A. RYBARSKI (Wrocław)

ZUR FRAGE DER VARIATIONSPRINZIPIEN DER GLEICHUNGEN EINER SYNCHRONISCHEN MASCHINE

Die moderne Variationsrechnung schafft ein starkes Mittel zur Behandlung der Differentialgleichungen. Man könnte versuchen, dieses Mittel auf die Gleichungen des Generators zu wenden. Diese nicht-linearen Gleichungen sind aber zur Zeit im Zusammenhang mit den Variationsprinzipien nur wenig untersucht worden. Es ist bekannt, daß sie aus dem Hamiltonschen Prinzip der analytischen Mechanik folgen [1]. Dieses Prinzip ist aber kein Extremal- und umsoweniger ein Minimalprinzip.

In dieser Arbeit wird nun für die Gleichungen des Generators ein Minimalprinzip aufstellen. Die Lagrange-Funktion dieses Prinzips ist von besonderer Art, und zwar enthält sie parametrisch die Lösung jener Gleichungen. Es wurde aber bewiesen, daß die Euler'schen Gleichungen, welche aus vorangestellten Prinzipien folgen, mit den Generator-Gleichungen äquivalent sind.

§ 1. Einführung

In dieser Arbeit wollen wir folgende $n+1$ Gleichungen

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}[L_{kj}(\gamma)i_j]+r_{kj}i_j = e_k(t),\\ &I\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\frac{dL_{kj}}{d\gamma}i_k i_j = M(t), \end{aligned} \qquad k=1,\ldots,n,$$

ls die Gleichungen einer synchronischen Maschine betrachten, wobei γ und i_k die $n+1$ Unbekannten sind [2]. Wir wollen voraussetzen, daß die Funktionen $L_{kj}(\gamma)$ beschränkt sind, erste und zweite stettige Ableitung besitzen, die auch beschränkt sind. Die Größen I und r_{kj} sind positive Konstanten, wobei $r_{kj} = 0$ für $k \neq j$. Die $M(t)$ und $e_k(t)$ sind vorgegebene stetige Funktionen der Zeit. Über die Matrix L_{kj} wollen wir voraussetzen, daß sie symmetrisch und gleichmäßig positiv-definit ist, das heißt:

$$L_{kj}x_k x_j \geqslant A x_k x_k; \qquad A = \text{const} > 0,$$

für alle x_k und γ.

Vom technischen Standpunkte aus stellen die L_{kj} Induktionskoeffizienten dar, r_{kj} — die aktiven Widerstände des Systems, e_k — die äußeren Spannungen, M — das mechanische Moment, welches auf den Generator einwirkt; ferner stellen i_k die Stromstärken des Systems und γ — den Winkel dar, um welchen sich der Rotor bis zur Zeit t umdreht [3]. Zuletzt ist I das Trägheitsmoment des Rotors.

Es ist bekannt, daß die Gleichungen (1.1) aus den Lagrange'schen Gleichungen für nicht-konservative Systeme der analytischen Mechanik abgeleitet werden können [3]. Dabei hat man für die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ und die Dissipationfunktion $\mathcal{R}$ folgende Ausdrücke:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}L_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j + \tfrac{1}{2}I\dot{\gamma}^2 + e_k q_k + M\gamma, \quad \mathcal{R} = \tfrac{1}{2}r_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j, \tag{1.2}$$

$$\dot{q}_k = \frac{d}{dt}q_k(t), \quad \dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\gamma(t).$$

Setzen wir (1.2) in die Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{q}_k} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma} = 0, \tag{1.3}$$

ein, so erhalten wir sofort die Gleichungen (1.1); man hat nur $i_k = \dot{q}_k$ zu setzen. Ferner, ist bekannt, daß die Gleichungen (1.3) mit dem Hamilton'schen Prinzip

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k dt \tag{1.4}$$

äquivalent sind; dabei beziehen sich die Variationen auf $q_k(t)$ und $\gamma(t)$ und verschwinden, wie immer, für $t = t_1$, $t = t_2$. Im Weiteren wollen wir annehmen, das die Systeme $Q = \big(q_1(t), \ldots, q_n(t), \gamma(t)\big)$ einer gewißen Klasse D angehören, deren Elemente $(n+1)$-tupel von 2-mal differenzierbaren Funktionen sind, welche vorgegebenen Randbedingungen für die Werte $t = t_1$, $t = t_2$ genügen. Mit Q_0 wollen wir irgendeine Lösung $\big(q_{10}(t), \ldots, q_{n0}(t), \gamma_0(t)\big)$ von (1.1) bezeichnen, die der Klasse D angehört.

§ 2. Das Extremalprinzip

Wir bilden das Funktional

$$W(Q, Q_0) = \int_{t_1}^{t_2}(\mathcal{L} - R_k q_k)\,dt, \tag{2.1}$$

wobei

$$R_k = \left.\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{q}_k}\right|_{Q=Q_0} = r_{kj}\dot{q}_{j0}(t),$$

und stellen folgendes Extremalprinzip auf:

EXTREMALPRINZIP. *Für jede Variation $\delta Q = \big(\delta q_1(t), \ldots, \delta q_n(t), \delta\gamma(t)\big)$, die der Klasse D angehört, und für welche für $t = t_1$, $t = t_2$ $\delta q_k(t)$ und $\delta\gamma(t)$ verschwinden, soll*

$$\delta W(Q, Q_0) = 0 \tag{2.2}$$

gelten.

Aus diesem Prinzip folgen die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}[L_{kj}(\gamma)\dot{q}_j] + r_{kj}\dot{q}_{j0}(t) = e_k(t), \qquad I\ddot{\gamma} + \frac{dL_{kj}}{d\gamma}\dot{q}_k\dot{q}_j = M(t). \tag{2.3}$$

Wir sehen, daß diese Gleichungen mit den Gleichungen (1.1) nicht übereinstimmen. Beide Gleichungs-Systeme besitzen jedoch Q_0 als gemeinsame Lösung. Wir werden beweisen, daß es eine derartige Klasse $D' \subset D$ gibt, mit $Q_0 \in D'$, in welcher Q_0 die einzige Lösung der Gleichungen (1.1) bzw. (2.3) darstellt. In dieser Klasse sind also die Gleichungen (1.1) und (2.3) äquivalent. Das Prinzip (2.2), reduziert auf D' (das heißt bei Voraussetzung $\delta Q \in D'$), wird dann zum gewünschten Extremal- und sogar Minimalprinzip für die Gleichungen des Generators.

§ 3. Das Lemma über die zweite Variation von W

Nach (2.1) und (1.2) hat die zweite Variation von W die folgende Gestalt:

$$\delta^2 W = \int_{t_1}^{t_2} dt\{L_{kj}(\gamma)\,\delta\dot{q}_k\,\delta\dot{q}_j + I(\delta\dot{\gamma})^2 + L'_{kj}(\gamma)\,\dot{q}_k\,\delta\dot{q}_j\,\delta\gamma + \tfrac{1}{2}L''_{kj}(\gamma)\,\dot{q}_k\dot{q}_j(\delta\gamma)^2\}. \tag{3.1}$$

Wir beweisen das

LEMMA. *Für jedes $a > 0$ gibt es derartiges $b > 0$ und eine derartige Klasse D', $D' \subset D$, von Systemen $Q = \big(q_1(t), \ldots, \gamma(t)\big)$, die den Bedingungen*

$$|\dot{q}_k - \dot{q}_{k0}| \leqslant a, \tag{3.2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 dt \geqslant b \int_{t_1}^{t_2} (\gamma - \gamma_0)^2 dt \tag{3.2'}$$

genügen, daß für diese Klasse $\delta^2 W > 0$ gilt, sobald nicht alle δq_k, $\delta\gamma$ verschwinden, und $\delta\gamma$ die Bedingung

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\dot{\gamma})^2 dt \geqslant b \int_{t_1}^{t_2} (\delta\gamma)^2 dt \tag{3.2''}$$

erfüllt.

Die Klasse D' hängt also von a, b, Q_0 ab. Sie ist nicht leer, denn zum Beispiel ist (3.2′) nach der Steklow'schen Ungleichung

$$\int_a^\beta \dot{x}^2(t)\,dt \geqslant [\pi^2/(\beta-a)^2]\int_a^\beta x^2(t)\,dt \qquad (x(a)=x(\beta)=0) \tag{3.3}$$

durch alle diejenige $\gamma-\gamma_0$ befriedigt, die außerhalb des Intervalls von der Länge $d\leqslant\pi/\sqrt{b}$ verschwinden. Wenn in jedem Intervall der Länge d mindesten eine Nullstelle von $\gamma-\gamma_0$ vorhanden ist, genügt ein solches $\gamma-\gamma_0$ auch (3.2′). Dasselbe betrifft auch $\delta\gamma$.

Nun wollen wir das Lemma beweisen. Nach (3.1) erhalten wir

$$\delta^2 W \geqslant \int_{t_1}^{t_2} dt\{I(\delta\dot{\gamma})^2+A(\delta\dot{q}_k)^2-B_k|\delta\dot{q}_k|\cdot|\delta\gamma|-C(\delta\gamma)^2\}, \tag{3.4}$$

wobei

$$B_k=\sup_{Q\in D'}\sup_{\gamma}|L'_{kj}(\dot{\gamma})|\cdot|\dot{q}_j|,\qquad C=\sup_{Q\in D}\sup_{\gamma}|\tfrac{1}{2}L''_{kj}(\gamma)|\cdot|\dot{q}_k\,\dot{q}_j|. \tag{3.4′}$$

Laut der Schwarz'schen Ungleichung und (3.2″), erhalten wir aus (3.4)

$$\begin{aligned}\delta^2 W &\geqslant (I-C/b)\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{\gamma})^2dt+\\ &\qquad +A\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{q}_k)^2dt-(B_k/\sqrt{b})\Big[\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{q})^2dt\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{\gamma})^2dt\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &= (I-C/b-B_k^2/4Ab)\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{\gamma})^2dt+\Big\{\sqrt{A}\Big[\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{q}_k)^2dt\Big]^{\frac{1}{2}}-\\ &\qquad -(B_k/2\sqrt{Ab})\Big[\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{\gamma})^2dt\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Wenn wir b hinreichend groß wählen, wird $\delta^2 W>0$, wenn nur nicht alle δq_k, $\delta\gamma$ verschwinden, und unser Lemma ist bewiesen.

Wenn wir zum Beispiel $I-C/b-B_k^2/4Ab=\varepsilon>0$ annehmen, sehen wir, daß b von B_k und C, und deshalb also bloß von a abhängt.

§ 4. Die Äquivalenz des Extremalprinzips und der Gleichungen (1.1)

SATZ 1. *Für $Q=Q_0$ erreicht W in der Klasse D' sein absolutes Minimum.*

Beweis. In der Tat, nach (2.1) und (2.2)-(2.3) haben wir

$$W(Q,Q_0)=W(Q_0,Q_0)+\Delta \qquad (Q\in D'), \tag{4.1}$$

wobei

$$\Delta=\tfrac{1}{2}\delta^2 W|_{\delta Q=Q-Q_0;\,Q=Q_0+\varepsilon\delta Q},\qquad \varepsilon=\text{const},\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.1′}$$

Ist nun $Q \in D'$, dann auch $Q_0 + \varepsilon\delta Q = Q_0 + \varepsilon(Q - Q_0) \in D'$; nebenbei erfüllt $\delta\gamma = \gamma - \gamma_0$, wegen (3.2′), die Bedingung (3.2″). Nach unserem Lemma ist jetzt $\Delta > 0$, falls nur nicht alle δq_k, $\delta\gamma$ verschwinden. Wenn wir noch (4.1) beachten, ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *In der Klasse D' haben die Gleichungen* (1.1) *nur eine Lösung. Diese ist nach vorigen Bezeichnungen Q_0.*

Beweis. Es sei in der Klasse D' eine andere Lösung $\hat{Q} = (\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n, \hat{\gamma})$ vorhanden. Wir bilden das Funktional

$$\hat{W}(Q) = W(Q, \hat{Q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt(\mathcal{L} - \hat{R}_k q_k), \tag{4.2}$$

wobei $\hat{R}_k = r_{kj}\dot{\hat{q}}_j(t)$ ist. Wie bei (2.2)-(2.3) haben wir $\delta\hat{W} = 0$ für $Q = \hat{Q}$. Es ist ferner $\delta^2\hat{W} = \delta^2 W$. Deshalb haben wir

$$\hat{W}(Q_0) = \hat{W}(\hat{Q}) + \Delta, \tag{4.3}$$

wobei

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\delta^2 W|_{\delta Q = Q_0 - \hat{Q};\ Q = \hat{Q} + \varepsilon\delta Q}, \qquad \varepsilon = \mathrm{const},\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1. \tag{4.3′}$$

Da das Funktionensystem $\hat{Q} + \varepsilon\delta Q = Q_0 + (1-\varepsilon)(\hat{Q} - Q_0)$ der Klasse D' angehört, und da $\delta\gamma = \gamma_0 - \hat{\gamma}$ wegen $\hat{Q} \in D'$ die Bedingung (3.2″) erfüllt, haben wir nach unserem Lemma $\Delta > 0$. Wir erhalten also aus (4.3)

$$W(Q_0, \hat{Q}) > W(\hat{Q}, \hat{Q}).$$

Nach dem Satz 1 haben wir außerdem

$$-W(Q_0, Q_0) > -W(\hat{Q}, Q_0).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt die Ungleichung

$$W(Q_0, \hat{Q}) - W(Q_0, Q_0) > W(\hat{Q}, \hat{Q}) - W(\hat{Q}, Q_0),$$

die nach (2.1) und (1.2)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt(R_k - \hat{R}_k) q_{k0}(t) > \int_{t_1}^{t_2} dt(R_k - \hat{R}_k)\hat{q}_k(t)$$

ergibt. Nach der Definition von R_k und $\hat{R}_k$, erhalten wir daraus

$$r_{kj}\int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_{k0} - \dot{\hat{q}}_k)(q_{j0} - \hat{q}_j)\,dt > 0.$$

Da aber die linke Seite gleich Null ist, weil $r_{kj} = r_{jk}$ und $q_{k0} - \hat{q}_k$ am Rande verschwindet, so ist diese Ungleichung falsch. Es ist also $\delta Q = 0$, und unser Satz ist bewiesen.

Satz 3. *Das Minimalprinzip*

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt(\mathcal{L} - R_k q_k) = \text{Minimum} \tag{4.4}$$

ist in der Klasse D' mit den Gleichungen (1.1) *äquivalent.*

Beweis. Wenn W für $\hat{Q}$ sein Minimum erreicht, dann ist nach Satz 1 $\hat{Q} = Q_0$, und die Gleichungen (1.1) sind erfüllt. Anderseits, wenn $\hat{Q}$ den Gleichungen (1.1) genügt, nach Satz 2 ist $\hat{Q} = Q_0$, also nach Satz 1 erreicht W sein Minimum.

Satz 4. *Das Extremalprinzip*

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt(\mathcal{L} - R_k q_k) = 0 \tag{4.5}$$

ist in der Klasse D' mit den Gleichungen (1.1) *äquivalent.*

Beweis. Wenn für irgendein $\hat{Q}$ aus D' die Gleichungen (1.1) erfüllt sind, dann nach Satz 2 ist $\hat{Q} = Q_0$ und laut (2.2)-(2.3) ist (4.5) erfüllt. Wir nehmen jetzt an, daß für irgendein $\hat{Q} \in D'$, die Gleichung (4.5) besteht. Nach dieser Voraussetzung haben wir, wegen (2.2)-(2.3),

$$\frac{dW(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0, \quad \text{für } \varepsilon = 0 \text{ und für } \varepsilon = 1, \tag{4.6}$$

wobei

$$W(\varepsilon) = W\big(\varepsilon\hat{Q} + (1-\varepsilon)Q_0, Q_0\big).$$

Nach dem Satz von Rolle und wegen (4.6) haben wir

$$\frac{d^2W(\varepsilon')}{d\varepsilon'^2} = 0, \quad 0 < \varepsilon' < 1. \tag{4.7}$$

Es gilt aber

$$\left.\frac{d^2W(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=\varepsilon'} = \delta^2 W\big|_{\delta Q = \hat{Q} - Q_0;\ Q = \varepsilon'\hat{Q} + (1-\varepsilon')Q_0},$$

und nach dem Lemma ist $\delta^2 W > 0$, was (4.7) widerspricht.

Die obigen Resultate wollen wir in einem Satz zusammenfassen: *Für die Gleichungen* (1.1) *stellt* (1.4) *nur ein Hamilton'sches Prinzip dar, während die Sätze* 3 *und* 4 *Extremal- und Minimalprinzipien liefern. Diese Ex-und-Min-Prinzipien sind aber mit* (1.1) *in einer engeren Klasse als D, nämlich D' äquivalent.*

Es sei bemerkt, daß bei den Beweisen von obigen Sätzen manche Einzelheiten vernachlässigt wurden. Es werde hier festgestellet, daß bei obigen Voraussetzungen die Anwendung des Taylor'schen Satzes bzw. des Du Bois-Reymond'schen Lemmas in D' völlig korrekt war.

§ 5. Eine andere Klasse in welcher die Sätze 1-4 ihre Gültigkeit behalten

Es sei $D''(a, \tau, Q_0)$ eine Klasse von Systemen $Q = (q_1(t), \ldots, q_n(t), \gamma(t))$, welche den Bedingungen

$$(5.1) \qquad \begin{aligned} & q_k(t_1) - q_{k0}(t_1) = q_k(\tau) - q_{k0}(\tau) = \gamma(t_1) - \gamma_0(t_1) = \gamma(\tau) - \gamma_0(\tau) = 0, \\ & |\dot{q}_k - \dot{q}_{k0}| \leqslant a \quad \text{für} \quad t_1 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant t_2; \; q_k, \gamma(t) \in C_2(t_1, \tau) \end{aligned}$$

genügen. Wir sehen aus (3.3), daß wenn nur die Ungleichung

$$(\tau - t_1)^2 \leqslant \pi^2/b$$

besteht, gilt, bei $\gamma(t_1) - \gamma_0(t_1) = \gamma(\tau) - \gamma_0(\tau) = 0$,

$$\int_{t_1}^{\tau} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 dt \geqslant b \int_{t_1}^{\tau} (\gamma - \gamma_0)^2 dt.$$

Jetzt kann man das Funktional

$$(5.2) \qquad W''(Q, Q_0) = \int_{t_1}^{\tau} (\mathfrak{L} - R_k q_k) dt$$

bilden, für welches das folgende Lemma besteht:

Lemma. *Für beliebiges* $Q \in D''(a, \tau, Q_0)$ *gilt*

$$(5.3) \qquad \delta^2 W'' > 0,$$

wenn nur nicht alle δq_k, $\delta\gamma$ *verschwinden.*

Der Beweis laüft ebenso wie im § 3.

Die Sätze 1-4 folgten aus dem Lemma § 3. Ebenso können wir feststellen, dass diese Sätze ihre Gültigkeit behalten, wenn man die Klasse D' durch D'' ersetzt.

§ 6. Eine Verallgemeinerung

Wir untersuchen jetzt das elektromechanische System, für welches die Lagrange- und Dissipationfunktionen folgende Gestalt annehmen:

$$(6.1) \qquad \overline{\mathfrak{L}} = T(\dot{\gamma}, t) - U(\gamma, t) + \tfrac{1}{2} L_{kj}(\gamma) \dot{q}_k \dot{q}_j - \tfrac{1}{2} C_{kj}(\gamma) q_k q_j + e_k(t) q_k,$$

$$(6.2) \qquad \overline{\mathcal{R}} = \tfrac{1}{2} r_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \tfrac{1}{2} \beta \dot{\gamma}^2.$$

Vom technischen Standpunkte aus bezeichnet T die kinetische Energie, U — die potentielle Energie, C_{kj} — die Kapazitäten des Systems und β — den Koeffizient der mechanischen Reibung.

Das Hamilton'sche Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathfrak{L}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{R}}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \frac{\partial \bar{\mathfrak{R}}}{\partial \dot{\gamma}} \delta \gamma \right) dt \tag{6.3}$$

ergibt die Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $Q = \big(q_1(t), \ldots, q_n(t), \gamma(t)\big)$, und zwar

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} [L_{kj}(\gamma) \dot{q}_j] + C_{kj}(\gamma) q_j + r_{kj} \dot{q}_j = e_k(t), \\ &\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{kj}}{\partial \gamma} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{\partial C_{kj}}{\partial \gamma} q_k q_j \right) + \beta \dot{\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Auch für diese Gleichungen kann man ein Extremalprinzip aufstellen, welches in gewißen Klassen der Systeme Q mit diesen Gleichungen äquivalent ist. Das entsprechende Funktional hat die Gestalt

$$\overline{W}(Q, Q_0) = \int_{t_1}^{t_2} (\bar{\mathfrak{L}} - \bar{R}_k q_k - \bar{R}_0 \gamma) dt, \tag{6.5}$$

wobei $\bar{R}_0$ gleich $\beta \dot{\gamma}_0(t)$ ist. Die vorigen Bezeichnungen werden beibehalten.

Wir bezeichnen jetzt durch $G'(a, b, Q_0)$ die Klasse der Systeme, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} &|\dot{q}_k - \dot{q}_{k0}| \leqslant a, \qquad \int_{t_1}^{2} (\dot{q}_k - \dot{q}_{k0})^2 dt \geqslant b \int_{t_1}^{t_2} (q_k - q_{k0})^2 dt, \\ &\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 dt \geqslant b \int_{t_1}^{t_2} (\gamma - \gamma_0)^2 dt \end{aligned} \tag{6.6}$$

genügen. Außerdem setzen wir voraus, daß $G' \in D$. Bei den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} &T, U, L_{ik}, C_{ik} \in C_2, \quad L_{ik} = L_{ki}, \quad C_{ik} = C_{ki}, \quad r_{ik} = r_{ki} = \text{const}, \\ &|L_{kj}| + \left| \frac{\partial}{\partial \gamma} L_{kj} \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} L_{kj} \right| < \infty, \quad L_{kj} x_k x_j \geqslant A x_k x_k \quad (A = \text{const} > 0), \\ &|C_{kj}| + \left| \frac{\partial}{\partial \gamma} C_{kj} \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} C_{kj} \right| < \infty, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} \geqslant J = \text{const} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} < \infty, \end{aligned} \tag{6.7}$$

gilt folgendes

Lemma. *Für jedes $a > 0$ gibt es ein derartiges $b_a > 0$, daß in der Klasse $G'(a, b_a, Q_0)$ die zweite Variation von $\overline{W}$ positiv ist, wenn nur δq_k, $\delta \gamma$ die Bedingungen*

$$(6.8)\qquad \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{q}_k)^2 dt \geqslant b \int_{1}^{2} (\delta q_k)^2 dt, \qquad \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{\gamma})^2 dt \geqslant b \int_{t_1}^{t_2} (\delta \gamma)^2 dt$$

erfüllen und nicht alle verschwinden.

Es folgt aus diesem Lemma, daß die Sätze 1-4 ihre Gültigkeit behalten, wenn man statt W, D und (1.1) entsprechend $\overline{W}$, G', (6.4) setzt. Alle Beweise verlaufen analog, wie in §§ 3 und 4 ohne identisch zu sein.

Man kann weiter durch die Bedingungen

$$(6.9)\qquad \begin{gathered} |\dot{q}_k - \dot{q}_{k0}| \leqslant a \quad \text{für} \quad t_1 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant t_2, \; q_k(t), \gamma(t) \in C_2(t_1, \tau), \\ q_k(t) - q_{k0}(t) = \gamma(t) - \gamma_0(t) = 0 \quad \text{für} \quad t = t_1, \; t = \tau, \end{gathered}$$

eine neue Klasse $G''(a, \tau, Q_0)$ definieren. Dann gilt:

Für jedes $a > 0$ gibt es ein derartiges $\tau > 0$, daß die Sätze 1-4 ihre Gültigkeit behalten, wenn man statt W, D', (1.1) entsprechend $\overline{W}$, G'', (6.4) setzt.

Zum Schluß ziehen wir noch eine einfache Konsequenz aus dem Gesagten. Es sei

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}^2, \quad U = -\int f(\gamma, t) d\gamma, \quad f \in C_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} > -\infty, \quad L_{kj} = \text{const}, \quad C_{kj} = \text{const}.$$

In diesem Falle folgt aus unseren Sätzen:

Für jedes $a > 0$ gibt es ein derartiges $\tau_a > 0$, daß die Gleichungen

$$(6.10)\qquad L_{kj}\ddot{q}_j + r_{kj}\dot{q}_j + C_{kj} q_j = e_k(t), \qquad \ddot{\gamma} - f(\gamma, t) + \beta\dot{\gamma} = 0$$

in der Klasse der Funktionen $Q = (q_1(t), \ldots, q_n(t), \gamma(t))$, die den Bedingungen (6.9) genügen, nur eine einzige Lösung besitzen.

Wir sehen, daß sowohl die Gleichungen (6.10) als auch die Bedingungen (6.9) in unabhängige Gruppen zerfallen. Wir erhalten daraus den Satz, daß bei gegebenen Randwerten von $y(t)$ die Gleichung

$$(6.11)\qquad \ddot{y} = f(y, t) + \beta\dot{y}, \qquad y = y(t) \in C_2(t_1, \tau_a), \qquad f \in C_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} > -\infty$$

höchstens eine Lösung in der Klasse C_2 besitzt (vergl. [4]).

Zitierte Schriften

[1] Б. В. Булгаков, *Колебания*, Москва-Ленинград 1949.

[2] А. А. Горев, *Переходные процессы синхронной машины*, Москвa-Ленинград 1950.

[3] G. Kron, *A short course in tensor analysis*, New York 1942.

[4] G. Sansone, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Bologna 1949.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Eingegangen am 28. 6. 1958

A. RYBARSKI (Wrocław)

ZASADY WARIACYJNE RÓWNAŃ GENERATORA SYNCHRONICZNEGO

STRESZCZENIE

W pracy rozważa się układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 2, rządzących ruchem generatora synchronicznego. Badany układ ma budowę typową dla wielu zagadnień z dziedziny układów elektromechanicznych i zasługuje, jak się wydaje, na systematyczną analizę.

Przybliżonemu rozwiązywaniu badanego układu poświęcono, z uwagi na zastosowania techniczne, wiele prac. Można przy tym zauważyć, że wśród stosowanych metod brak jednej z najmocniejszych, opartej na rachunku wariacyjnym. Stosowanie metod wariacyjnych uzależnione jest od tego, czy dany układ równań ma postać równań Eulera-Lagrange'a. Ponieważ nasz układ jej nie ma, więc metod wariacyjnych do niego stosować bezpośrednio nie można.

Niniejsza praca ma za zadanie usunąć choć częściowo tę trudność. Skonstruowano mianowicie funkcjonał, dla którego warunek minimalności lub ekstremalności daje równania wprawdzie odmienne od badanych, lecz im równoważne. Ponieważ ta równoważność zachodzi tylko w pewnych, odpowiednio ograniczonych, rodzinach funkcji, więc osiągniętego wyniku nie można uznać za całkowicie zadowalający. Na przykład przy stosowaniu metody Ritza, trzeba by dla każdego rozwiązania przybliżonego sprawdzać, czy należy ono do klasy, w której zachodzi równoważność. Wykazuję jednak, że wskazana trudność odpada, jeżeli przedział zmienności zmiennej niezależnej jest dostatecznie krótki.

Dla badanego układu równań uzyskano również twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań zadań brzegowych. Twierdzenia te obejmują również przypadek nieliniowych równań typu wahadła z liniowym tłumieniem.

А. РЫБАРСКИЙ (Вроцлав)

К ВОПРОСУ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ УРАВНЕНИЙ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, типичная для различных электромеханических устройсть. Построен функционал, из условия экстремальности которого выводится уравнения эквивалентные исследуемым. Доказаны теоремы о единственности решения при заданных граничных условиях. Теоремы охватывают также случай нелинейных уравнений типа маятника с линейным демпфированием.

A. RYBARSKI (Wrocław)

ON THE PROBLEM OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE EQUATIONS OF SYNCHRONOUS MACHINERY

SUMMARY

The author considers a system of non-linear differential equations of the second order, typical for various electromechanical systems. He constructs a functional for which the condition of minimality or of extremality gives equations which are equivalent to the given ones. He proves theorems on the uniqueness of the solutions of boundary problems. Those theorems comprise also the case of non-linear equations of the type of a pendulum with linear damping.