S. PASZKOWSKI (Wrocław)

ZAGADNIENIA NUMERYCZNE APROKSYMACJI JEDNOSTAJNEJ (II)

(O szacowaniu błędu aproksymacji optymalnej)

1. Wstęp. Podstawowe pojęcia aproksymacji i oznaczenia używane w niniejszym artykule podane są w pracy [2]. Jeśli (jak w [2]) ψ_n jest wielomianem optymalnym dla funkcji ξ w klasie W_n i w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ to oznaczamy

$$\varepsilon_n(\xi) = \|\xi - \psi_n\| = \min_{\psi \in W_n} \|\xi - \psi\|.$$

Liczba $\varepsilon_n(\xi)$ jest więc błędem optymalnej (czyli najdokładniejszej) aproksymacji funkcji ξ wielomianami stopnia najwyżej n-tego. W wielu zadaniach trzeba znać tę liczbę lub przynajmniej jej możliwie dobre oszacowanie. Jest tak np. wtedy, gdy przy aproksymacji danej funkcji ξ ustala się z góry liczbę, której nie może przewyższać błąd aproksymacji. Wtedy, mając oszacowania liczb $\varepsilon_n(\xi)$ przy różnych n od góry, można rozstrzygnąć, jaki duży stopień wielomianów aproksymujących wystarczy, a mając oszacowania tych liczb od dołu — jaki mały stopień nie wystarczy.

Znane są następujące dwa twierdzenia:

A (de la Vallée Poussin, [1], str. 20). *Jeśli dla funkcji ciągłej ξ i wielomianu $\psi \in W_n$ istnieją takie punkty $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ $(-1 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leqslant 1)$, że liczby ciągu*

$$\xi(t_0) - \psi(t_0),\ \xi(t_1) - \psi(t_1),\ \ldots,\ \xi(t_{n+1}) - \psi(t_{n+1}) \tag{1}$$

są na przemian dodatnie i ujemne, to zachodzi nierówność

$$\varepsilon_n(\xi) \geqslant \min_{0 \leqslant k \leqslant n+1} |\xi(t_k) - \psi(t_k)|.$$

B (S. Bernstein [1], str. 47). *Jeśli $(n+1)$-sza pochodna funkcji ξ istnieje i ma stały, różny od zera znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$*, to

$$\varepsilon_n(\xi) \geqslant \frac{1}{2^n (n+1)!} \min_{|t| \leqslant 1} |\xi^{(n+1)}(t)|.$$

Wszystkie oszacowania liczb $\varepsilon_n(\xi)$ od dołu, podane w § 2 i wyprowadzone w § 3 tej pracy, są łatwymi wnioskami z twierdzenia A; wnioski te warto było chyba jednak podać ze względu na ich prostotę.

2. Oszacowania liczb $\varepsilon_n(\xi)$ od dołu. TWIERDZENIE 1. *Jeśli funkcja ξ jest ciągła, to zachodzi nierówność*

$$\varepsilon_n(\xi) \geqslant \tag{2}$$

$$\geqslant \frac{1}{n+1}\left|\frac{1}{2}\xi(c_{n+1,0})-\xi(c_{n+1,1})+\ldots+(-1)^n\xi(c_{n+1,n})+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\xi(c_{n+1,n+1})\right|,$$

gdzie

$$c_{n+1,k} = \cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{3}$$

12-cyfrowe wartości liczb $c_{n+1,k}$ dla $n = 2, 3, \ldots, 8$ podano w tablicy 1 umieszczonej na końcu pracy.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli $\xi = \sum_{l=0}^{\infty} x_l t^l$ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, to zachodzi nierówność*

$$\varepsilon_n(\xi) \geqslant \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x_{n+2m+1}\right|, \tag{4}$$

gdzie

$$a_{nm} = \frac{1}{2^{n+2m}}\sum_{0\leqslant s\leqslant m/(n+1)}\binom{n+2m+1}{m-s(n+1)} \qquad (m = 0, 1, \ldots). \tag{5}$$

Wartości liczb a_{nm} (w postaci ułamków zwykłych i dziesiętnych) dla $n = 2, 3, \ldots, 8$ i $m = 0, 1, \ldots, 5$ podano w tablicy 2.

TWIERDZENIE 3. *Niech w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ zachodzi równość*

$$\xi = \sum_{l=0}^{r-1} x_l t^l + \xi_r t^r,$$

gdzie ξ_r jest funkcją ciągłą zmiennej t. Niech

$$\begin{aligned} \bar{x}_r^{\min} &\leqslant (-1)^{n+r}\xi_r(t) \leqslant \bar{x}_r^{\max} && \text{dla} \quad t\in\langle -1, 0\rangle, \\ \overset{+}{x}{}_r^{\min} &\leqslant \xi_r(t) \leqslant \overset{+}{x}{}_r^{\max} && \text{dla} \quad t\in\langle 0, 1\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

$$g_{nr} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_l{}^{+} c_{n+1,n-2l+1}^{r} - \frac{1}{2}\right), \qquad h_{nr} = \frac{1}{n+1}\sum_l{}^{+} c_{n+1,n-2l}^{r}, \tag{7}$$

gdzie symbol $\sum_l^{+}$ oznacza, że sumuje się potęgi tylko dodatnich liczb spośród $c_{n+1,0}, c_{n+1,1}, \ldots, c_{n+1,n+1}$,

$$\begin{aligned} a_{nr}^{\min} &= (\overset{+}{x}{}_r^{\min} - \bar{x}_r^{\max})g_{nr} - (\overset{+}{x}{}_r^{\max} - \bar{x}_r^{\min})h_{nr}, \\ a_{nr}^{\max} &= (\overset{+}{x}{}_r^{\max} - \bar{x}_r^{\min})g_{nr} - (\overset{+}{x}{}_r^{\min} - \bar{x}_r^{\max})h_{nr}. \end{aligned} \tag{8}$$

Jeśli liczby

$$(9)\qquad \begin{aligned} e_{nr}^{\min} &= \sum_{0\leqslant m\leqslant (r-n)/2-1} a_{nm}x_{n+2m+1} + a_{nr}^{\min}, \\ e_{nr}^{\max} &= \sum_{0\leqslant m\leqslant (r-n)/2-1} a_{nm}x_{n+2m+1} + a_{nr}^{\max} \end{aligned}$$

mają ten sam znak, to

$$(10)\qquad \varepsilon_n(\xi) \geqslant \min\{|e_{nr}^{\min}|, |e_{nr}^{\max}|\}.$$

Liczby g_{nr} i h_{nr} dla $n = 2, 3, \ldots, 8$ i niektórych r podano (z ośmioma cyframi znaczącymi) w tablicy 3.

3. Dowody twierdzeń 1-3. Podane wyżej twierdzenia wynikają z twierdzenia A. Twierdzenie 2 można uznać za szczególny przypadek twierdzenia 3, ale ze względów praktycznych jego wyodrębnienie było celowe.

Dowód twierdzenia 1. Na wstępie, w związku z twierdzeniem A, przypomnijmy jeszcze jeden znany fakt: Dla dowolnych punktów $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ (gdzie $-1 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leqslant 1$) istnieje taki wielomian $\psi \epsilon W_n$, że liczby (1) są na przemian dodatnie i ujemne oraz mają tę samą wartość bezwzględną. Wielomian ψ, tj. jego $n+1$ współczynników przy $t^0, t^1, \ldots, t^n$ wyznacza się z układu $n+2$ równań liniowych

$$(11)\qquad \xi(t_k) - \psi(t_k) = (-1)^k e_n \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1),$$

w którym e_n jest $(n+2)$-gą niewiadomą. Z twierdzenia A wynika, że $\varepsilon_n(\xi) \geqslant |e_n|$ przy dowolnym wyborze punktów t_k.

Przyjmijmy $t_k = c_{n+1,k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n+1$. Wybór ten uzasadniają następujące względy:

1° jeśli $(n+1)$-sza pochodna funkcji ξ ma stały znak w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, a $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$ są (e)-punktami wielomianu ψ_n (ich określenie jest podane w pracy [2], § 1), to zachodzą związki $u_0 = c_{n+1,0} = -1$, $u_{n+1} = c_{n+1,n+1} = 1$ oraz

$$(12)\qquad u_k \epsilon (c_{n,k-1}, c_{nk}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

([1], str. 85), a jednocześnie, jak łatwo sprawdzić, $c_{n+1,k} \epsilon (c_{n,k-1}, c_{nk})$;

2° istnieje liczba dodatnia d_n taka, że dla wszystkich funkcji ciągłych ξ, dla których $\varepsilon_{n+1}(\xi)/\varepsilon_n(\xi) \leqslant d_n$, zachodzą związki (12) (rezultat autora tej pracy, jeszcze nie opublikowany).

Oznacza to, że punkty $c_{n+1,k}$ są dla pewnych ważnych klas funkcji ξ bliskie (e)-punktom u_k wielomianów optymalnych. Pozwala to przypuszczać, że liczba e_n wyznaczona z układu (11) dla $t_k = c_{n+1,k}$ będzie bliska liczby $\varepsilon_n(\xi)$, która spełnia tenże układ dla $t_k = u_k$ (gdy $\psi = \psi_n$).

Układ (11) dla $t_k = c_{n+1,k}$ można napisać w postaci

$$(13)\qquad (-1)^k e_n + \psi(c_k) = \xi(c_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$$

(dla prostoty tu i w dalszym ciągu opuszczamy pierwszy wskaźnik w symbolu $c_{n+1,k}$).

W k-tym równaniu (13) współczynnikami przy kolejnych niewiadomych są liczby $(-1)^k, 1, c_k, \ldots, c_k^n$, a wyrazem wolnym jest $\xi(c_k)$. Dlatego

$$e_n = \begin{vmatrix} \xi(c_0) & 1 & c_0 & \ldots & c_0^{n-1} & c_0^n \\ \xi(c_1) & 1 & c_1 & \ldots & c_1^{n-1} & c_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi(c_n) & 1 & c_n & \ldots & c_n^{n-1} & c_n^n \\ \xi(c_{n+1}) & 1 & c_{n+1} & \ldots & c_{n+1}^{n-1} & c_{n+1}^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & c_0 & \ldots & c_0^{n-1} & c_0^n \\ -1 & 1 & c_1 & \ldots & c_1^{n-1} & c_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^n & 1 & c_n & \ldots & c_n^{n-1} & c_n^n \\ (-1)^{n+1} & 1 & c_{n+1} & \ldots & c_{n+1}^{n-1} & c_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Oznaczając przez v_k wyznacznik Vandermonde'a liczb $c_0, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_{n+1}$ otrzymamy równość

$$(14)\qquad e_n = \frac{v_0\xi(c_0) - v_1\xi(c_1) + \ldots + (-1)^n\xi(c_n) + (-1)^{n+1}\xi(c_{n+1})}{v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1}}.$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli v jest wyznacznikiem Vandermonde'a liczb $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$, to

$$v = (c_k - c_0)(c_k - c_1)\ldots(c_k - c_{k-1})(c_{k+1} - c_k)\ldots(c_{n+1} - c_k)v_k,$$

czyli na mocy nierówności $c_0 < c_1 < \ldots < c_{n+1}$

$$v = |(c_k - c_0)(c_k - c_1)\ldots(c_k - c_{k-1})(c_k - c_{k+1})\ldots(c_k - c_{n+1})|v_k.$$

Dlatego, dzieląc licznik i mianownik wyrażenia (14) przez v, otrzymamy

$$(15)\qquad e_n = u/w,$$

gdzie

$$u = \left\{\frac{\xi(c_0)}{|(c_0 - c_1)(c_0 - c_2)\ldots(c_0 - c_{n+1})|} - \frac{\xi(c_1)}{|(c_1 - c_0)(c_1 - c_2)\ldots(c_1 - c_{n+1})|} + \right.$$
$$+ \ldots + (-1)^n \frac{\xi(c_n)}{|(c_n - c_0)\ldots(c_n - c_{n-1})(c_n - c_{n+1})|} +$$
$$\left. + (-1)^{n+1} \frac{\xi(c_{n+1})}{|(c_{n+1} - c_0)\ldots(c_{n+1} - c_{n-1})(c_{n+1} - c_n)|}\right\},$$

$$w = \left\{\frac{1}{|(c_0 - c_1)(c_0 - c_2)\ldots(c_0 - c_{n+1})|} + \frac{1}{|(c_1 - c_0)(c_1 - c_2)\ldots(c_1 - c_{n+1})|} + \right.$$
$$+ \ldots + \frac{1}{|(c_n - c_0)\ldots(c_n - c_{n-1})(c_n - c_{n+1})|} +$$
$$\left. + \frac{1}{|(c_{n+1} - c_0)\ldots(c_{n+1} - c_{n-1})(c_{n+1} - c_n)|}\right\}.$$

Aby obliczyć iloczyny występujące w tym wzorze, weźmy pod uwagę $(n+1)$-szy wielomian Czebyszewa $T_{n+1}(t) = \cos(n+1)\arccos t$. Wiadomo, że jest to wielomian $(n+1)$-szego stopnia ze współczynnikiem 2^n przy t^{n+1}, a więc wielomian

$$(16)\qquad \frac{1}{2^n(n+1)}T'_{n+1}(t) = \frac{1}{2^n\sqrt{1-t^2}}\sin(n+1)\arccos t$$

ma stopień n i współczynnik 1 przy t^n. Pierwiastkami wielomianu (16) są liczby $c_k = \cos(n+1-k)\pi/n+1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, ponieważ dla tych k jest $\sqrt{1-c_k^2} \neq 0$, $\sin(n+1)\arccos c_k = \sin(n+1-k)\pi = 0$. Uwzględniając jeszcze, że $c_0 = -1$, $c_{n+1} = 1$, otrzymujemy równość

$$(17)\qquad \Big|\prod_{k=0}^{n+1}(t-c_k)\Big| = |1-t^2|\cdot\Big|\prod_{k=1}^{n}(t-c_k)\Big| = \frac{1}{2^n\sqrt{1-t^2}}|\sin(n+1)\arccos t| =$$
$$= 2^{-n}\sqrt{(1-t^2)\big(1-\cos^2(n+1)\arccos t\big)} = 2^{-n}\sqrt{(1-t^2)\big(1-T_{n+1}^2(t)\big)}.$$

Obliczymy teraz iloczyn $|(c_0-c_1)(c_0-c_2)\ldots(c_0-c_{n+1})|$ (w którym $c_0 = -1$). Na mocy (17) jest on równy

$$\lim_{t\to c_0}\frac{\Big|\prod\limits_{k=0}^{n+1}(t-c_k)\Big|}{|t-c_0|} = 2^{-n}\lim_{t\to -1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}\big(1-T_{n+1}^2(t)\big)} = 2^{-n}\sqrt{2\lim_{t\to -1}\frac{1-T_{n+1}^2(t)}{1+t}},$$

więc z reguły de l'Hôpitala i łatwych do sprawdzenia wzorów $T_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$, $T'_{n+1}(-1) = (-1)^n(n+1)^2$ wynika, że

$$(18)\qquad |(c_0-c_1)(c_0-c_2)\ldots(c_0-c_{n+1})| =$$
$$= 2^{-n}\sqrt{2\lim_{t\to -1}\big(-2T_{n+1}(t)T'_{n+1}(t)\big)} = (n+1)/2^{n-1}.$$

Analogicznie można sprawdzić, że

$$(19)\qquad |(c_{n+1}-c_0)\ldots(c_{n+1}-c_{n-1})(c_{n+1}-c_n)| = (n+1)/2^{n-1}.$$

Uwzględniając równość $T_{n+1}(c_j) = (-1)^{n+1-j}$, obliczamy następnie, że dla $0 < j < n+1$

$$|(c_j-c_0)\ldots(c_j-c_{j-1})(c_j-c_{j+1})\ldots(c_j-c_{n+1})| = \lim_{t\to c_j}\Big(\Big|\prod_{k=0}^{n+1}(t-c_k)\Big|\Big/|t-c_j|\Big) =$$
$$= 2^{-n}\sqrt{(1-c_j^2)\lim_{t\to c_j}\frac{1-T_{n+1}^2(t)}{(t-c_j)^2}} = 2^{-n}\sqrt{(1-c_j^2)(-1)^{n-j}\lim_{t\to c_j}\frac{T'_{n+1}(t)}{t-c_j}} =$$
$$= 2^{-n}\sqrt{(1-c_j^2)|T''_{n+1}(c_j)|}.$$

Z wzoru (16) wynika, że

$$(1-t^2)T_{n+1}'^2(t) = (n+1)^2\big(1-T_{n+1}^2(t)\big);$$

różniczkując tę tożsamość i dzieląc ją stronami przez $2T'_{n+1}(t)$ otrzymujemy wzór

$$(1-t^2)T''_{n+1}(t)-tT'_{n+1}(t) = -(n+1)^2T_{n+1}(t),$$

słuszny — ponieważ T_{n+1} jest wielomianem — także dla tych t, dla których $T'_{n+1}(t) = 0$. Stąd $|T''_{n+1}(c_j)| = (n+1)^2/(1-c_j^2)$,

$$(20)\qquad |(c_j-c_0)\dots(c_j-c_{j-1})(c_j-c_{j+1})\dots(c_j-c_{n+1})| = (n+1)/2^n \qquad (0<j<n+1).$$

Podstawiając równości (18)-(20) do (15) otrzymujemy

$$(21)\qquad e_n =$$

$$= \frac{\frac{2^{n-1}}{n+1}\xi(c_0)-\frac{2^n}{n+1}\xi(c_1)+\dots+(-1)^n\frac{2^n}{n+1}\xi(c_n)+(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n+1}\xi(c_{n+1})}{\frac{2^{n-1}}{n+1}+n\cdot\frac{2^n}{n+1}+\frac{2^{n-1}}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\xi(c_0)-\xi(c_1)+\dots+(-1)^n\xi(c_n)+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\xi(c_{n+1})\right).$$

Stąd i z oszacowania $\varepsilon_n(\xi)\geqslant|e_n|$ wynika twierdzenie 1.

Dowód twierdzenia 2. Jeśli funkcja ξ jest sumą szeregu $\sum_{l=0}^{\infty}x_lt^l$, to liczba e_n określona wzorem (21) wyraża się liniowo przez współczynniki tego szeregu, a mianowicie

$$e_n = \frac{1}{n+1}(b_{n0}x_0+b_{n1}x_1+\dots+b_{nn}x_n+b_{n,n+1}x_{n+1}+\dots),$$

gdzie

$$b_{np} = \frac{1}{2}c_0^p-c_1^p+\dots+(-1)^nc_n^p+\frac{(-1)^{n+1}}{2}c_{n+1}^p \quad \text{dla} \quad p = 0,1,\dots$$

Dla funkcji $\xi = t^k$ mamy $x_k = 1$, $x_0 = \dots = x_{k-1} = x_{k+1} = \dots = 0$, więc dla niej $e_n = b_{nk}/(n+1)$. Ponieważ t^k dla $k = 0,1,\dots,n$ jest wielomianem klasy W_n, to $\varepsilon_n(t^k) = 0$ i na mocy nierówności $\varepsilon_n(\xi)\geqslant|e_n|$ musi być $e_n = 0$. Dlatego $b_{n0} = b_{n1} = \dots = b_{nn} = 0$.

Równe zeru są także liczby b_{np} dla $p > n$ i parzystej różnicy $p-n$. Istotnie,

$$(22)\qquad b_{np} = \tfrac{1}{2}\left(c_0^p-(-1)^n c_{n+1}^p\right)-\left(c_1^p-(-1)^n c_n^p\right)+\left(c_2^p-(-1)^n c_{n-1}^p\right)-\ldots$$

Wszystkie składniki tej sumy są przy parzystym $p-n$ równe zeru, ponieważ na mocy określenia $c_k = \cos(n+1-k)\pi/(n+1)$ mamy $c_{n+1-k} = -c_k$, $(-1)^n c_{n+1-k}^p = (-1)^{n-p} c_k^p = c_k^p$ (przy n nieparzystym ostatni składnik sumy (22) jest równy $(-1)^{(n+1)/2} c_{(n+1)/2}^p$, tj. zeru, bo $c_{(n+1)/2} = \cos\pi/2$).

Należy więc jeszcze znaleźć liczby b_{np} dla $p > n$ i dla nieparzystej różnicy $p-n$. W tym celu zauważmy najpierw, że z podanych w pracy [3] (str. 39-40) wzorów

$$\cos^{2r} t = \frac{1}{2^{2r}}\left\{\sum_{l=0}^{r-1}\binom{2r}{l}\cos 2(r-l)t+\binom{2r}{r}\right\} = \frac{1}{2^{2r}}\sum_{l=0}^{2r}\binom{2r}{l}\cos 2(r-l)t,$$

$$\cos^{2r-1} t =$$

$$= \frac{1}{2^{2r-2}}\sum_{l=0}^{r-1}\binom{2r-1}{l}\cos(2r-2l-1)t = \frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{l=0}^{r-1}\binom{2r-1}{l}\cos(2r-2l-1)t$$

wynika wzór

$$\cos^p t = \frac{1}{2^p}\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}\cos(p-2l)t.$$

Zauważmy następnie, że ponieważ $c_0 = -1$, $c_{n+1} = 1$ i $p-n$ jest nieparzyste, to $-\frac{1}{2}c_0^p+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}c_{n+1}^p = 0$ i

$$b_{np} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k^p = (-1)^p\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos^p\frac{k\pi}{n+1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^p\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos\frac{(p-2l)\pi}{n+1}k =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^p\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos\left(k\pi+\frac{(p-n-1-2l)}{n+1}k\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^p\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{(p-n-1-2l)\pi}{n+1}k.$$

Wiadomo ([3], wzór 1.341.3), że jeśli $\sin\big((p-n-1-2l)\pi/2(n+1)\big) \neq 0$, to

$$(23)\qquad \sum_{k=0}^{n} \cos\frac{(p-n-1-2l)\pi}{n+1}k =$$

$$= \sin\frac{n(p-n-1-2l)\pi}{2(n+1)}\sin\frac{(p-n-1-2l)\pi}{2}\left(\sin\frac{(p-n-1-2l)\pi}{2(n+1)}\right)^{-1} = 0;$$

ostatnia równość wynika stąd, że $\frac{1}{2}(p-n-1-2l)$ jest liczbą całkowitą. Równość (23) zachodzi więc dla $(p-n-1-2l)/2(n+1) \neq s$ (s — liczba całkowita). Natomiast dla $(p-n-1-2l)/2(n+1) = s$, tj. dla $l = \frac{1}{2}\big(p-(2s+1)(n+1)\big)$, mamy

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\frac{(p-n-1-2l)\pi}{n+1}k = \sum_{k=0}^{n} \cos 2sk\pi = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Dlatego przy nieparzystym $p-n$ zachodzi równość

$$b_{np} = (n+1)(-\tfrac{1}{2})^{p}\sum_{s}\binom{p}{\frac{1}{2}\big(p-(2s+1)(n+1)\big)},$$

w której suma jest rozciągnięta na te całkowite wartości s, dla których $0 \leqslant l = \frac{1}{2}\big(p-(2s+1)(n+1)\big) \leqslant n$, tj. $-p/(n+1) \leqslant 2s+1 \leqslant p/(n+1)$. Podstawienie w powyższym wzorze $-(s+1)$ w miejsce s nie zmienia współczynników dwumiennych, a zatem łącząc równe sobie składniki parami otrzymujemy

$$b_{np} = \frac{(n+1)(-1)^{p}}{2^{p-1}}\sum_{1\leqslant 2s+1\leqslant p/(n+1)}\binom{p}{\frac{1}{2}\big(p-(2s+1)(n+1)\big)}.$$

Zatem dla $p = n+2m+1$, gdzie $m = 0, 1, \ldots$, mamy

$$b_{n,n+2m+1} = \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2m}}\sum_{0\leqslant s\leqslant m/(n+1)}\binom{n+2m+1}{m-s(n+1)},$$

$$e_n = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{\infty} b_{n,n+2m+1}x_{n+2m+1} =$$

$$= (-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2m}}\sum_{0\leqslant s\leqslant m/(n+1)}\binom{n+2m+1}{m-s(n+1)}x_{n+2m+1}.$$

Porównując ostatni wzór z określeniem (5) liczb a_{nm} i uwzględniając nierówność $\varepsilon_n(\xi) \geqslant |e_n|$, otrzymujemy oszacowanie (4).

Dowód twierdzenia 3. Zakładamy, że

$$\xi = x_0 + x_1 t + \ldots + x_{r-1}t^{r-1} + \xi_r t^r,$$

gdzie ξ_r jest ciągłą funkcją zmiennej t. W tym przypadku wzór (21) można napisać w postaci

$$
\begin{aligned}
e_n = & \frac{1}{n+1}(b_{n0}x_0+b_{n1}x_1+\ldots+b_{n,r+1}x_{r-1})+ \\
& +\frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{2}\xi_r(c_0)c_0^r-\xi_r(c_1)c_1^r+\ldots \\
& \qquad +(-1)^n\xi_r(c_n)c_n^r+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\xi_r(c_{n+1})c_{n+1}^r\Big) = \\
= & (-1)^{n+1}\sum_{0\leqslant m\leqslant (r-n)/2-1} a_{nm}x_{n+2m+1}+ \\
& +\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\Big(\frac{1}{2}\xi_r(c_{n+1})c_{n+1}^r-\xi_r(c_n)c_n^r+\ldots \\
& \qquad +(-1)^n\xi_r(c_1)c_1^r+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\xi_r(c_0)c_0^r\Big),
\end{aligned}
$$

gdzie liczby $b_{n0}, b_{n1}, \ldots, b_{n,r-1}, a_{nm}$ mają to samo znaczenie, co w dowodzie twierdzenia 2. Część powyższej sumy zależną od funkcji ξ_r szacujemy za pomocą nierówności (6). Niech liczba k będzie taka, że $c_k < 0$. Wtedy mamy $c_{n+1-k} = -c_k > 0$ i $(-1)^{n+1-k}\xi_r(c_k)c_k^r = (-1)^{n+1}(-1)^{n+r}\xi_r(c_k)c_{n+1-k}^r$, więc dla parzystych k

$$-\bar{x}_r^{\max}c_{n+1-k}^r \leqslant (-1)^{n+1-k}\xi_r(c_k)c_k^r \leqslant -\bar{x}_r^{\min}c_{n+1-k}^r$$

i dla nieparzystych k

$$\bar{x}_r^{\min}c_{n+1-k}^r \leqslant (-1)^{n+1-k}\xi_r(c_k)c_k^r \leqslant \bar{x}_r^{\max}c_{n+1-k}^r.$$

Mamy również dla parzystych k

$$\overset{+}{x}{}_r^{\min}c_{n+1-k}^r \leqslant (-1)^k\xi_r(c_{n+1-k})c_{n+1-k}^r \leqslant \overset{+}{x}{}_r^{\max}c_{n+1-k}^r$$

i dla nieparzystych k

$$-\overset{+}{x}{}_r^{\max}c_{n+1-k}^r \leqslant (-1)^k\xi_r(c_{n+1-k})c_{n+1-k}^r \leqslant -\overset{+}{x}{}_r^{\min}c_{n+1-k}^r.$$

Z otrzymanych nierówności wynika, że wyrażenie

$$\frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{2}\xi_r(c_{n+1})c_{n+1}^r-\xi_r(c_n)c_n^r+\ldots+(-1)^n\xi_r(c_1)c_1^r+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\xi_r(c_0)c_0^r\Big)$$

można oszacować z dołu i z góry odpowiednio przez różnice

$$\frac{1}{n+1}\Big\{(\overset{+}{x}{}_r^{\min}-\bar{x}_r^{\max})\Big(\sum_l{}^{+}c_{n-2l+1}^r-\frac{1}{2}\Big)-(\overset{+}{x}{}_r^{\max}-\bar{x}_r^{\min})\sum_l{}^{+}c_{n-2l}^r\Big\},$$

$$\frac{1}{n+1}\Big\{(\overset{+}{x}{}_r^{\max}-\bar{x}_r^{\min})\Big(\sum_l{}^{+}c_{n-2l+1}^r-\frac{1}{2}\Big)-(\overset{+}{x}{}_r^{\min}-\bar{x}_r^{\max})\sum_l{}^{+}c_{n-2l}^r\Big\},$$

w których symbol $\sum\limits_{l}^{+}$ oznacza sumowanie potęg tylko dodatnich liczb spośród $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$.

Wprowadzając oznaczenia z twierdzeń 2 i 3, można napisać udowodnioną nierówność w postaci

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant (r-n)/2-1} a_{nm}x_{n+2m+1}+a_{nr}^{\min} =$$

$$= e_{nr}^{\min} \leqslant (-1)^{n+1}e_n \leqslant e_{nr}^{\max} = \sum_{0\leqslant m\leqslant (r-n)/2-1} a_{nm}x_{n+2m+1}+a_{nr}^{\max}.$$

Jeśli liczby $e_{nr}^{\min}$ i $e_{nr}^{\max}$ mają wspólny znak, to z powyższej nierówności wynika, że liczba $|e_n|$ (a zatem i liczba $\varepsilon_n(\xi)$) jest niemniejsza od $\min\{|e_{nr}^{\min}|, |e_{nr}^{\max}|\}$, co należało udowodnić.

4. Zastosowanie twierdzeń 1-3. Podamy teraz przykłady wykorzystania udowodnionych twierdzeń.

Twierdzenie 1 stosujemy wtedy, gdy wartości funkcji ξ w punktach $c_{n+1,k}$ można łatwo obliczyć, a także wtedy, gdy praktycznie niemożliwe jest zastosowanie pozostałych twierdzeń.

Przykład 1. Niech $\xi = \arccos t$. Wtedy

$$\xi(c_{n+1,k}) = \arccos\left(\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}\right) = \frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n+1$,

(24) $$\varepsilon_n(\arccos t) \geqslant \frac{1}{n+1}\left|\frac{1}{2}\pi - \frac{n\pi}{n+1}+\ldots+(-1)^n\frac{\pi}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{2}0\right|.$$

Dla n parzystego wyrażenie pod znakiem wartości bezwzględnej jest równe $\pi/2-\pi n/2(n+1) = \pi/2(n+1)$, więc

(25) $$\varepsilon_n(\arccos t) \geqslant \pi/2(n+1)^2 \quad (n \text{ parzyste}).$$

Dla n nieparzystego to samo wyrażenie jest równe zeru i z nierówności (24) wynika tylko, że $\varepsilon_n(\arccos t) \geqslant 0$, a to jest oczywiste. Ponieważ jednak dla dowolnej funkcji ξ zachodzi nierówność $\varepsilon_n(\xi) \geqslant \varepsilon_{n+1}(\xi)$ wynikająca z określenia błędu optymalnej aproksymacji $\varepsilon_n(\xi)$, więc na mocy (25) mamy

(26) $$\varepsilon_n(\arccos t) \geqslant \pi/2(n+2)^2 \quad (n \text{ nieparzyste}).$$

Uwagę taką należy zawsze wykorzystać, jeśli prawa strona nierówności (2) jest równa zeru, a więc w szczególności dla parzystej funkcji ξ i parzystego n oraz dla nieparzystej funkcji ξ i nieparzystego n.

Z nierówności (25) i (26) wynika, że aby przybliżyć funkcję $\arccos t$ wielomianami z dokładnością do 0,001, należy wziąć wielomian stopnia co najmniej 38-go.

PRZYKŁAD 2. Niech $\xi = |t|$. Wtedy przy n nieparzystym ($n = 2p-1$) otrzymujemy na mocy twierdzenia 1 nierówność

$$\varepsilon_n(|t|) \geqslant \frac{2}{n+1}\left|\frac{1}{2}\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2p} + \cos\frac{2\pi}{2p} - \ldots + (-1)^p \cos\frac{p\pi}{2p}\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4p} = \frac{1}{n+1}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}$$

([3], wzór 1.341.1). To oszacowanie jest znacznie słabsze od znanego z teorii aproksymacji oszacowania $\varepsilon_n(|t|) \geqslant 1/2\pi(2n+1)$. Wiąże się to z nieregularnością funkcji $|t|$.

Twierdzenie 2 stosujemy wtedy, gdy liczby x_{n+2m+1} mają dla wszystkich $m = 0, 1, \ldots$ (lub przynajmniej dla dostatecznie dużych m) wspólny znak. W przeciwnym razie oszacowanie z dołu prawej strony nierówności (4) może być trudne i należy skorzystać z twierdzenia 3 lub — w razie jego nieprzydatności — obliczyć wartości funkcji ξ w punktach $c_{n+1,k}$ i skorzystać z twierdzenia 1.

PRZYKŁAD 3. Niech $\xi = e^t = 1+t+t^2/2!+t^3/3!+\ldots$ i $n = 4$. Mamy w tym przypadku $x_k = 1/k!$. Z twierdzenia 2 wynika, że

$$\varepsilon_4(e^t) \geqslant |a_{40}x_5 + a_{41}x_7 + a_{42}x_9 + \ldots|.$$

Wszystkie składniki sumy po prawej stronie tej nierówności są dodatnie. Ograniczając się do pierwszych dwóch z nich i korzystając z tablicy 2 otrzymujemy

$$\varepsilon_4(e^t) \geqslant \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{5!} + \frac{7}{64}\cdot\frac{1}{7!} = \frac{5}{9216} > 0{,}000542.$$

Można obliczyć, że $\varepsilon_4(e^t) \leqslant 0{,}000557$, więc oszacowanie to jest bardzo dobre. Twierdzenie B gwarantuje tylko, że

$$\varepsilon_4(e^t) \geqslant \frac{1}{2^4\cdot 5!}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{1920e} > 0{,}000191.$$

PRZYKŁAD 4. Niech $\xi = -5+t-3t^3+7t^5+t^6-t^7$ i $n = 3$. Mamy w tym przypadku $x_4 = 0$, $x_6 = 1$, $x_8 = \ldots = 0$, więc $\varepsilon_3(\xi) \geqslant |a_{31}x_6| = 3/16$. Ponieważ $x_5 = 7$, $x_7 = -1$, $x_9 = \ldots = 0$, więc dla tej funkcji dla $n = 4$ mamy

$$\varepsilon_4(\xi) \geqslant |a_{40}x_5 + a_{41}x_7| = \left|\frac{1}{16}\cdot 7 + \frac{9}{64}(-1)\right| = \frac{17}{64} > \frac{3}{16}.$$

Okazało się więc, że dla funkcji określonej w tym przykładzie uwzględnienie nierówności $\varepsilon_3(\xi) \geqslant \varepsilon_4(\xi)$ polepsza oszacowanie liczby $\varepsilon_3(\xi)$ (z 3/16 na 17/64).

PRZYKŁAD 5. Niech $\xi(t) = \cos t$, $n = 3$. Ponieważ $\cos t = 1-t^2/2!+$ $+t^4/4!-\ldots$, to zastosowanie twierdzenia 2 (a także twierdzenia 1) jest tu niewygodne. Przyjmijmy więc na przykład $r = 7$ i zastosujmy twierdzenie 3. Mamy $\cos t = 1-t^2/2!+t^4/4!-t^6/6!+(t^7/7!)\sin u(t)$, gdzie $-1 \leqslant$ $\leqslant t \leqslant u(t) \leqslant 0$ albo $0 \leqslant u(t) \leqslant t \leqslant 1$, więc $\xi_7(t) = (\sin u(t))/7!$ i

$$-(\sin 1)/7! \leqslant (-1)^{3+7}\xi_7(t) \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle -1, 0 \rangle,$$

$$0 \leqslant \xi_7(t) \leqslant (\sin 1)7! \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ponieważ $\sin 1 < 1-1/3!+1/5! = 101/120 < 6/7$ i $(6/7)/7! = 1/5880$, to zgodnie z (6) można przyjąć

$$\bar{x}_7^{\min} = -\frac{1}{5880}, \quad \bar{x}_7^{\max} = 0, \quad \overset{+}{x}{}_7^{\min} = 0, \quad \overset{+}{x}{}_7^{\max} = \frac{1}{5880}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 należy następnie obliczyć wyrażenia

$$\sum_{0 \leqslant m \leqslant (r-n)/2-1} a_{nm} x_{n+2m+1} = a_{30}x_4 + a_{31}x_6 =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4!} - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{6!} = \frac{19}{3840} > 0{,}0049479,$$

(27)
$$a_{37}^{\min} = 0\cdot g_{37} - \frac{1}{2940} h_{37} = -\frac{0{,}02209709}{2940} > -0{,}0000076,$$

$$a_{37}^{\max} = \frac{1}{2940} g_{37} - 0\cdot h_{37} > 0.$$

Znajomość wartości $a_{37}^{\max}$ nie jest potrzebna, ponieważ z wielkości liczb (27) i z twierdzenia 3 wynika, że $\varepsilon_3(\cos t)$ jest niemniejsze od liczby $e_{37}^{\min}$, tj.

$$\varepsilon_3(\cos t) > 0{,}0049479 - 0{,}0000076 > 0{,}00494.$$

Z twierdzenia B wynika tylko, że

$$\varepsilon_3(\cos t) \geqslant \frac{1}{2^3\cdot 4!} \min_{|t|\leqslant 1} |\cos t| = \frac{\cos 1}{2^3\cdot 4!} > \frac{1}{384} > 0{,}00260.$$

Można się spodziewać, że na ogół przy danym n zwiększanie r polepsza oszacowanie liczby $\varepsilon_n(\xi)$. W tym jednak przykładzie, przy przejściu od $r = 7$ do $r = 8$, polepszenie to jest bardzo nieznaczne (o około 10^{-5}).

Jeśli moduły współczynników rozwinięcia funkcji ξ w szereg wolno maleją, to praktycznie można nie znaleźć takiej liczby r, dla której liczby $e_{nr}^{\min}$ i $e_{nr}^{\max}$ miałyby wspólny znak. Wtedy trzeba zastosować twierdzenie 1.

TABLICA 1. Liczby $c_{n+1,k}$

n	$-c_{n+1,0}$ $c_{n+1,n+1}$	$-c_{n+1,1}$ $c_{n+1,n}$	$-c_{n+1,2}$ $c_{n+1,n-1}$	$-c_{n+1,3}$ $c_{n+1,n-2}$	$-c_{n+1,4}$ $c_{n+1,n-3}$
2	1	0,5			
3	1	0,707 106 781 187	0		
4	1	0,809 016 994 375	0,309 016 994 375		
5	1	0,866 025 403 784	0,5	0	
6	1	0,900 968 861 181	0,623 489 799 533	0,222 520 932 573	
7	1	0,923 879 532 511	0,707 106 781 187	0,382 683 432 365	0
8	1	0,939 692 620 786	0,766 044 443 119	0,5	0,173 648 177 667

TABLICA 2. Liczby a_{nm}

nm	0	1	2
2	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{5}{16} = 0{,}3125$	$\frac{21}{64} = 0{,}328\,125$
3	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{3}{16} = 0{,}1875$	$\frac{7}{32} = 0{,}21875$
4	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{7}{64} = 0{,}109\,375$	$\frac{9}{64} = 0{,}140\,625$
5	$\frac{1}{32} = 0{,}03125$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{45}{512} \approx 0{,}087\,890\,63$
6	$\frac{1}{64} = 0{,}015\,625$	$\frac{9}{256} = 0{,}035\,156\,25$	$\frac{55}{1024} \approx 0{,}053\,710\,938$
7	$\frac{1}{128} = 0{,}007\,8125$	$\frac{5}{256} = 0{,}019\,531\,25$	$\frac{33}{1024} \approx 0{,}032\,226\,563$
8	$\frac{1}{256} = 0{,}003\,906\,25$	$\frac{11}{1024} \approx 0{,}010\,742\,188$	$\frac{39}{2048} \approx 0{,}019\,042\,969$

TABLICA 2 (cd.). Liczby a_{nm}

nm	3	4	5
2	$\frac{85}{256} = 0{,}332\,031\,25$	$\frac{341}{1024} \approx 0{,}333\,007\,81$	$\frac{1365}{4096} \approx 0{,}333\,251\,95$
3	$\frac{15}{64} = 0{,}234\,375$	$\frac{31}{128} = 0{,}242\,1875$	$\frac{63}{256} = 0{,}246\,093\,75$
4	$\frac{165}{1024} \approx 0{,}161\,132\,81$	$\frac{715}{4096} \approx 0{,}174\,560\,55$	$\frac{751}{4096} \approx 0{,}183\,349\,61$
5	$\frac{55}{512} \approx 0{,}107\,421\,88$	$\frac{1001}{8192} \approx 0{,}122\,192\,38$	$\frac{273}{2048} \approx 0{,}133\,300\,78$
6	$\frac{143}{2048} \approx 0{,}069\,824\,219$	$\frac{1365}{16384} \approx 0{,}083\,312\,988$	$\frac{1547}{16384} \approx 0{,}094\,421\,387$
7	$\frac{91}{2048} \approx 0{,}044\,433\,594$	$\frac{455}{8192} \approx 0{,}055\,541\,992$	$\frac{1071}{16384} \approx 0{,}065\,368\,652$
8	$\frac{455}{16384} \approx 0{,}027\,770\,996$	$\frac{595}{16384} \approx 0{,}036\,315\,918$	$\frac{2907}{65536} \approx 0{,}044\,357\,300$

TABLICA 3. Liczby g_{nr} i h_{nr} (*)

rn	2	3	5	4	6	7	8
	166 666 67						
2	083 333 33						
	166 666 67	125 000 00					
3	041 666 67	088 388 35					
	166 666 67	125 000 00	101 823 73				
4	020 833 33	062 500 00	085 676 27				
	166 666 67	125 000 00	100 563 56	088 541 667			
5	010 416 67	044 194 17	069 313 56	081 189 882			
	166 666 67	125 000 00	100 174 15	085 937 500	079 820 815		
6	005 208 33	031 250 00	056 075 85	070 312 500	076 429 181		
	166 666 67	125 000 00	100 053 82	084 635 417	076 661 050	073 548 543	
7	002 604 17	022 097 09	045 366 32	060 892 411	068 848 546	071 965 616	
	166 666 67	125 000 00	100 016 63	083 984 375	074 690 968	070 312 500	068 731 818
8	001 302 08	015 625 00	036 702 12	052 734 575	062 027 778	066 406 250	067 986 932
	166 666 67	125 000 00	100 005 14	083 658 854	073 319 785	068 024 272	065 649 104
9	000 651 04	011 048 54	029 692 64	045 669 308	055 884 514	061 320 259	063 695 979
		125 000 00	100 001 59	083 496 094	072 696 794	066 406 250	063 287 653
10		007 812 50	024 021 85	039 550 781	050 350 077	056 640 625	059 759 222
			100 000 49	083 414 714	072 219 295	065 262 136	061 478 684
11			019 434 08	034 251 981	045 363 823	052 324 557	056 107 590
			100 000 15	083 374 023	071 921 580	064 453 125	060 092 935
12			015 722 50	029 663 086	040 871 385	048 339 844	052 700 034
			100 000 05	083 353 678	071 735 957	063 881 068	059 031 390
13			012 719 77	025 688 986	036 823 844	044 659 525	049 509 905
			100 000 01	083 343 508	071 620 223	063 476 563	058 218 199
14			010 290 51	022 247 314	033 177 137	041 259 766	046 518 129
			100 000 00	083 338 420	071 548 064	063 190 534	057 595 259
15			008 325 20	019 266 739	029 891 567	038 118 955	043 709 761
				083 335 876	071 503 074	062 988 281	057 118 059
16				016 685 486	026 931 371	035 217 285	041 072 249
				083 334 605	071 475 023	062 845 267	056 752 503
17				014 450 055	024 264 327	032 536 515	038 594 544
				083 333 969	071 457 534	062 744 141	056 472 470
18				012 514 114	021 861 403	030 059 814	036 266 635
				083 333 651	071 446 629	062 672 633	056 257 953
19				010 837 541	019 696 443	027 771 645	034 079 303
				083 333 492	071 439 830	062 622 070	056 093 623
20				009 385 586	017 745 882	025 657 654	032 023 976
				083 333 413	071 435 591	062 586 317	055 967 739
21				008 128 156	015 988 487	023 704 581	030 092 648
					071 432 948	062 561 035	055 871 307
22					014 405 129	021 900 177	028 277 816
					071 431 300	062 543 158	055 797 435
23					012 978 573	020 233 125	026 572 443
					071 430 273	062 530 518	055 740 846
24					011 693 290	018 692 970	024 969 923
					071 429 632	062 521 579	055 697 496
25					010 535 290	017 270 053	023 464 049
					071 429 233	062 515 259	055 664 288
26					009 491 968	015 955 448	022 048 993
					071 428 984	062 510 790	055 638 850
27					008 551 968	014 740 912	020 719 275
					071 428 829	062 507 629	055 619 363
28					007 705 057	013 618 827	019 469 749
					071 428 732	062 505 395	055 604 435
29					006 942 016	012 582 155	018 295 580

(*) Liczby g_{nr} podano w górnych wierszach, h_{nr} — w dolnych wierszach; przecinek leży bezpośrednio przed pierwszą cyfrą daną w tablicy.

Prace cytowane

[1] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной*, ч. I, Ленинград-Москва 1937.

[2] S. Paszkowski, *Zagadnienia numeryczne aproksymacji jednostajnej (I) (O alternansie wielomianów optymalnych)*, Zastosowania Matematyki 4 (1958), str. 42.

[3] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва-Ленинград 1951.

Praca wpłynęła 16. 2. 1957

С. ПАШКОВСКИЙ (Вроцлав)

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ (II)
(Об оценках ошибки наилучшей аппроксимации)

РЕЗЮМЕ

В этой работе представлены оценки снизу чисел $\varepsilon_n(\xi) = \min_{\varphi\in W_n} \max_{|t|\leqslant 1} |\xi(t)-\varphi(t)|$, где ξ — функция непрерывная в замкнутом интервале $\langle -1, 1\rangle$, а W_n — класс всех алгебраических полиномов степени не выше n. Таким образом, $\varepsilon_n(\xi)$ есть ошибка наилучшей равномерной аппроксимации функции ξ при помощи полиномов степени не выше n.

Получены оценки: 1° оценка (2), в которой числа $c_{n+1,k}$ определены формулой (3), 2° оценка (4) для непрерывной функции $\xi = \sum_{l=0}^{\infty} x_l t^l$, где числа a_{nm} определены формулой (5), 3° оценка (10) для функции $\xi = \sum_{l=0}^{r-1} x_l t^l + \xi_r t^r$, где r — натуральное число, ξ_r — непрерывная функция от аргумента t, а числа $e_{nr}^{\min}, e_{nr}^{\max}, \ldots$ определены формулами (6)-(9). Все эти оценки вытекают из известной теоремы Валле Пуссена.

Кроме того в работе находятся примеры и таблицы чисел $c_{n+1,k}$ (таблица 1), a_{nm} (таблица 2) и g_{nr}, h_{nr} (таблица 3), встречающихся в полученных оценках.

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

NUMERICAL PROBLEMS OF UNIFORM APPROXIMATION (II)
(On estimating the error of best approximation)

SUMMARY

The paper gives the lower bounds of the numbers $\varepsilon_n(\xi) = \min_{\varphi\in W_n} \max_{|t|\leqslant 1} |\xi(t)-\varphi(t)|$, where the function ξ is continuous in the closed interval $\langle -1, 1\rangle$ and W_n is the class of all algebraical polynomials of degree not greater than n. $\varepsilon_n(\xi)$ is thus the error of the best uniform approximation of the function ξ by polynomials of degree at most n.

The estimates are as follows: 1° estimate (2), where the numbers $c_{n+1,k}$ are defined by formula (3), 2° estimate (4) for the continuous function $\xi = \sum_{l=0}^{\infty} x_l t^l$, where the numbers a_{nm} are defined by formula (5), 3° estimate (10) for the function $\xi = \sum_{l=0}^{r-1} x_l t^l + \xi_r t^r$, where r is a natural number, ξ_r is a continuous function of the variable t and the numbers $e_{nr}^{\min}$, $e_{nr}^{\max}$, ... are defined by formulas (6)-(9). All the estimates are conclusions from a known theorem of de la Vallée Poussin.

The paper contains also examples and tables of the numbers $c_{n+1,k}$ (table 1), a_{nm} (table 2) and g_{nr}, h_{nr} (table 3) occurring in the estimates.