów $q=2,0\%$; największa wartość błędu $|m|$, przy której wodomierz po jednorazowym pomiarze może być jeszcze zalegalizowany, jest $0,9q=1,8\%$, najmniejsza wartość błędu $|m'|$, przy której wodomierz po jednorazowym pomiarze będzie już odrzucony (bez powtórnego pomiaru) jest $1,1q=2,2\%$. Zakładamy ponadto $a=0$, $\sigma_0=\sigma_1$ i obliczamy z wzorów (13)

$$t_1 = \frac{4,102}{\sigma_1}, \quad t_2 = \frac{1,556}{\sigma_1} \quad (\text{dla } m),$$

$$t_1 = \frac{4,384}{\sigma_1}, \quad t_2 = \frac{1,273}{\sigma_1} \quad (\text{dla } m').$$

Wykres na rysunku 4a przedstawia prawdopodobieństwo P , że wodomierze, które przy sprawdzaniu wykazały błędy m (m'), mają błędy systematyczne nie przekraczające dopuszczalnych granic $\pm q$. Widać z wykresu, że dla $\sigma_1 > 0,6\%$ przyjęte współczynniki nie dają już wymaganej gwarancji (jeśli za taką uważać $P=0,995$), iż błędu

granicznego nie przekroczone, podczas gdy dla mniejszych wartości σ_1 przepis stawia wymagania bardzo surowe. Poza tym dla małych wartości σ_1 różnica ΔP prawdopodobieństw w obu przypadkach jest znikoma (np. dla $\sigma_1 = 0,4\%$ jest $\Delta P = 0,001$) i tym bardziej nie uzasadnia celowości sprawdzania w drugim stopniu. Rozpatrzmy teraz jedną z reguł nadających się do powiększenia pewności wyniku.

4. Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu obliczone na podstawie wyników wielokrotnych pomiarów.

(a) Sprawdzamy dokładność wodomierza, dla którego, jak poprzednio, wartości σ_0, σ_1, a, q są znane. Wykonywamy n niezależnych⁵⁾ pomiarów przy pewnym natężeniu przepływu i otrzymujemy błędy wskazań m_1, m_2, \dots, m_n . Zapytujemy o prawdopodobieństwo $P_m(|x| \leq q)$, że błąd systematyczny x tego wodomierza leży w przedziale od $-q$ do q . Wodomierz uważamy za godny legalizacji („dobry“), gdy prawdopodobieństwo to nie jest mniejsze od założonej wartości.

(b) Zauważmy, że zagadnienie postawione w punkcie (a) można rozwiązać nie znając wartości σ_0 i σ_1 .

W tym przypadku nie obchodzi nas to, do jakiej zbiorowości należy dane narzędzie miernicze, lecz interesuje nas tylko badany egzemplarz narzędzia, którego rozrzut wskazań oceniamy na podstawie sprawdzenia tego egzemplarza, nie biorąc pod uwagę wartości σ_0 wyznaczonej uprzednio przez zbadanie innych egzemplarzy. Pozornie jest to droga właściwa, ale zobaczymy, czy można stąd uzyskać wystarczające informacje o interesującym nas prawdopodobieństwie.

Rozwiązanie to opiera się na rozkładzie Studenta wielkości

$$(14) \quad t = \frac{x - \bar{m}}{s_{\bar{m}}}$$

gdzie

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n}, \quad s_{\bar{m}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

⁵⁾ Tzn., że przystąpienie do następnego pomiaru nie jest uzależnione od wyniku pomiarów poprzednich. Z góry zakładamy, że decyzja nastąpi po n pomiarach.

$$(15) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}{n-1}}.$$

Prawdopodobieństwo $P(\varepsilon_1 < x - \bar{m} < \varepsilon_2)$, że wartość różnicy między rzeczywistą wartością x mierzonej wielkości a średnią arytmetyczną z otrzymanych wyników n pomiarów jest zawarta w granicach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, przy czym $\varepsilon_1 = t_1 s_{\bar{m}}$, $\varepsilon_2 = t_2 s_{\bar{m}}$, określa się wzorem

$$(16) \quad P(\varepsilon_1 < x - \bar{m} < \varepsilon_2) = \int_{t_1}^{t_2} S(t, k) dt,$$

gdzie

$$(17) \quad S(t, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (k = n - 1).$$

Pytamy o prawdopodobieństwo P zawierania się x w granicach od $-q$ do q . Zakładając q i mając z pomiarów wartości \bar{m} oraz $s_{\bar{m}}$ można z (14) obliczyć t_1 i t_2 :

$$t_1 = -\frac{q + \bar{m}}{s_{\bar{m}}}, \quad t_2 = \frac{q - \bar{m}}{s_{\bar{m}}},$$

a wtedy dla danej liczby pomiarów n można z (16) obliczyć P .

Zauważmy, że liczba pomiarów n , która wchodzi w grę w praktyce urzędów miar przy pomiarach o dokładności zwyczajnej, wynosi 2, a co najwyżej 3. Pomiaru są na ogół długotrwałe i jeśli 2 lub 3 pomiary nie pozwolą zdecydować, czy błąd dopuszczalny nie jest przekroczony, to korzystniej jest sprawdzone narzędzie doregulować.

Gdy zauważymy, że dla $n = 2$ i $k = 1$

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = 0! = 1, \quad \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi},$$

znajdziemy z (17)

$$S(t, 1) = \frac{1}{\pi} (1 + t^2)^{-1},$$

a zatem na mocy (16)

$$(18) \quad P(\varepsilon_1 < x - \bar{m} < \varepsilon_2) = \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} (\text{arc tg } t_2 - \text{arc tg } t_1).$$

Przypuśćmy dla przykładu, że otrzymano z pomiarów wartości błędów $m_1 = 1,03\%$, $m_2 = 0,95\%$, podczas gdy granice dopuszczalnych błędów wynoszą $\pm q = \pm 1,0\%$.

Obliczamy $\bar{m} = 0,99\%$, $n = 2$, $k = 1$, $s_{\bar{m}} = 0,04\%$, a dalej

$$t_1 = \frac{1+0,99}{0,04} = -49,75, \quad t_2 = \frac{1-0,99}{0,04} = 0,25.$$

Wreszcie

$$\varepsilon_1 = -49,75 \cdot 0,04\% = -1,99\%, \quad \varepsilon_2 = 0,25 \cdot 0,04\% = 0,01\%$$

oraz

$$P(-1,99\% < x - \bar{m} < 0,01\%) = \frac{1}{\pi} (\text{arc tg } 0,25 + \text{arc tg } 49,74) = 0,57.$$

Jest to wartość, która nie pozwala na decyzję, o którą chodzi.

Jak łatwo sprawdzić, przy powyższym sposobie obliczenia z gwarancją $P = 0,99$ moglibyśmy jedynie stwierdzić, że

$$-1,56\% < x < 3,54\%,$$

co stanowi wynik nieużyteczny.

Zauważmy, że opierając się na dodatkowych danych w postaci $\sigma_0 = 0,3\%$ i $\sigma_1 = 0,4\%$ dla tegoż przykładu już po jednorazowym pomiarze z rysunku 4 otrzymujemy $P \approx 0,995$.

Przy rosnącej liczbie pomiarów błąd średniej arytmetycznej jednak zmniejsza się i pewność jej wzrasta, ale ten sposób obliczenia nie ma wtedy znaczenia praktycznego.

(c) Natomiast metoda opierająca się na uprzednio wyznaczonych wartościach σ_0 i σ_1 bez zwracania uwagi na mało istotną wartość rozrzutu średniego $s_{\bar{m}}$ (p. wzór (14)) okazuje się, jak zobaczymy, bardziej celowa dla małych wartości n .

Wzory dla wielokrotnych pomiarów odpowiadające wzorom (9), (10) i (11) dla pomiarów jednorazowych można napisać od razu biorąc pod uwagę, że n pomiarów ze średnią arytmetyczną \bar{m} możemy uważać za jeden pomiar o wyniku \bar{m} i odchyleniu średnim σ_1 / \sqrt{n} . Wzór (11) pozostaje więc w mocy, a z (9) i (10) otrzymujemy

$$(19) \quad t_1 = - \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2}}{\sigma_0 \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)} \left(q + \frac{\bar{m}\sigma_0^2 + a \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\sigma_0^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2} \right),$$

$$t_2 = - \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2}}{\sigma_0 \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)} \left(q - \frac{\bar{m}\sigma_0^2 + a \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\sigma_0^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2} \right),$$

albo, oznaczając przez M sumę wyników wszystkich n pomiarów, czyli

$$\bar{m}n = M,$$

$$(20) \quad t_1 = - \frac{\sqrt{n\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}{\sigma_0\sigma_1} \left(q + \frac{M\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{n\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \right),$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{n\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}{\sigma_0\sigma_1} \left(b - \frac{M\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{n\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \right).$$

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy liczba pomiarów jest bardzo znaczna. Pomijając w (19) wyrazy σ_1/\sqrt{n} wobec σ_0 otrzymamy

$$t_1 \approx - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1} (q + \bar{m}), \quad t_2 \approx \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1} (q - \bar{m}).$$

Gdy $|\bar{m}| < q$, to zawsze można dobrać takie wielkie n , by t_1 było dowolnie dużą liczbą ujemną, a t_2 — dowolnie dużą liczbą dodatnią; w ten sposób P może być dowolnie bliskie 1. Gdy natomiast $|\bar{m}| > q$, to można znowu zawsze dobrać takie wielkie n , by obie granice miały dowolnie duże wartości (o jednakowych znakach) i żeby wobec tego P było dowolnie bliskie 0. Wreszcie dla $\bar{m} = \pm q$ jedna z granic może mieć dowolnie dużą wartość, gdy druga jest zerem, zatem w tym przypadku P może być dowolnie bliskie 1/2.

Podamy kilka przykładów liczbowych, nawiązując do poprzednich przykładów dla pomiarów jednorazowych. Gdyby w przykładzie 1 w razie powtórzenia pomiaru otrzymano ponownie ten sam wynik $m = 0,1\%$, to z (20) dla $M = 0,2\%$ wypadłyby nowe wartości granic $t_1 = -1,23$ i $t_2 = 0,72$, skąd $P = 0,65$, co stanowi wzrost prawdopodo-

bieństwa, iż błąd dopuszczalny nie został przekroczony. Gdyby pomiar powtórzono raz jeszcze znów z tym samym wynikiem $m=0,1\%$, zatem $M=0,3\%$, to wypadłoby $t_1=-1,44$ i $t_2=0,75$, skąd $P=0,70$.

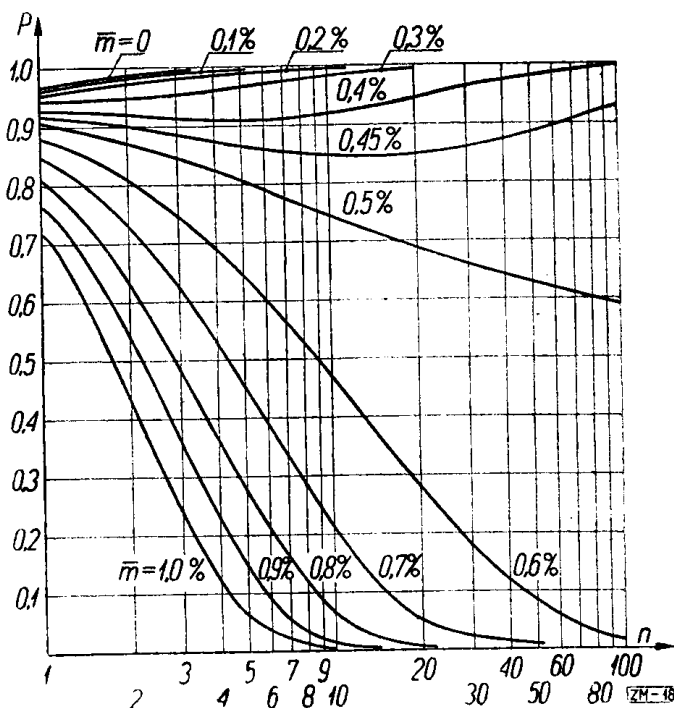
Gdyby w przykładzie 1 powtórzony pomiar dał wynik $m=0,4\%$ ($M=0,5\%$), to wypadłoby $t_1=-1,62$, $t_2=0,33$ i $P=0,58$, a więc wskutek drugiego pomiaru prawdopodobieństwo nieprzekroczenia błędu dopuszczalnego nieco by się zmniejszyło. Gdyby trzeci pomiar dał $m=-0,2\%$, to wypadłoby znów $P=0,70$.

Zauważamy ponownie, że podany sposób obliczenia nie uwzględnia wcale rozrzutu wyników poszczególnych pomiarów; na obliczenie P wpływa tylko ich średnia arytmetyczna \bar{m} .

Gdyby było $q=0,4\%$, a więc granice dopuszczalnych błędów szersze, a poszczególne wyniki trzech pomiarów jak w przykładzie poprzedzającym $m_1=0,1\%$, $m_2=0,4\%$, $m_3=-0,2\%$, to odpowiednie wartości P byłyby $0,90$, $0,90$ i $0,96$, a gdyby z dziesięciu pomiarów wynikło $m=0,18\%$, czyli $M=1,8\%$, to byłyby $P=0,983$.

Rysunek 5 przedstawia prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia błędu dopuszczalnego $q=\pm 0,5\%$ (przy $\sigma_0=0,3\%$, $\sigma_1=0,4\%$, $a=0$) w zależności od wartości średniej arytmetycznej \bar{m} otrzymanej przy różnych liczbach n pomiarów⁶⁾.

⁶⁾ Rozpatrywanie tej zależności przy większych wartościach n i przy małych wartościach P ma znaczenie tylko dla zbadania charakteru funkcji przedstawionej przez wzory (9), (10) i (20).



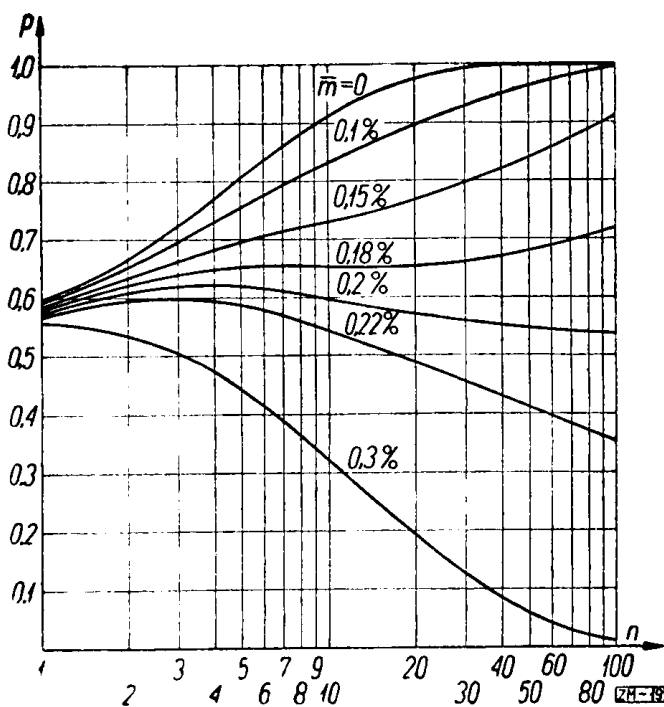
Rys. 5. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu $q=0,5\%$ przy średniej arytmetycznej \bar{m} wyników n pomiarów ($\sigma_0=0,3\%$, $\sigma_1=0,4\%$, $a=0$).

Mamy tu dwie grupy krzywych: 1) dla $\bar{m}/q < 1$, kiedy $P \rightarrow 1$, gdy $n \rightarrow \infty$, oraz 2) dla $\bar{m}/q > 1$, kiedy $P \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Obie te grupy dzieli krzywa graniczna dla $\bar{m}/q = 1$, dla której $\lim P = 1/2$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Gdy $\bar{m}/q > 1$, to przy wzroście n zmniejsza się prawdopodobieństwo nieprzekroczenia błędu q i to tym szybciej, im \bar{m}/q jest większe. W razie otrzymania przy dwóch pomiarach $\bar{m} = 1,0\%$ prawdopodobieństwo to wynosi jeszcze $P = 0,44$; jeśli ta sama wartość \bar{m} wypadnie przy pięciu pomiarach, to P zmniejszy się do $0,06$. Inaczej jest dla krzywych pierwszej grupy: a więc np. w razie otrzymania przy dwóch pomiarach $\bar{m} = 0,1\%$

TABLICA I

n	1	2	5	10	20	100
P	0,927	0,917	0,908	0,916	0,939	0,997

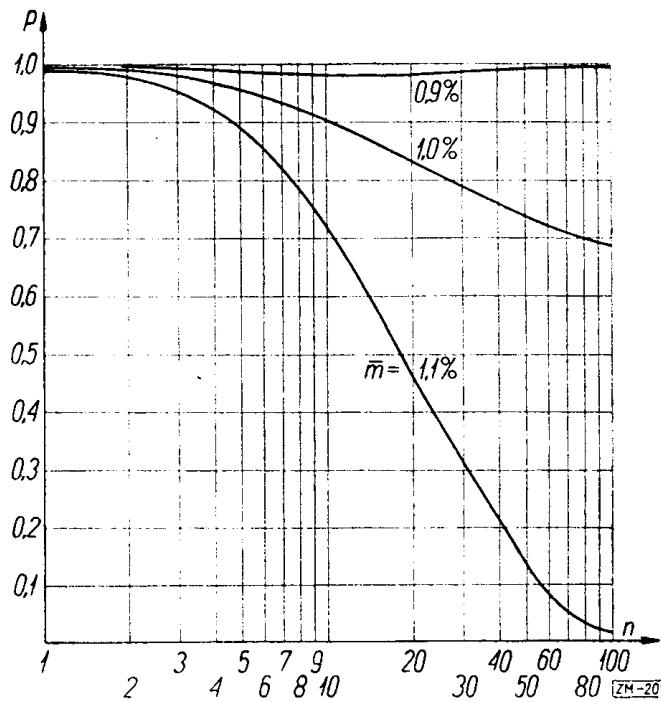


Rys. 6. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu $q = 0,2\%$ przy średniej arytmetycznej \bar{m} wyników n pomiarów ($\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $a = 0$).

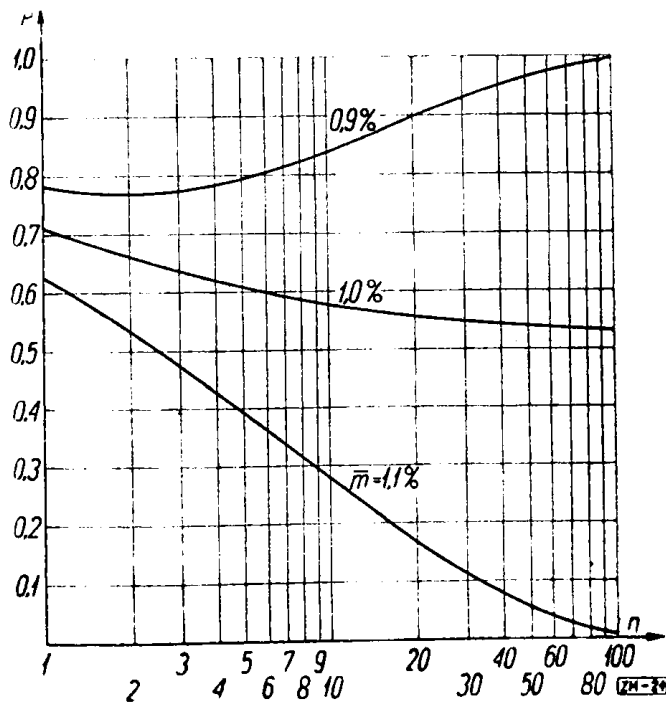
mamy $P = 0,981$; gdy tę samą wartość otrzymamy przy pięciu pomiarach, P podniesie się do $0,997$.

Na uwagę zasługuje jednak osobliwy przebieg krzywych, zwłaszcza dla \bar{m} w pobliżu wartości granicznej: przy wzroście n początkowo P zmniejsza się, a dopiero powyżej pewnej wartości (tym większej, im \bar{m} bliższe wartości granicznej) rozpoczyna się wzrost. Tak więc np. dla $\bar{m} = 0,4\%$ otrzymujemy wartości P przedstawione w tabeli I. Zatem wynik $m =$

$= 0,4\%$ przy jednorazowym pomiarze daje większą gwarancję nieprzekroczenia błędu $q = 0,5\%$ niż w przypadku, gdy ta wartość m



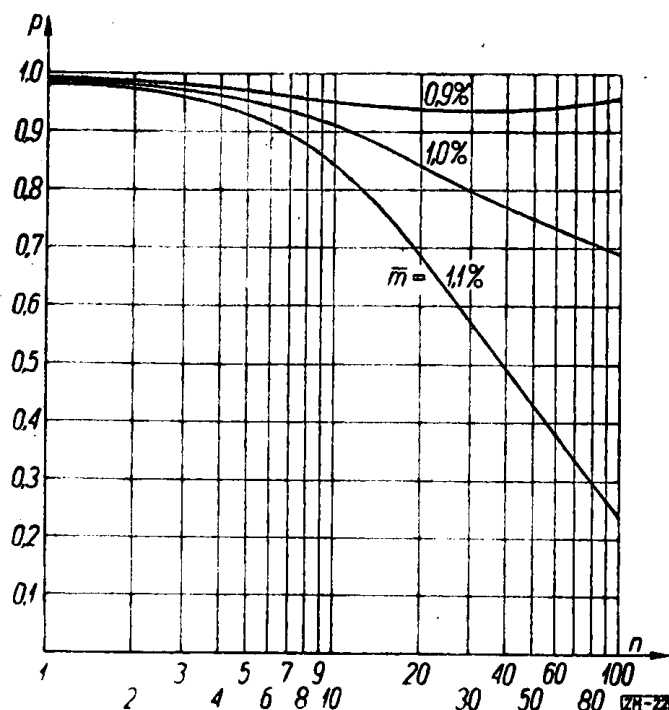
Rys. 7. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu $q = 1,0\%$ przy średniej arytmetycznej \bar{m} wyników n pomiarów ($\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $\alpha = 0$).



Rys. 8. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu $q = 1,0\%$ przy średniej arytmetycznej \bar{m} wyników n pomiarów ($\sigma_0 = 0,8\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $\alpha = 0$).

jest średnią arytmetyczną otrzymaną z dwóch, pięciu lub nawet dziesięciu pomiarów, jednak ta sama wartość jako średnia arytmetyczna wzrastającej w dalszym ciągu liczby pomiarów daje wzrastającą gwarancję.

Rysunek 6 przedstawia analogiczny wykres krzywych prawdopodobieństwa dla tych samych wartości $\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $a = 0$,



Rys. 9. Prawdopodobieństwo P nieprzekroczenia dopuszczalnego błędu $q = 1,0\%$ przy średniej arytmetycznej \bar{m} wyników n pomiarów ($\sigma_0 = 0,4\%$, $\sigma_1 = 0,8\%$, $a = 0$).

dopuszczalnych błędów $q = 1,0\%$. W tym przypadku dla małych wartości n otrzymuje się większe wartości P niż w przykładzie z rysunku 5.

Przykład na rysunku 8 odpowiada przykładowi poprzedniemu (rys. 7), jednak z tą różnicą, że $\sigma_0 = 0,8\%$. Dla małych wartości n i wartości \bar{m} bliskich błędowi granicznemu otrzymujemy wskutek tego znacznie mniejsze wartości P , pomimo małej wartości σ_1 (rozrzutu wskazań poszczególnych egzemplarzy przyrządu.) W odróżnieniu od przypadków zilustrowanych rysunkami 5, 6 i 7

lecz dla zwężonych granic dopuszczalnych błędów $q = 0,2\%$. Krzywa graniczna odpowiada tutaj wartości $\bar{m} = q = 0,2\%$ i wykazuje początkowy wzrost P ze wzrostem n , a następnie zmniejszanie się P aż do wartości granicznej 0,5. Jest jasne, że wobec zwężonych granic q dla małych wartości n otrzymuje się w tym przypadku znacznie mniejsze wartości P niż w poprzednim przykładzie.

Na rysunku 7 podano krzywe P też dla $\sigma_0 = 0,3\%$, $\sigma_1 = 0,4\%$, $a = 0$, lecz dla znacznie rozszerzonych granic

zmiana wartości \bar{m} o $0,1q$ powoduje już dla jednorazowego pomiaru dość znaczną zmianę wartości P .

Wreszcie przykład na rysunku 9. odpowiada przykładowi z rysunku 8, jednak zamieniono tu z sobą wartości σ_0 i σ_1 . W danym przypadku, pomimo znacznej stosunkowo wartości σ_1 , nawet przy wartościach \bar{m} bliskich błędowi granicznego, już przy $n=1$ otrzymuje się znaczne wartości P . Widać stąd, że znaczenie wartości σ_0 i σ_1 jest różne.

Mały rozrzut σ_0 błędów systematycznych zbiorowości ogólnej przyrządów pozwala na osiągnięcie dużego stopnia pewności pomimo dużej wartości rozrzutu wskazań σ_1 poszczególnych przyrządów, ale odwrotny wniosek nie jest słuszny. Wnioski te z łatwością można wyprowadzić ogólnie na podstawie wzorów (9) i (10) lub (20) (przy założeniu, że $|a| \leq q$, jak to zachodzi w praktyce).

5. Zalety nowej metody. Podana wyżej metoda obliczeń umożliwia uzasadnioną decyzję co do stopnia pewności wyniku *jednorazowego* sprawdzania. Bez uprzednich danych o rozrzucie wskazań w ogóle nie można byłoby mówić o dokładności narzędzia mierniczego na podstawie jednorazowego pomiaru. Jeżeli jednak w dotychczasowej codziennej praktyce decyzję taką podejmujemy, to dzieje się to zazwyczaj na podstawie podświadomego przekonania, że rozrzut wskazań sprawdzanego narzędzia mierniczego jest mały w porównaniu z dopuszczalnym błędem.

Gdy jest kilka pomiarów ($n > 1$), można by wątpić, czy wolno oceniać rozrzut pomiarów danego egzemplarza opierając się jedynie na wartościach σ_0 i σ_1 wyznaczonych poprzednio dla całej produkcji. Sprawę tę rozważyliśmy już w punkcie 4b. Dodamy tutaj, że z punktu widzenia nowoczesnej produkcji obawa ta nie jest istotna. Dążenie do wysokiej jednorodności wyrobów wymaga bowiem utrzymania możliwie ustabilizowanych warunków produkcji, a więc i mało zmiennych wartości rozrzutów i wartości a . Nadzór produkcji powinien dbać o systematyczną kontrolę statystyczną rozrzutu⁷⁾.

⁷⁾ Należałoby rozważyć, czy w pewnych przypadkach, zwłaszcza przy $\sigma_0/q \ll 1$ i $\sigma_1/q \ll 1$, systematyczne kontrolowanie stałości rozrzutów i wartości a nie powinno zastępować sprawdzania dokładności wszystkich egzemplarzy narzędzia mierniczego. Wiąże się to ze sprawą możliwości wyrywkowego sprawdzania tych narzędzi przez urzędy miar.

Dane te mogą być cenniejsze niż w dużym stopniu przypadkowe wartości rozrzutów s , wyznaczone przy kilkakrotnym sprawdzaniu poszczególnego egzemplarza.

(Praca wpłynęła dnia 8. 10. 1952 r.)

Я. О Б А Л Ь С К И (Варшава)

О НАДЕЖНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОВЕРКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

РЕЗЮМЕ

Если ошибка полученная в результате проверки точности измерительного прибора близкая допустимого предела, то возникает возможность что прибор будет неправильно забракован или принят, в особенности когда рассеяние показаний прибора сравнительно большое.

Для измерительных приборов массового производства подан метод расчета степени уверенности в том, что систематическая ошибка прибора не превосходит допустимого предела.

Метод основан на данных о результатах измерений, а также распределений систематических ошибок в партиях проверяемых приборов и распределений показаний отдельного экземпляра. Метод применим к однократным и многократным измерениям.

J. O B A L S K I (Warszawa)

ON THE RELIABILITY OF TESTING MEASURING INSTRUMENTS

SUMMARY

When, in testing the accuracy of a measuring instrument, we obtain an error which is near the admissible limit, it is possible to make a wrong decision as to the rejection or acceptance of the instrument, especially if it shows a comparatively wide spread of readings. With regard to mass produced measuring instruments, the author gives a method of calculating the probability that the limit is not exceeded. The method is based on the results of measurements and on data concerning the distribution of systematic errors in lots of instruments delivered for testing after regulation, and the distribution of readings in a single specimen. The method may be applied both to single and to repeated measurements.