I. KOŹNIEWSKA (Warszawa)

PIERWSZY ABSOLUTNY MOMENT CENTRALNY DLA ROZKŁADU PÓLYI

1. Dogodną miarą rozrzutu zmiennej losowej jest jej pierwszy absolutny moment centralny. W niniejszej pracy wyprowadzono wzór (2) na pierwszy absolutny moment centralny zmiennej losowej o rozkładzie Pólyi, a więc w szczególności dla zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym i hipergeometrycznym.

Należy zaznaczyć, że wzór na pierwszy absolutny moment centralny znany jest dla rozkładu dwumianowego, przy czym dowód jego opiera się na twierdzeniu Eulera dla funkcji jednorodnych[1]). Przeprowadzony w niniejszej pracy dowód jest prostszy, nie wychodzi bowiem poza zakres rozważań kombinatorycznych.

2. Przypomnimy kilka określeń z rachunku prawdopodobieństwa.

Określenie 1. Przez *pierwszy absolutny moment centralny* dowolnej zmiennej losowej X o n punktach skokowych x_k i skokach p_k, gdzie $P(X=x_k)=p_k>0$ dla $k=0,1,\ldots,n$, rozumie się wyrażenie

$$\beta_1=\sum_{k=0}^{n}|m-x_k|p_k,$$

w którym $m=E(X)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Określenie 2. Mówimy, że zmienna losowa X o punktach skokowych $k=0,1,\ldots,n$ i skokach p_k, gdzie $P(X=k)=p_k>0$ ma *rozkład Pólyi*, jeśli

$$p_k=\binom{n}{k}\frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(p+ia)\prod\limits_{i=0}^{n-k-1}(q+ia)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(1+ia)}, \tag{1}$$

[1]) J. V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability*, 1937, str. 177.

przy czym $p+q=1$, $\alpha>-1$, a pierwszy górny iloczyn dla $k=0$ oznacza 1.

W szczególnym przypadku, gdy parametr $\alpha=0$, rozkład Pólyi jest rozkładem dwumianowym, wówczas bowiem

$$p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

W przypadku gdy $\alpha=-1/N$, rozkład Pólyi jest rozkładem hipergeometrycznym. Wówczas

$$p_k=\binom{n}{k}\frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}\left(p-\frac{i}{N}\right)\prod\limits_{i=0}^{n-k-1}\left(q-\frac{i}{N}\right)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)}.$$

3. Udowodnimy

TWIERDZENIE. *Pierwszy absolutny moment centralny β_1 zmiennej losowej X, mającej rozkład Pólyi, wyraża się wzorem*

$$\beta_1=2rp_r[q+(n-r)\alpha], \tag{2}$$

gdzie $r=\mathrm{E}(np)+1$ (r jest *entier* z np powiększone o 1).

Dowód twierdzenia opiera się na trzech lematach.

Lemat 1. *Dla dowolnej zmiennej losowej X o punktach skokowych $k=0,1,\ldots n$ i skokach p_k, gdzie $P(X=k)=p_k>0$, pierwszy absolutny moment centralny daje się wyrazić wzorem*

$$\beta_1=2\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(m)}(m-k)p_k=2\sum_{k=\mathrm{E}(m)+1}^{n}(k-m)p_k. \tag{3}$$

Istotnie, pierwszy absolutny moment centralny zmiennej X równa się według definicji

$$\beta_1=\sum_{k=1}^{n}|m-k|p_k,$$

zaś pierwszy zwykły moment centralny ma postać

$$\mu_1=\sum_{k=0}^{n}(m-k)p_k=0.$$

Każde z tych wyrażeń rozkładamy na dwie części w sposób następujący:

$$\beta_1=\sum_{k=0}^{E(m)}(m-k)p_k+\sum_{k=E(m)+1}^{n}(k-m)p_k,$$

$$\mu_1=\sum_{k=0}^{E(m)}(m-k)p_k+\sum_{k=E(m)+1}^{n}(m-k)p_k.$$

Dodając te równości stronami znajdujemy

$$\beta_1=2\sum_{k=1}^{E(m)}(m-k)p_k, \tag{4}$$

a odejmując je stronami otrzymujemy

$$\beta_1=2\sum_{k=E(m)+1}^{n}(k-m)p_k. \tag{5}$$

Z wzorów (4) i (5) otrzymujemy natychmiast wzór (3).

Lemat 2. *Dla wszystkich naturalnych n oraz s takich, że $n\geqslant s+1$, zachodzi tożsamość*

$$(n-s)\binom{n}{s}=(s+1)\binom{n}{s+1}. \tag{6}$$

Istotnie, podstawiając po każdej stronie wzoru (6) wartości określone symbolami, otrzymujemy

$$\frac{(n-s)n!}{s!(n-s)!}=\frac{(s+1)n!}{(s+1)!(n-s-1)!}.$$

Lewą stronę tej równości skracamy przez $(n-s)$ a prawą przez $(s+1)$ i otrzymujemy po obu stronach

$$\frac{n!}{s!(n-s-1)!}.$$

Lemat 2 został zatem udowodniony.

Lemat 3. *Dla każdego $s=1,2,\ldots,n$*

$$\sum_{k=0}^{s-1}p_k(np-k)=sp_s[q+(n-s)\alpha], \tag{7}$$

gdzie $p_k=P(X=k)$ jest określone wzorem (1).

Dowód lematu przeprowadzamy przy pomocy zasady indukcji zupełnej.

I tak, dla $s=1$ mamy

$$p_0 np = \binom{n}{0}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(q+ia)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+ia)}np = \binom{n}{1}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(q+ia)p}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+ia)} =$$

$$= \binom{n}{1}\frac{p\prod_{i=0}^{n-2}(q+ia)[q+(n-1)a]}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+ia)} = p_1[q+(n-1)a].$$

Zakładamy teraz prawdziwość wzoru (7) dla $s=s_0$. Obliczymy sumę s_0+1 wyrazów, korzystając w przekształceniach z lematu 2:

$$\sum_{k=0}^{s_0} p_k(np-k) = s_0 p_{s_0}[q+(n-s_0)a] + p_{s_0}(np-s_0) =$$

$$= p_{s_0}[s_0 q + s_0(n-s_0)a + np - s_0] =$$

$$= p_{s_0}[-s_0 p + s_0(n-s_0)a + np] = p_{s_0}(n-s_0)(p+s_0 a) =$$

$$= \binom{n}{s_0}\frac{\prod_{i=0}^{s_0-1}(p+ia)\prod_{i=0}^{n-s_0-1}(q+ia)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+ia)}(n-s_0)(p+s_0 a) =$$

$$= (s_0+1)\binom{n}{s_0+1}\frac{\prod_{i=0}^{s_0}(p+ia)\prod_{i=0}^{n-s_0-2}(q+ia)[q+(n-s_0-1)a]}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+ia)} =$$

$$= (s_0+1)p_{s_0+1}[q+(n-s_0-1)a],$$

a to jest prawą stroną wzoru (7) dla $s=s_0+1$. Tym samym lemat został udowodniony.

Dowód rozważanego twierdzenia, a mianowicie wzoru (2), otrzymujemy jako natychmiastowy wniosek z lematów 1 i 3.

I tak, na podstawie lematu 1 poszukiwany pierwszy moment absolutny centralny rozkładu Pólyi, dla którego wartość oczekiwana m jest np, wyraża się wzorem

$$\beta_1 = 2\sum_{k=0}^{E(np)}(np-k)p_k. \tag{8}$$

Stosując do wzoru (8) lemat 3 otrzymujemy

$$\beta_1 = 2\sum_{k=0}^{E(np)} (np-k)p_k = 2rp_r[q+(n-r)a],$$

gdzie $r=E(np)+1$.

Twierdzenie zostało zatem udowodnione.

Wniosek 1. *Dla rozkładu dwumianowego, wyrażającego się wzorem*

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

pierwszy absolutny moment centralny równy jest

$$\beta_1 = 2r\binom{n}{r} p^k q^{n-r+1}$$

przy $r=E(np)+1$.

Wniosek 2. *Dla rozkładu hipergeometrycznego, wyrażającego się wzorem*

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{n=0}^{k-1}\left(p-\frac{i}{N}\right)\prod_{n=0}^{n-k-1}\left(q-\frac{i}{N}\right)}{\prod_{i=0}^{i-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)},$$

pierwszy absolutny moment centralny ma postać

$$\beta_1 = 2rp_r\left[q-\frac{n-r}{N}\right]$$

przy $r=E(np)+1$.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(Praca wpłynęła dnia 5. 12. 1952 r.)

И. КОЗНЕВСКАЯ (Варшава)

АБСОЛЮТНЫЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛИЯ

РЕЗЮМЕ

Удобной характеристикой уклонения случайной величины от своего среднего значения является ее абсолютный центральный момент первого порядка. В предлагаемой статье получена формула (2) для абсолютного центрального момента первого порядка для случайной величины полученной

по распределению Полия, и тем самым в частности для случайной величины с биномиальным и гипергеометрическим распределениями.

Следует отметить, что формула для абсолютного центрального момента первого порядка общеизвестна для биномиального распределения, доказательство же ее основано на тождестве Эйлера для однородных функций[1]). Доказательство в предлагаемой статье проще, так как не выходит за пределы комбинаторных рассуждений.

I. KOŹNIEWSKA (Warszawa)

THE FIRST ABSOLUTE CENTRAL MOMENT FOR PÓLYA'S DISTRIBUTION

SUMMARY

A convenient measure of the spread of a random variable is its first absolute central moment. In the present paper the author works out formula (2) for the first absolute moment of a central random variable having Pólya's distribution, *i. e.* particularly for a random variable with a binomial and hypergeometric distribution.

It should be pointed out that the formula for the first absolute central moment is known for a binomial distribution, its proof being based on Euler's theorem on homogeneous functions[1]). The proof given in the present paper is simpler, as it does not go beyond combinatorical considerations.

---

[1]) J. V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability*, 1937, str. 177.