ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

W. SZWARC (Wrocław)

O PEWNYM MACIERZOWYM ZAGADNIENIU PERKALA

1.1. Wstęp. W przypadku, gdy zespół cech, którymi charakteryzujemy badane przedmioty przyrodnicze, składa się tylko z dwóch cech, są one w rozważanej populacji czy próbie skorelowane dodatnio (nie ujemnie) lub ujemnie. W drugim z tych przypadków wystarczy jedną z cech pomnożyć przez -1, aby otrzymać zespół cech skorelowanych dodatnio. Ale jeśli zespół cech liczy więcej niż 2 cechy, sprawa się komplikuje. Przez zmianę znaku przy poszczególnych cechach możemy zmieniać znaki korelacji między poszczególnymi parami cech, ale może się okazać, że zawsze niektóre pary cech będą ujemnie skorelowane. J. Perkal nazywa zespół cech *zgodnym*, jeśli suma wskaźników korelacji między wszystkimi parami cech tego zespołu nie może być powiększona przez zmianę znaku przy którejś z cech. Zachodzi pytanie, jak pozmieniać znaki poszczególnych cech, aby zespół stał się zgodny. Praca niniejsza odpowiada na to pytanie.

J. Perkal na jednym z posiedzeń seminarium ze statystyki w 1958 r. sformalizował to zagadnienie następująco:

Dana jest kwadratowa i symetryczna macierz $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $a_{ij} = a_{ji}$, oraz układ n liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_k = +1$ lub -1 dla $k = 1, 2, \ldots, n$). Mnożąc wszystkie elementy k-tego wiersza i jednocześnie k-tej kolumny macierzy $\{a_{ij}\}$ przez ε_k otrzymamy macierz $\{b_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $b_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij}$.

Powstaje zagadnienie: Przy jakich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ zachodzi

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \max\,[1]?$$

[1] Istnieje zagadnienie dualne: Przy jakich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ zachodzi

$$\sum_i \sum_j b_{ij} = \min?$$

Zagadnienie dualne sprowadza się do pierwszego przez zamianę macierzy $\{a_{ij}\}$ na $\{-a_{ij}\}$.

W pracy niniejszej podany będzie warunek konieczny i dostateczny na to, by macierz $\{b_{ij}\}$ spełniała (1), oraz metoda pozwalająca wyznaczyć taką macierz.

2.1. Dla wygody rozpatrzmy zbiór elementów znajdujących się poniżej głównej przekątnej macierzy $\{a_{ij}\}$, który nazwiemy *półmacierzą* $A = \underline{|a_{ij}}$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$.

Dwie półmacierze $A = \underline{|a_{ij}}$ i $B = \underline{|b_{ij}}$ są *identyczne*, co wyrażamy wzorem $A = B$, jeżeli $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdej pary i, j. Wprowadzimy teraz pojęcie linii S_i dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Element a_{uv} półmacierzy $A = \underline{|a_{ij}}$ należy do *linii* S_i, gdy jeden z jego wskaźników jest równy i. Symbol S_i oznacza jednocześnie nazwę linii oraz sumę elementów do niej należących:

$$S_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} + \sum_{s=i+1}^{n} a_{si}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Jest rzeczą oczywistą, że każdy element a_{ij} półmacierzy A należy dokładnie do dwóch linii, a mianowicie do S_i i S_j.

Wartością $|A|$ półmacierzy $A = \underline{|a_{ij}}$ nazywać będziemy podwojoną sumę wszystkich elementów A. Spełniona jest następująca relacja:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{3}$$

Uwaga 1. Zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = |A| + K, \qquad \text{gdzie} \qquad K = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2.2. Operacja.

DEFINICJA 1. Jeśli $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ jest układem r liczb naturalnych $i_t \leqslant n$, to *operacją α na półmacierzy* $A = \underline{|a_{ij}}$, $i, j = 1, \ldots, n$ nazywamy pomnożenie przez -1 wszystkich elementów każdej z linii S_{i_t}. Wynik tej operacji oznaczamy symbolem A_α, a liczbę r nazywamy *rzędem* operacji.

DEFINICJA 2. *Iloczynem dwóch operacji* $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ i $\beta = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ *na półmacierzy* A nazywać będziemy operację $\gamma = \alpha \cdot \beta = P(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_l)$, gdzie P jest dowolną permutacją liczb znajdujących się w nawiasie.

Podobnie definiuje się iloczyn większej ilości operacji. Oczywiście

$$(A_\alpha)_\beta = A_{\alpha\cdot\beta} = A_{\beta\cdot\alpha} = (A_\beta)_\alpha. \tag{4}$$

Zagadnienie Perkala jest równoważne z następującym zagadnieniem: Znaleźć taką operację a na półmacierzy $A = \lfloor a_{ij}$, żeby $|A_a| = \max$ ze względu na wszystkie możliwe operacje na A.

2.3. Własności operacji.

WŁASNOŚĆ 1. *Niech dana będzie półmacierz A oraz jednoelementowa operacja (i), $1 \leqslant i \leqslant n$. Wtedy*

$$A_{(i)\cdot(i)} = A_{(i)(i)} = A.$$

Ogólnie: $[A_a]_a = A_{a\cdot a} = A$, *gdzie a jest dowolną operacją na A.*

Zachodzą także oczywiste równości:

(5) $$A_{P(a)} = A_a, \qquad A_{(a\cdot\beta)\gamma} = A_{a(\beta\cdot\gamma)}.$$

Wobec (5) będziemy uważać operacje $P(a)$ i a za jednakowe.

DEFINICJA 3. Operację $\beta = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ na półmacierzy A nazywamy *operacją prostą*, jeśli $r \leqslant n$ i jeśli z nierówności $s \neq t$ wynika $i_s \neq i_t$.

Korzystając z własności 1 oraz z (4) i (5) można każdą operację a na A sprowadzić do takiej operacji prostej a' na A, że

$$A_a = A_{a'}.$$

Rząd operacji prostej na A jest nie większy od n.

DEFINICJA 4. *Operacją zupełną* na półmacierzy A nazywać będziemy taką operację prostą a, że $a = P(1, 2, \ldots, n)$, gdzie P jest permutacją wszystkich liczb w nawiasach.

DEFINICJA 5. Dana jest półmacierz A oraz dowolna operacja prosta a na A. *Dopełnieniem* a nazywać będziemy taką operację prostą $\bar{a}$ na A, że iloczyn $a\cdot\bar{a}$ jest operacją zupełną, tzn. $a\cdot\bar{a} = \gamma = P(1, 2, \ldots, n)$.

Uwaga 2. Dopełnieniem operacji zupełnej będzie operacja zerowa a_0, gdzie a_0 jest układem, do którego nie należy żadna liczba.

2.4. Niech a będzie dowolną operacją prostą rzędu $k \leqslant n$ na półmacierzy A rzędu n. Łatwo wykazać, że ilość m różnych co do znaku elementów półmacierzy A i A_a wynosi

(6) $$m = k(n-k).$$

WNIOSEK 1. *Jeżeli a jest operacją zerową lub zupełną, to $A_a = A$.*

3.1. Podstawowe twierdzenia. Udowodnimy teraz następujący

LEMAT 1. *Dana jest półmacierz A oraz dowolne operacje proste a, β i γ na A. Zachodzi równość $A_a = A_\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_{a\gamma} = A_{\beta\cdot\gamma}$.*

Konieczność warunku jest oczywista. Ażeby wykazać dostateczność, wystarczy na $A_{\alpha\cdot\gamma}$ i $A_{\beta\cdot\gamma}$ dokonać operacji γ:

$$[A_{\alpha\gamma}]_\gamma = [A_{\beta\cdot\gamma}]_\gamma,$$

$$[A_{\alpha\gamma}]_\gamma = A_{\alpha\gamma\gamma} = A_{\gamma\gamma\alpha} = [A_{\gamma\gamma}]_\alpha = A_\alpha,$$

$$[A_{\beta\gamma}]_\gamma = A_{\beta\gamma\gamma} = A_{\gamma\gamma\beta} = [A_{\gamma\gamma}]_\beta = A_\beta$$

(patrz własność 1 i (5)), a więc $A_\alpha = A_\beta$.

TWIERDZENIE 3.1.1. *Dana jest półmacierz A, dowolna operacja prosta a na A oraz jej dopełnienie $\bar{a}$. Zachodzi równość*

$$A_a = A_{\bar{a}}.$$

Dowód. W myśl definicji 5 i wniosku 1 mamy $A = A_{a\bar{a}}$, a w myśl własności 1 mamy $A = A_{\bar{a}\bar{a}}$, więc

$$A_{a\bar{a}} = A_{\bar{a}\bar{a}}, \qquad \text{czyli} \qquad (A_a)_{\bar{a}} = (A_{\bar{a}})_{\bar{a}}.$$

Z lematu 1 wynika natychmiast teza.

WNIOSEK 2. *Istnieje 2^n różnych operacji prostych na półmacierzy A.*

Twierdzenie 3.1.1. pozwala nam ograniczyć się do operacji prostych rzędu $1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}n$ dla n parzystych, lub $1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$ dla n nieparzystych.

TWIERDZENIE 3.1.2. *Jeśli dana jest półmacierz A i na niej dowolna operacja $a = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ rzędu r, to spełniona jest następująca równość:*

$$|A_a| = |A| + 8W, \tag{7}$$

gdzie

$$W = \sum_{\substack{s>t\\ s,t\in a}} a_{st} - \tfrac{1}{2}\sum_{u\in a} S_u,$$

a a_{st} i S_u są odpowiednio elementami i sumami linii półmacierzy A.

Dowód. Podzielmy elementy półmacierzy A_a i A na dwie grupy. Do pierwszej grupy zaliczymy elementy linii S_u, gdzie $u \in a$, do drugiej grupy zaś pozostałe elementy. Jest oczywiste, że odpowiednie elementy A_a i A zaliczone do drugiej grupy są identyczne.

Rozbijamy elementy pierwszej grupy na dwie części. Do części pierwszej należeć będą elementy o wskaźniku (s, t), gdzie $s \in a$, $t \in a$ i $s > t$. Operacja mnożenia przez -1 została na wszystkich elementach części pierwszej należących do A_a wykonana dwukrotnie. Elementy te będą więc równe odpowiednim elementom z półmacierzy A. Do drugiej części należeć będą elementy o wskaźniku (s, t), gdzie $s \in a$ i $t \in \bar{a}$ lub $s \in \bar{a}$ i $t \in a$, przy czym $s > t$. Niech X będzie sumą elementów A należących do drugiej części:

(8) $$X = \sum_{\substack{s \in a \\ t \in \bar{a} \\ s > t}} a_{st} + \sum_{\substack{s \in \bar{a} \\ t \in a \\ s > t}} a_{st}.$$

Ponieważ operacja mnożenia przez -1 została wykonana na tych elementach jeden raz, suma elementów półmacierzy A_a należących do drugiej części równa się $-X$. Różnica $|A_a| - |A|$ wynosi więc $-4X$.

Każdy element a_{ij} półmacierzy A należy dokładnie do dwóch linii, a mianowicie do S_i i S_j. Ażeby znaleźć sumę elementów drugiej części, wystarczy od sumy linii S_u $(u \in a)$ odjąć podwojoną sumę elementów części pierwszej. A więc

$$X = \sum_{u \in a} S_u - 2 \sum_{\substack{s, t \in a \\ s > t}} a_{st},$$

skąd wynika teza.

WNIOSEK 3. *Dana jest półmacierz A. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $|A| \geqslant |A_a|$ dla każdej operacji prostej a na A rzędu $\leqslant \frac{1}{2}n$, jest, żeby odpowiadające tej operacji W było niedodatnie.*

3.2. Postępowanie. Na mocy twierdzenia 3.1.2. na to, by rozwiązać zagadnienie, wystarczy spośród wszystkich prostych operacji na półmacierzy A rzędu $\leqslant \frac{1}{2}n$ znaleźć taką operację a, dla której W jest największe. W przypadku, gdy największe W jest niedodatnie, rozwiązaniem jest operacja zerowa. Ponieważ trudno jest rozważać wszystkie operacje rzędu $\leqslant \frac{1}{2}n$, wygodniej będzie najpierw dokonać na półmacierzy A kolejnych operacji rzędu 1 o dodatnim W. Można łatwo wykazać, że w ten sposób powstanie półmacierz A_β (gdzie β jest iloczynem dokonanych operacji), dla której sumy wszystkich linii są nieujemne (oznacza to, że wszystkie W odpowiadające operacji rzędu 1 na A_β są niedodatnie). (Spośród operacji tego samego rzędu o dodatnim W pierwszeństwo ma operacja o największym W).

Na otrzymanej półmacierzy A_β dokonujemy operacji rzędu 2 o największym dodatnim W. W przypadku gdy największe W jest ujemne, przechodzimy do operacji o rząd wyżej. Po dokonaniu operacji rzędu $k \geqslant 2$ o dodatnim W otrzymujemy półmacierz A_γ, gdzie $|A_\gamma| > |A_\beta| > |A|$. Następnie powtarzamy postępowanie od początku traktując $|A_\gamma|$ tak samo, jak na początku półmacierz wyjściową A.

Postępowanie zostaje zakończone, gdy otrzymamy taką półmacierz A_γ, że dla każdej operacji a rzędu $\leqslant \frac{1}{2}n$ (względnie $\frac{1}{2}(n-1)$) na A_γ odpowiednie W tej macierzy są $\leqslant 0$. Operacja γ na A jest wtedy rozwiązaniem.

PRZYKŁAD 1.

$$A = \begin{array}{|rrrrrr}
 & & & & & \\
-2 & & & & & \\
1 & 4 & & & & \\
-3 & 2 & 1 & & & \\
5 & -5 & 2 & -1 & & \\
4 & 2 & -3 & -2 & -5 & \\
-1 & 3 & 4 & -3 & 6 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$4 \quad 4 \quad 9 \quad -6 \quad 2 \quad -3 \quad 10$$

Pod A wypisujemy sumy odpowiednich linii: $S_1 = 4$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = -6$, $S_5 = 2$, $S_6 = -3$, $S_7 = 10$.

Operacją rzędu pierwszego o największym W jest (4), dla której $W = 0 - \frac{1}{2}\cdot(-6) = 3$. Mnożąc wszystkie elementy linii S_4 przez -1 otrzymujemy półmacierz $A_{(4)}$:

$$A_{(4)} = \begin{array}{|rrrrrrr}
\cdot & & & & & & \\
-2 & \cdot & & & & & \\
1 & 4 & \cdot & & & & \\
3 & -2 & -1 & \cdot & & & \\
5 & -5 & 2 & 1 & \cdot & & \\
4 & 2 & -3 & 2 & -5 & \cdot & \\
-1 & 3 & 4 & 3 & 6 & 1 & \cdot \\
\hline
\end{array}$$

$$10 \quad 0 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 16$$

Wszystkie operacje rzędu 1 mają odpowiednie W niedodatnie. Dwie operacje rzędu 2 mają dodatnie W. Dla (2,3) odpowiednie W wynosi $4 - \frac{1}{2}(0+7) = \frac{1}{2}$, dla (2,6) zaś $2 - \frac{1}{2}(0+1) = 1\frac{1}{2}$. Wykonujemy więc na $A_{(4)}$ operację (2,6). Powstanie w ten sposób półmacierz

$$A_{(4,2,6)} = \begin{array}{|rrrrrrr}
\cdot & & & & & & \\
2 & \cdot & & & & & \\
1 & -4 & \cdot & & & & \\
3 & 2 & -1 & \cdot & & & \\
5 & 5 & 2 & 1 & \cdot & & \\
-4 & 2 & 3 & -2 & 5 & \cdot & \\
-1 & -3 & 4 & 3 & 6 & -1 & \cdot \\
\hline
\end{array}$$

$$6 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 24 \quad 3 \quad 8$$

Łatwo sprawdzić, że każda z operacji rzędu 1, 2, 3 na półmacierzy $A_{(4,2,6)} = A_{(2,4,6)}$ ma odpowiednie W niedodatnie. Operacja (2,4,6) na A jest więc rozwiązaniem.

PRZYKŁAD 2. Dana jest półmacierz $A = \lfloor a_{ij}$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$, gdzie $a_{ij} = -1$ dla każdego i i j spełniającego powyższe warunki. Rozwiązaniem będzie oczywiście każda operacja prosta rzędu $\frac{1}{2}n$ (względnie $\frac{1}{2}(n-1)$ dla n nieparzystego).

PRZYKŁAD 3. Antropologowie charakteryzują głowy ludzi żywych 8 następującymi cechami: 1. długość głowy, 2. szerokość głowy, 3. szerokość twarzy, 4. długość twarzy, 5. długość nosa, 6. szerokość nosa, 7. barwa oczu, 8. barwa włosów. Oto półmacierz korelacji A między tymi cechami dla próby 8 cech głowy 5416 mężczyzn (¹):

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c}
\cdot & & & & & & & \\
\hline
0{,}283 & \cdot & & & & & & \\
\hline
0{,}265 & 0{,}410 & \cdot & & & & & \\
\hline
0{,}192 & 0{,}143 & 0{,}196 & \cdot & & & & \\
\hline
0{,}118 & 0{,}102 & 0{,}119 & 0{,}413 & \cdot & & & \\
\hline
0{,}196 & 0{,}109 & 0{,}180 & 0{,}057 & 0{,}095 & \cdot & & \\
\hline
0{,}023 & 0{,}013 & 0{,}019 & 0{,}017 & 0{,}000 & 0{,}001 & \cdot & \\
\hline
-0{,}020 & 0{,}020 & -0{,}008 & -0{,}002 & -0{,}037 & -0{,}027 & 0{,}352 & \cdot \\
\hline
\end{array}$$

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej operacji α mamy $|A| > |A_\alpha|$. Znaczy to, że operacja zerowa jest rozwiązaniem. Okazuje się więc, że zespół 8 cech antropologicznych jest zgodny.

KATEDRA MATEMATYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Praca wpłynęła 28. 9. 1959

W. SZWARC (Wrocław)

O PEWNYM MACIERZOWYM ZAGADNIENIU PERKALA

STRESZCZENIE

J. Perkal postawił w 1958 r. następujące zagadnienie:

Dana jest macierz $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $a_{ij} = a_{ji}$, oraz układ n liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_k = 1$ lub -1 dla $k = 1, 2, \ldots, n$). Mnożąc wszystkie elementy k-tego wiersza i jednocześnie k-tej kolumny macierzy $\{a_{ij}\}$ przez ε_k otrzymamy macierz $\{b_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $b_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij}$. Powstaje zagadnienie: przy jakich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ zachodzi

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \max ?$$

(¹) Materiał zaczerpnięty z pracy: M. Krauze i W. Łozińska, *Korelacje obszarowe ośmiu cech antropologicznych*, Przegląd Antropologiczny, 23. 2 (1957), str. 446-454. Liczby są zaokrąglone do trzeciego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie tego zagadnienia pozwala odpowiedzieć na ważne w przyrodoznawstwie pytanie, czy jakiś zespół cech badanych przedmiotów przyrodniczych jest zgodny. Zespół cech nazywamy *zgodnym*, jeśli suma wskaźników korelacji między wszystkimi parami cech nie może być powiększona przez zmianę znaku przy którejś z cech.

W pracy podaje się postępowanie, które pozwala otrzymać macierz $\{b_{ij}\}$ spełniającą (1). Opiera się ono głównie na dwóch następujących twierdzeniach.

Dana jest symetryczna macierz $\{a_{ij}\}$ rzędu $n\times n$. Niech $a=(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ będzie układem $r\leqslant n$ różnych liczb całkowitych z przedziału domkniętego $[1, n]$. Pomnóżmy wszystkie elementy u-tego wiersza i u-tej kolumny macierzy $\{a_{ij}\}$ przez -1 dla każdego $u\epsilon a$. Otrzymamy wtedy macierz $\{a_{ij}\}_a=\{a'_{ij}\}$. Zachodzą dwa twierdzenia:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a'_{ij}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=8W$, gdzie

$$W=\sum_{\substack{s,t\epsilon a\\ s>t}}a_{st}-\tfrac{1}{2}\sum_{u\epsilon a}S_u,\quad \text{a}\quad S_u=\sum_{j=1}^{u-1}a_{uj}+\sum_{s=u+1}^{n}a_{su}.$$

2. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}\geqslant 0,$$

jest, by dla każdego a o liczności $\leqslant \frac{1}{2}n$ ($\frac{1}{2}(n-1)$ dla n nieparzystych) odpowiednie W było $\leqslant 0$.

В. ШВАРЦ (Вроцлав)

О НЕКОТОРОЙ МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ ПЭРКАЛЯ

РЕЗЮМЕ

Профессор Ю. Пэркаль поставил в 1958 г. следующую проблему:

Дана матрица $\{a_{ij}\}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, где $a_{ij}=a_{ji}$, и система чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_k=1$ или -1 для $k=1, 2, \ldots, n$). Умножив все элементы k-той строки и одновременно k-го столбца матрицы $\{a_{ij}\}$ на ε_k, получим матрицу $\{b_{ij}\}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$ где $b_{ij}=\varepsilon_i\varepsilon_j a_{ij}$.

Возникает вопрос: при каких $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ верно соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=\max. \tag{1}$$

В настоящей работе приводится необходимое и достаточное условие того, чтобы выполнялось соотношение (1), дается практический метод построения матрицы $\{b_{ij}\}$ и рассматривается несколько примеров.

W. SZWARC (Wrocław)

ON A MATRIX PROBLEM OF PERKAL

SUMMARY

Professor J. Perkal posed in 1958 the following problem: we are given a matrix $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, where $a_{ij} = a_{ji}$ and a system of numbers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_k = +1$ or -1 for $k = 1, 2, \ldots, n$). Multiplying all the elements of the k-th line and at the same time of the k-th column of the matrix $\{a_{ij}\}$ by ε_k we obtain a matrix $\{b_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, where $b_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij}$. The problem arises for which $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ we have

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \max. \tag{1}$$

The present paper contains the necessary and sufficient condition for a matrix $\{b_{ij}\}$ to satisfy (1) and a method permitting the determination of such a matrix.